ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2018. Том 25, № 1. С. 75–97

УДК 519.8 DOI: 10.17377/daio.2018.25.560

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛОЙ СЕПАРАБЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ К ЗАДАЧЕ ПОИСКА НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ *)

А. Ю. Крылатов[1,2]

[1]Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетская наб., 7/9, 199034 Санкт-Петербург, Россия
[2]Институт проблем транспорта им. Н. С. Соломенко РАН,
12-я линия В. О., 13, 199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.krylatov@spbu.ru, aykrylatov@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена исследованию специального вида задачи условной нелинейной оптимизации. Целевой функционал исследуемой задачи представлен выпуклой сепарабельной функцией, минимум которой ищется на множестве линейных ограничений в виде равенств. Доказано, что для данного типа оптимизационных задач может быть получен явный вид проектирующего оператора на базе обобщённой проектирующей матрицы. Проектирующий оператор позволяет представить исходную задачу в виде задачи поиска неподвижной точки. Явный вид задачи поиска неподвижной точки позволяет запустить процедуру простой итерации. Доказана сходимость полученного итерационного метода со скоростью геометрической прогрессии, а при дополнительных, достаточно естественных, условиях доказана квадратичная сходимость. Показано, что важным приложением разработанного метода является задача распределения потока в сети произвольной топологии с одной парой исток — сток. Библиогр. 10.

Ключевые слова: условная нелинейная оптимизация, задача поиска неподвижной точки, обобщённая проектирующая матрица, распределение потока в сети.

Введение

В работе [3] исследована задача вида

$$T(x^*) = \min_x \sum_{i=1}^{n} \int_0^{x_i} t_i(u)\,du \tag{1}$$

*)Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 17–71–10069).

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = b, \tag{2}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\int\limits_0^{x_i} t_i(u)\,du$ — выпуклые по верхнему пределу функции, $t_i(x_i) \geqslant 0$ и $t'_i(x_i) > 0$ при $x_i \geqslant 0$ для всех $i = \overline{1,n}$ и $b > 0$. Показана актуальность данной задачи (в частности, она соответствует задаче равновесного распределения потока в сети из параллельных маршрутов), сделан краткий обзор релевантной научной литературы, а также разработан новый проекционный алгоритм её решения. Этот алгоритм обладает высокой скоростью сходимости и, следовательно, вносит вклад в развитие методов параллельной декомпозиции (parallel decomposition algorithms), которые решают задачу распределения потоков в произвольной сети посредством её разбиения на подсети с одной парой исток — сток каждая [7–9].

Естественным является вопрос о применимости методологии, использованной в [3], при решении обобщённой задачи условной нелинейной оптимизации вида

$$\mathfrak{T}(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{x_i} t_i(u)\,du \tag{4}$$

при ограничениях

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{5}$$

$$\mathbf{x} \geqslant 0, \tag{6}$$

где $\mathbf{x} = x^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\int\limits_0^{x_i} t_i(u)\,du$ — выпуклые по верхнему пределу функции, $t_i(x_i) \geqslant 0$ и $t'_i(x_i) > 0$ при $x_i \geqslant 0$ для всех $i = \overline{1,n}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$ — матрица и $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{m\times 1}$ — вектор.

В разд. 1 и 2 настоящей работы показано, что использованная в [3] методология может быть эффективно применена при исследовании задачи (4)–(6): будет получен проектирующий оператор в явном виде и разработан проекционный алгоритм решения данной задачи. В разд. 3 показано, что частным случаем оптимизационной задачи (4)–(6) является задача поиска конкурентного равновесия Вардропа при распределении потока в сети с одной парой исток — сток.

1. Эквивалентность рассматриваемой задачи условной оптимизации и задачи поиска неподвижной точки

Рассмотрим задачу (4)–(6) минимизации нелинейной сепарабельной функции на множестве линейных ограничений:

$$\mathfrak{T}(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x}} \mathfrak{T}(\mathbf{x}) \tag{7}$$

при ограничениях

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{8}$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbb{O}, \tag{9}$$

где строки матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимы, т. е. $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = m < n$. Отметим, что в силу выпуклости целевой функции и линейности ограничений задача (7)–(9) имеет единственное решение $\mathbf{x}^*$ (см., например, [2]).

Зафиксируем некоторое число $k \leqslant n$ и составим из произвольно выбранных k компонент вектора $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{x}_k$, а из оставшихся $n-k$ компонент — вектор $\mathbf{x}_{n-k}$. При этом каждой из k выбранных компонент вектора $\mathbf{x}$ соответствует столбец матрицы $\mathbf{A}$. Составим матрицу $\mathbf{A}_k$ из таких столбцов, причём расположим столбцы в том же порядке, в котором идут соответствующие им компоненты $\mathbf{x}_k$. Аналогично построим матрицу $\mathbf{A}_{n-k}$. Перенумеруем компоненты $\mathbf{x}$ и столбцы $\mathbf{A}$ так, что компоненты $\mathbf{x}_k$ и столбцы $\mathbf{A}_k$ имеют номера $\{1, \ldots, k\}$, идущие по порядку, а компоненты $\mathbf{x}_{n-k}$ и столбцы $\mathbf{A}_{n-k}$ — номера $\{k+1, \ldots, n\}$, идущие по порядку. Введём матрицу

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_1'(x_1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{t_2'(x_2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{t_k'(x_k)} \end{pmatrix}_{k\times k},$$

а также векторы

$$\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k) = (t_1(x_1) - t_1'(x_1)x_1, \ldots, t_k(x_k) - t_k'(x_k)x_k)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{D}_{n-k}(\mathbf{x}_{n-k}) = (t_{k+1}(x_{k+1}) - t_{k+1}'(x_{k+1})x_{k+1}, \ldots, t_n(x_n) - t_n'(x_n)x_n)^{\mathrm{T}},$$

где порядковые номера функций $t_i(\cdot)$, $i = \overline{1,n}$, соответствуют порядковым номерам соответствующих компонент $\mathbf{x}$ после перенумерации.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{x}^*$ *— оптимальное решение задачи* (7)–(9)*. Существует число* $k \leqslant n$*, набор из* k *компонент вектора* $\mathbf{x}$ *и соответствующий ему набор из* k *столбцов матрицы* $\mathbf{A}$ (*без ограничения общности полагаем, что указанные компоненты и столбцы имеют номера* $1, \ldots, k$) *такие, что*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^* = \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*)) \\ - \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*), \\ \mathbf{x}_{n-k}^* = \mathbb{O}_{n-k,1}, \end{aligned} \tag{10}$$

если $\operatorname{rank}(\mathbf{A}_k) = m$ *и выполняются условия*

$$\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*) \leqslant \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*)), \tag{11}$$

$$\mathbf{D}_{n-k}(\mathbf{x}_{n-k}^*) > \mathbf{A}_{n-k}^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*)). \tag{12}$$

Доказательство. Для удобства изложения доказательства разобьём его на четыре части.

I. К оптимизационной задаче (7)–(9) применим условия Куна—Таккера, продифференцировав лагранжиан

$$L = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i} t_i(u)\,du + \sum_{j=1}^{m}\omega_j\left(b_j - \sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i\right) + \sum_{i=1}^{n}(-\eta_i)x_i$$

по x_i и приравняв полученное выражение к нулю. Получим, что оптимальное решение задачи (7)–(9) $\mathbf{x}^*$ и соответствующие ему множители Лагранжа $\omega^* = (\omega_1^*, \ldots, \omega_m^*)^{\mathrm{T}}$, $\eta_i^* \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial L(x_i^*)}{\partial x_i} = t_i(x_i^*) - \sum_{j=1}^{m}\omega_j^* a_{ji} - \eta_i^* = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

или

$$t_i(x_i^*) = \sum_{j=1}^{m}\omega_j^* a_{ji} + \eta_i^*, \quad i = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Условия дополняющей нежёсткости требуют, чтобы выполнялись равенства $\eta_i^* x_i^* = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$ [6]. В таком случае если $x_i^* > 0$, то $\eta_i^* = 0$ и согласно (13) $t_i(x_i^*) = \sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j^* a_{ji}$. С другой стороны, если $x_i^* = 0$, то $\eta_i^* \geqslant 0$ и $t_i(x_i^*) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j^* a_{ji}$ в силу (13). Таким образом, взаимосвязь $\mathbf{x}^*$

и ω^* может быть выражена в виде следующего условия:

$$t_i(x_i^*) \begin{cases} = \sum\limits_{j=1}^{m} \omega_j^* a_{ji}, & \text{если } x_i^* > 0, \\ \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \omega_j^* a_{ji}, & \text{если } x_i^* = 0, \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}, \tag{14}$$

или в матричной форме покомпонентных равенств и неравенств:

$$\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} \omega^*, \tag{15}$$

$$\mathfrak{t}_{n-k}(\mathbf{x}_{n-k}^*) \geqslant \mathbf{A}_{n-k}^{\mathrm{T}} \omega^*, \tag{16}$$

где $\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*) = (t_1(x_1^*), \ldots, t_k(x_k^*))^{\mathrm{T}}$ — такие $t_i(x_i^*)$, что $x_i^* > 0$, $i = \overline{1,k}$, а матрица $\mathbf{A}_k$ состоит из столбцов матрицы $\mathbf{A}$, соответствующих таким x_i^*. Аналогично $\mathfrak{t}_{n-k}(\mathbf{x}_{n-k}^*) = (t_{k+1}(x_{k+1}^*), \ldots, t_n(x_n^*))^{\mathrm{T}}$ — набор таких $t_i(x_i^*)$, что $x_i^* = 0$, $i = \overline{k+1,n}$, а $\mathbf{A}_{n-k}$ состоит из столбцов матрицы $\mathbf{A}$, соответствующих таким x_i^*.

Следует отметить, что функции $\int\limits_0^{x_i} t_i(u)\,du$, $i = \overline{1,n}$, выпуклы, а значит, условия Куна — Таккера являются необходимыми и достаточными. Таким образом, можно утверждать, что $\mathbf{x}^*$ является решением оптимизационной задачи (7)–(9) тогда и только тогда, когда существует ω^* такое, что $\mathbf{x}^*$ и ω^* удовлетворяют соотношению (14) или соотношениям (15), (16).

II. Аппроксимируем гладкие выпуклые функции $t_i(x_i) \in C^1(\mathfrak{R}_+^1)$ при $x_i \geqslant 0$ кусочно-линейными:

$$t_i(x_i) \approx \hat{t}_i(x_i) = \sum_{j=1}^{q_i} \left[c_i^j + d_i^j x_i\right] \delta I_i^j, \quad i = \overline{1,n},$$

где

$$\delta I_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in I_j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а $I_i = \left(I_i^1, \ldots, I_i^{q_i}\right)$ — множество интервалов, соответствующих линейным отрезкам кусочно-линейной функции $\hat{t}_i(x_i)$. Будем считать, что аппроксимация происходит с заданной точностью ε: $|t_i(x_i) - \hat{t}_i(x_i)| < \varepsilon$ для всех $x_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$.

Сформулируем задачу условной оптимизации (7)–(9) для случая кусочно-линейных функций:

$$\hat{\mathfrak{G}}(\widehat{\mathbf{x}}^*) = \min_{\widehat{\mathbf{x}}} \hat{\mathfrak{G}}(\hat{\mathbf{x}}) = \min_{\hat{\mathbf{x}}} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{\hat{x}_i} \sum_{j=1}^{q_i} \left[c_i^j + d_i^j u\right] \delta I_i^j \, du, \tag{17}$$

при ограничениях

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \tag{18}$$

$$\hat{\mathbf{x}} \geqslant \mathbb{O}. \tag{19}$$

Воспользовавшись условиями Куна — Таккера, выпишем условие связи оптимального решения $\hat{\mathbf{x}}^* = (\hat{x}_1^*, \ldots, \hat{x}_n^*)^{\mathrm{T}}$ задачи (17)–(19) и множителей Лагранжа $\widehat{\omega}^* = (\widehat{\omega}_1, \ldots, \widehat{\omega}_m)$, соответствующих ограничению (18) (напрямую следует из (14)):

$$\hat{t}_i(\hat{x}_i^*) = \sum_{j=1}^{q_i} \left[c_i^j + d_i^j \hat{x}_i^*\right] \delta I_i^j \begin{cases} = \sum\limits_{j=1}^{m} \widehat{\omega}_j^* a_{ji}, & \text{если } \hat{x}_i^* > 0, \\ \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \widehat{\omega}_j^* a_{ji}, & \text{если } \hat{x}_i^* = 0, \end{cases} \qquad i = \overline{1,n},$$

откуда для $i = \overline{1,n}$ можно выразить $\hat{x}_i^*$ через $\widehat{\omega}_j^*$, $j = \overline{1,m}$:

$$\hat{x}_i^* = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{q_i} \left[\frac{\sum_{j=1}^{m} \widehat{\omega}_j^* a_{ji} - c_i^j}{d_i^j}\right] \delta I_i^j, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{q_i} c_i^j \delta I_i^j \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \widehat{\omega}_j^* a_{ji}, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{q_i} c_i^j \delta I_i^j > \sum\limits_{j=1}^{m} \widehat{\omega}_j^* a_{ji}, \end{cases} \tag{20}$$

Функции $\int\limits_0^{x_i} \hat{t}_i(u)\, du$ для любого $i = \overline{1,n}$ выпуклы, а следовательно, условия Куна — Таккера являются необходимыми и достаточными. Таким образом, можно утверждать, что $\hat{\mathbf{x}}^*$ будет решением оптимизационной задачи (17)–(19) тогда и только тогда, когда существует $\widehat{\omega}^*$ такое, что $\hat{\mathbf{x}}^*$ и $\widehat{\omega}^*$ удовлетворяют соотношениям (14) и (20).

III. Предположим, что $\hat{\mathbf{x}}^*$ и $\widehat{\omega}^*$ определены. В таком случае каждому $\hat{x}_i^*$, $i = \overline{1,n}$, соответствует фиксированный интервал $I_i^{j_i{}^*}$ и коэффициенты $c_i^{j_i{}^*}$ и $d_i^{j_i{}^*}$ соответственно. Введём дополнительные обозначения:

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1^{j_1{}^*}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{d_k^{j_k{}^*}} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_k = \begin{pmatrix} c_1^{j_1{}^*} \\ \vdots \\ c_k^{j_k{}^*} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{n-k} = \begin{pmatrix} c_{k+1}^{j_{k+1}{}^*} \\ \vdots \\ c_n^{j_n{}^*} \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности будем считать, что столбцы матрицы $\mathbf{A}$ перенумерованы так, что покомпонентно имеют место следующие соотношения:

$$\Sigma_k \leqslant \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} \widehat{\omega}^*, \tag{21}$$

$$\Sigma_{n-k} > \mathbf{A}_{n-k}^{\mathrm{T}} \widehat{\omega}^*, \tag{22}$$

а значит, согласно (20) справедливо

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{x}}_k^* = \Delta_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} \widehat{\omega}^* - \Delta_k \Sigma_k,\\ \hat{\mathbf{x}}_{n-k}^* = \mathbb{O}.\end{gathered} \tag{23}$$

В таком случае, подставляя выражение (23) в (18), получаем

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^* = \mathbf{A}_k \Delta_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} \widehat{\omega}^* - \mathbf{A}_k \Delta_k \Sigma_k = \mathbf{b}. \tag{24}$$

Матрица Δ_k диагональна и $\operatorname{rank}(\Delta_k) = k$. Тогда если $\operatorname{rank}(\mathbf{A}_k) = m$, то $k \geqslant m$ и ранг произведения $\mathbf{A}_k \Delta_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}$ равен m (см. [1]). При этом порядок матрицы $\mathbf{A}_k \Delta_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}$ также равен m. Следовательно, существует обратная к $\mathbf{A}_k \Delta_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}$ матрица и из (24) получаем

$$\widehat{\omega}^* = \left(\mathbf{A}_k \Delta_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{A}_k \Delta_k \Sigma_k). \tag{25}$$

Подставляя (25) в (23), приходим к уравнениям связи между $\hat{\mathbf{x}}^*$ и соответствующими $c_i^{j^*}$, $d_i^{j^*}$ из интервала $I_i^{j_i*}$:

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{x}}_k^* = \Delta_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{A}_k \Delta_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{A}_k \Delta_k \Sigma_k) - \Delta_k \Sigma_k,\\ \hat{\mathbf{x}}_{n-k}^* = \mathbb{O}\end{gathered} \tag{26}$$

при условиях, получаемых из (21) и (22) (при подстановке (25)):

$$\Sigma_k \leqslant \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{A}_k \Delta_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{A}_k \Delta_k \Sigma_k), \tag{27}$$

$$\Sigma_{n-k} > \mathbf{A}_{n-k}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{A}_k \Delta_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{A}_k \Delta_k \Sigma_k). \tag{28}$$

Таким образом, решение оптимизационной задачи (17)–(19) с кусочно-линейными функциями выражается соотношением (26) при условии, что $(\hat{x}_1^*, \ldots, \hat{x}_n^*)$ и столбцы матрицы $\mathbf{A}$ перенумерованы согласно (27), (28).

IV. Кусочно-линейные функции $\hat{t}_i(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, заданы так, что $|\hat{t}_i(x_i) - t_i(x_i)| < \varepsilon$ при $x_i \geqslant 0$ и, следовательно, $\left|c_i^j + d_i^j x_i - t_i(x_i)\right| < \varepsilon$ для всех $x_i \in I_i^j$, $j = \overline{1,q_i}$, $i = \overline{1,n}$. При этом для всех $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,q_i}$ в граничных точках интервала $I_i^j = \left[\dot{x}_i^j; \ddot{x}_i^j\right]$ значение кусочно-линейной функции $\hat{t}_i(x_i)$ полностью совпадает со значением функции $t_i(x_i)$ (в силу определения кусочно-линейной функции):

$$\begin{cases} c_i^j + d_i^j \dot{x}_i^j = t_i\left(\dot{x}_i^j\right),\\ c_i^j + d_i^j \ddot{x}_i^j = t_i\left(\ddot{x}_i^j\right),\end{cases} \qquad j = \overline{1,q_i},\ i = \overline{1,n},$$

откуда получаем

$$d_i^j = \frac{t_i(\ddot{x}_i^j) - t_i(\dot{x}_i^j)}{\ddot{x}_i^j - \dot{x}_i^j}, \quad j = \overline{1, q_i},\ i = \overline{1, n}, \tag{29}$$

$$c_i^j = t_i(\ddot{x}_i^j) - \frac{t_i(\ddot{x}_i^j) - t_i(\dot{x}_i^j)}{\ddot{x}_i^j - \dot{x}_i^j}\ddot{x}_i^j, \quad j = \overline{1, q_i},\ i = \overline{1, n}. \tag{30}$$

При $\varepsilon \to 0$ границы интервала I_i^j, $j = \overline{1, q_i}$, $i = \overline{1, n}$, стремятся к точке $\tilde{x}_i^j = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left[\dot{x}_i^j; \ddot{x}_i^j\right]$, а для выражений (29) и (30) имеют место следующие пределы:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} d_i^j = \frac{dt_i(\tilde{x}_i^j)}{dx_i}, \quad j = \overline{1, q_i},\ i = \overline{1, n}, \tag{31}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c_i^j = t_i(\tilde{x}_i^j) - \frac{dt_i(\tilde{x}_i^j)}{dx_i}\tilde{x}_i^j, \quad j = \overline{1, q_i},\ i = \overline{1, n}. \tag{32}$$

В п. III было доказано, что решение оптимизационной задачи (17)–(19) с кусочно-линейными функциями выражается соотношением (26). При этом данное утверждение справедливо в случаях кусочно-линейных функций, приближающих исходные функции $t_i(x_i)$, $i = \overline{1, n}$, со сколь угодно большой точностью. Таким образом, в силу гладкости функций $t_i(x_i)$, $i = \overline{1, n}$, при $\varepsilon \to 0$ согласно выражениям (31) и (32) соотношение (26) примет вид (10), а выражения (27), (28) — вид (11), (12) соответственно. Теорема 1 доказана.

Замечание 5. При $\varepsilon \to 0$ в выражениях (29) и (30) соотношения (15) и (16) в силу (25) примут вид

$$\mathbf{t}_k(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}_k \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{A}_k \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*)), \tag{33}$$
$$\mathbf{t}_{n-k}(\mathbf{x}_{n-k}^*) \geqslant \mathbf{A}_{n-k}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}_k \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{A}_k \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*)).$$

Следствие 1. *Пусть $\mathbf{x}^*$ — оптимальное решение задачи (7)–(9) в случае линейных функций $t_i(x_i) = c_i + d_i x_i$, $c_i \geqslant 0$, $d_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Существует число $k \leqslant n$, набор из k компонент вектора $\mathbf{x}$ и соответствующий ему набор из k столбцов матрицы $\mathbf{A}$ (без ограничения общности полагаем, что указанные компоненты и столбцы имеют номера $1, \ldots, k$) такие, что*

$$\begin{gathered} \mathbf{x}_k^* = \mathbf{G}_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}_k \mathbf{G}_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{A}_k \mathbf{G}_k \mathbf{D}_k) - \mathbf{G}_k \mathbf{D}_k, \\ \mathbf{x}_{n-k}^* = \mathbb{O}_{n-k,1}, \end{gathered} \tag{34}$$

если $\mathrm{rank}(\mathbf{A}_k) = m$ *и выполняются условия*

$$\mathbf{D}_k \leqslant \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} \big(\mathbf{A}_k \mathbf{G}_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{A}_k \mathbf{G}_k \mathbf{D}_k), \tag{35}$$

$$\mathbf{D}_{n-k} > \mathbf{A}_{n-k}^{\mathrm{T}} \big(\mathbf{A}_k \mathbf{G}_k \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{A}_k \mathbf{G}_k \mathbf{D}_k), \tag{36}$$

где

$$\mathbf{G}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_k} \end{pmatrix}_{k \times k}, \quad \mathbf{D}_k = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{n-k} = \begin{pmatrix} c_{k+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в случае линейных функций $t_i(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, решение оптимизационной задачи (7)–(9) может быть получено в явном виде (34) при условиях (35), (36).

Пример 6. Рассмотрим следующую задачу условной оптимизации:

$$\min_x \left(x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{3}{2} x_3^2 + x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5 \right) \tag{37}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \end{cases} \tag{38}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0. \tag{39}$$

Для задачи (37)–(39) имеем

$$\mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}, \ \mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 \end{pmatrix},$$

откуда получаем

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_3 \leqslant \mathbf{A}_3^{\mathrm{T}} \big(\mathbf{A}_3 \mathbf{G}_3 \mathbf{A}_3^{\mathrm{T}}\big)^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{A}_3 \mathbf{G}_3 \mathbf{D}_3) = \begin{pmatrix} 7,812 \\ 3,198 \\ 4,98 \end{pmatrix},$$

а значит, согласно (35) все компоненты оптимального решения задачи (37)–(39) отличны от нуля. В таком случае формула (34) позволяет найти решение оптимизационной задачи (37)–(39):

$$\mathbf{x}_3^* = \mathbf{G}_3 \mathbf{A}_3^{\mathrm{T}} \big(\mathbf{A}_3 \mathbf{G}_3 \mathbf{A}_3^{\mathrm{T}}\big)^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{A}_3 \mathbf{G}_3 \mathbf{D}_3) - \mathbf{G}_3 \mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} 2,67 \\ 1,33 \\ 1,67 \end{pmatrix}.$$

2. Оценка сходимости полученного метода простой итерации

Теорема 1 говорит об эквивалентности оптимизационной задачи (7)–(9) и задачи поиска неподвижной точки (10). Таким образом, поиск решения задачи (7)–(9) может быть реализован в виде следующего процесса простой итерации:

$$\begin{gathered}\mathbf{x}_k^{q+1} = \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\big(\mathbf{b}+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{D}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big)\\ -\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{D}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big),\\ \mathbf{x}_{n-k}^{q+1} = \mathbb{O},\end{gathered} \tag{40}$$

причём на каждом шаге компоненты $\mathbf{x}^{q+1}$, $\mathfrak{t}(\mathbf{x}^q) = \big(t_1\big(x_1^q\big),\dots,t_n\big(x_n^q\big)\big)^{\mathrm{T}}$ и столбцы матрицы $\mathbf{A}$ перенумерованы так, что

$$\begin{gathered}\mathbf{D}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big) \leqslant \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\big(\mathbf{b}+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{D}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big),\\ \mathbf{D}_{n-k}\big(\mathbf{x}_{n-k}^q\big) > \mathbf{A}_{n-k}^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\big(\mathbf{b}+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{D}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big).\end{gathered}$$

Теорема 2. *При любом выборе начального приближения* $\mathbf{x}^0$ *из множества, заданного* (8) *и* (9), *последовательность* $\{\mathbf{x}^q\}$ *итерационного процесса* (40) *не выходит из этого множества и имеет место сходимость этой последовательности со скоростью геометрической прогрессии.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^*$ — оптимальное решение задачи (7)–(9). Рассмотрим разность $\mathbf{x}^{q+1}-\mathbf{x}^*$. Для удобства обозначим

$$\mathbf{Y}_k^q\big(\mathbf{x}_k^q\big) = \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\big(\mathbf{b}+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{D}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big),$$

в таком случае разность $\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^*$ примет вид

$$\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^* = \mathbf{Y}_k^q\big(\mathbf{x}_k^q\big)-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{D}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)-\mathbf{x}_k^*. \tag{41}$$

Заметим, что

$$\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{D}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big) = \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)-\mathbf{x}_k^q,$$

а значит, выражение (41) эквивалентно следующему:

$$\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^* = \big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big)-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)+\mathbf{Y}_k^q\big(\mathbf{x}_k^q\big). \tag{42}$$

Рассмотрим произведение $\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)$:

$$\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big) = \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)-\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^*\big)\big)+\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^*\big), \tag{43}$$

где

$$\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)-\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^*\big)\big)=\begin{pmatrix}\frac{t_1(x_1^q)-t_1(x_1^*)}{t_1'(x_1^q)}\\ \frac{t_2(x_2^q)-t_2(x_2^*)}{t_2'(x_2^q)}\\ \vdots\\ \frac{t_k(x_k^q)-t_k(x_k^*)}{t_k'(x_k^q)}\end{pmatrix}. \tag{44}$$

Применим покомпонентно к (44) формулу конечных приращений (теорема Лагранжа о среднем значении):

$$\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)-\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*)\big)=\begin{pmatrix}\frac{t_1'(\theta_1^q)}{t_1'(x_1^q)}\big(x_1^q-x_1^*\big)\\ \frac{t_2'(\theta_2^q)}{t_2'(x_2^q)}\big(x_2^q-x_2^*\big)\\ \vdots\\ \frac{t_k'(\theta_k^q)}{t_k'(x_k^q)}\big(x_k^q-x_k^*\big)\end{pmatrix}$$
$$=\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big), \tag{45}$$

где $\theta_i^q\in\big[x_i^q,x_i^*\big]$, если $x_i^q\leqslant x_i^*$, или $\theta_i^q\in\big[x_i^*,x_i^q\big]$, если $x_i^*\leqslant x_i^q$, $i=\overline{1,k}$, а $\mathbf{\Theta}_k^q=\big(\theta_1^q,\dots,\theta_k^q\big)^{\mathrm{T}}$.

Подставляя (43) в (42), с учётом (45) получаем

$$\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^*=\big(\mathbf{E}_k-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\big)\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big)$$
$$-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*)+\mathbf{Y}_k^q\big(\mathbf{x}_k^q\big), \tag{46}$$

где $\mathbf{E}_k$ — единичная матрица размерности k.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathbf{b}+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{D}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)&=\mathbf{A}_k\mathbf{x}_k^*+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)-\mathbf{A}_k\mathbf{x}_k^q\\ &=-\mathbf{A}_k\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big)+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)-\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*)\big)+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*)\\ &=-\mathbf{A}_k\big(\mathbf{E}_k-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\big)\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big)+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*).\end{aligned}$$

В таком случае получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_k^q\big(\mathbf{x}_k^q\big)=&-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k\\ &\times\big(\mathbf{E}_k-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\big)\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big)\\ &+\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*).\end{aligned} \tag{47}$$

Рассмотрим второе слагаемое из правой части (47) отдельно, подставив вместо $\mathbf{t}_k(\mathbf{x}_k^*)$ выражение из (33):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{t}_k(\mathbf{x}_k^*)\\
&\qquad= \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\\
&\qquad\times \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}(\mathbf{b}+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*))\\
&\qquad= \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big[\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big]\\
&\qquad\times \big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}(\mathbf{b}+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*)) =\\
&\qquad= \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big[\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}(\mathbf{b}+\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*))\big]\\
&\qquad= \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{t}_k(\mathbf{x}_k^*),
\end{aligned}$$

а значит, $\mathbf{Y}_k^q\big(\mathbf{x}_k^q\big)$ примет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_k^q\big(\mathbf{x}_k^q\big) &= -\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k\\
&\times\Big(\mathbf{E}_k-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\Big)\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big)+\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{t}_k(\mathbf{x}_k^*).
\end{aligned}$$

Окончательно из (46) получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^* &= \Big(\mathbf{E}_k-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\Big)\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big)\\
&- \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{t}_k(\mathbf{x}_k^*)-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k\\
&\times\Big(\mathbf{E}_k-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\Big)\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big)+\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{t}_k(\mathbf{x}_k^*),
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^* &= \Big(\mathbf{E}_k-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\Big)\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big)\\
&- \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k\\
&\times\Big(\mathbf{E}_k-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\Big)\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big). \qquad (48)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\mathbf{U}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)=\mathbf{E}_k-\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1},$$

$$\mathbf{\Gamma}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)=\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k,$$

тогда (48) примет вид

$$\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^*=\mathbf{U}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big)-\mathbf{\Gamma}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{U}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big(\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\big).$$

В таком случае получаем оценку (покомпонентно)

$$\left|\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^*\right| \leqslant \left|\mathbf{U}_k\left(\mathbf{x}_k^q\right)\right|\left|\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\right| + \left|\mathbf{\Gamma}_k\left(\mathbf{x}_k^q\right)\right|\left|\mathbf{U}_k\left(\mathbf{x}_k^q\right)\right|\left|\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\right|,$$

следовательно,

$$\left|\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^*\right| \leqslant \left(\mathbf{E}_k + \left|\mathbf{\Gamma}_k\left(\mathbf{x}_k^q\right)\right|\right)\left|\mathbf{U}_k\left(\mathbf{x}_k^q\right)\right|\left|\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\right|. \tag{49}$$

В силу конечности всех элементов матрицы $\mathbf{A}_k$ и того, что

$$\mathbf{A}_k\mathbf{\Gamma}_k\left(\mathbf{x}_k^q\right) = \mathbf{A}_k,$$

существует некоторая матрица $\mathbf{M}_k$ такая, что $\left|\mathbf{\Gamma}_k\left(\mathbf{x}_k^q\right)\right| \leqslant \mathbf{M}_k$ для любого $\mathbf{x}_k^q$ из области определения (здесь и далее под модулем вектора или матрицы будем понимать покомпонентное взятие модуля).

Таким образом, неравенство (49) примет вид

$$\left|\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^*\right| \leqslant \left(\mathbf{E}_k + \mathbf{M}_k\right)\left|\mathbf{U}_k\left(\mathbf{x}_k^q\right)\right|\left|\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\right|,$$

где $\mathbf{E}_k+\mathbf{M}_k$ — квадратная матрица с конечными положительными фиксированными элементами, откуда следует, что

$$\left\|\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^*\right\| \leqslant \left\|\mathbf{E}_k + \mathbf{M}_k\right\| \cdot \left\|\mathbf{U}_k\left(\mathbf{x}_k^q\right)\right\| \cdot \left\|\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\right\|. \tag{50}$$

При $\mathbf{x}_k^q \to \mathbf{x}_k^*$ имеем $\left\|\mathbf{U}_k\left(\mathbf{x}_k^q\right)\right\| \to 0$, т. е.

$$\forall\varepsilon:\ \ 0<\varepsilon<1\ \ \exists\rho:\ \ \left\|\mathbf{E}_k + \mathbf{M}_k\right\| \cdot \left\|\mathbf{U}_k\left(\mathbf{x}_k^q\right)\right\| \leqslant \varepsilon < 1 \quad \text{при } \mathbf{x}_k^q \in S_\rho(\mathbf{x}_k^*),$$

где $S_\rho(\mathbf{x}_k^*) = \{\mathbf{x}_k \mid \|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_k^*\| \leqslant \rho\}$. Таким образом, из принадлежности $\mathbf{x}_k^q \in S_\rho(\mathbf{x}_k^*)$ и неравенства (50) вытекает, что

$$\left\|\mathbf{x}_k^{q+1}-\mathbf{x}_k^*\right\| \leqslant \varepsilon\left\|\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\right\| \leqslant \varepsilon\rho < \rho,$$

а значит, $\mathbf{x}_k^{q+1} \in S_\rho(\mathbf{x}_k^*)$. Тем самым если $\mathbf{x}_k^0 \in S_\rho(\mathbf{x}_k^*)$, то $\left\{\mathbf{x}_k^q\right\} \in S_\rho(\mathbf{x}_k^*)$ и имеет место оценка

$$\left\|\mathbf{x}_k^q-\mathbf{x}_k^*\right\| \leqslant \varepsilon^q\left\|\mathbf{x}_k^0-\mathbf{x}_k^*\right\|,$$

откуда и следует сходимость последовательности $\{\mathbf{x}_k^q\}$, причём со скоростью геометрической прогрессии. Теорема 2 доказана.

Заметим, что теорема 2 справедлива для случая гладких функций $t_i(\cdot)$, $i=\overline{1,n}$. Однако если эти функции дважды непрерывно дифференцируемы, то справедлива

Теорема 3. *Пусть на множестве, заданном соотношениями* (8) *и* (9), *функции* $t_i(\cdot) \in C^2(\mathfrak{R}^1_+)$, $i = \overline{1,n}$, *удовлетворяют условиям*

$$|t_i'(x)| \geqslant \alpha_i > 0, \quad |t_i''(x)| \leqslant \beta_i < \infty. \tag{51}$$

Тогда при любом выборе начального приближения $\mathbf{x}^0$ *из множества, заданного* (8) *и* (9), *последовательность* $\{\mathbf{x}^q\}$ *итерационного процесса* (40) *не выходит из этого множества и имеет место квадратичная сходимость данной последовательности.*

Доказательство. Для удобства изложения доказательства разделим его на три части.

I. Если $t_i(\cdot) \in C^2(\mathfrak{R}^1_+)$ для всех $i = \overline{1,n}$, то $t_i(\cdot) \in C^2(\mathfrak{R}^1_+)$ для $i = \overline{1,k}$, а значит, согласно формуле Тейлора имеет место разложение

$$t_i(x_i^*) = t_i\big(x_i^q\big) + t_i'\big(x_i^q\big)\big(x_i^* - x_i^q\big) + \frac{1}{2}t_i''\big(\theta_i^q\big)\big(x_i^* - x_i^q\big)^2, \;\; i = \overline{1,k},$$

где $\theta_i^q \in \big[x_i^q, x_i^*\big]$, если $x_i^q \leqslant x_i^*$, и $\theta_i^q \in \big[x_i^*, x_i^q\big]$, если $x_i^* \leqslant x_i^q$, или в матричном виде:

$$\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*) = \mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big) + \big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big) + \frac{1}{2}\big(\mathbf{G}_k'\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big)^2, \tag{52}$$

где ради удобства последующих построений под $\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big)^2$ будем понимать покомпонентное возведение в квадрат вектора $\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q$.

Выразим $\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)$ из (42) следующим образом:

$$\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big) + \big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^{q+1} - \mathbf{x}_k^q\big) = \big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big)^{-1}\mathbf{Y}_k^q\big(\mathbf{x}_k^q\big),$$

и сложим полученное выражение с (52):

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*) &+ \big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^{q+1} - \mathbf{x}_k^*\big) \\ &= \big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big)^{-1}\mathbf{Y}_k^q\big(\mathbf{x}_k^q\big) + \frac{1}{2}\big(\mathbf{G}_k'\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big)^2.\end{aligned} \tag{53}$$

II. Выразим $\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)$ из (52):

$$\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big) = \mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*) - \big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big) - \frac{1}{2}\big(\mathbf{G}_k'\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big)^2,$$

и, учитывая равенство (33), получим

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big) &= \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*)) \\ &\quad - \big(\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big) - \frac{1}{2}\big(\mathbf{G}_k'\big(\mathbf{\Theta}_k^q\big)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big)^2.\end{aligned}$$

Подставим полученное выражение $\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^q)$ в выражение для $\mathbf{Y}_k^q(\mathbf{x}_k^q)$:

$$\mathbf{Y}_k^q(\mathbf{x}_k^q) = \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{x}_k^* + \mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^q) - \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k^q\big).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_k^q(\mathbf{x}_k^q) &= \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1} \\ &\times \Bigg[\mathbf{A}_k\mathbf{x}_k^* + \mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\Bigg\{\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*)) \\ &\quad - \big(\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big)^{-1}(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q) - \frac{1}{2}\big(\mathbf{G}_k'(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q)^2\Bigg\} - \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k^q\Bigg],\end{aligned}$$

или после раскрытия скобок

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_k^q(\mathbf{x}_k^q) &= \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\Bigg[\mathbf{A}_k(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q) \\ &\quad + \mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*)) \\ &\quad - \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q) - \frac{1}{2}\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big(\mathbf{G}_k'(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q)^2\Bigg],\end{aligned}$$

что, в свою очередь, приводит к следующему:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_k^q(\mathbf{x}_k^q) &= \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1} \\ &\times \Bigg[\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*)) \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big(\mathbf{G}_k'(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q)^2\Bigg],\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_k^q(\mathbf{x}_k^q) &= \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^*)\mathbf{D}_k(\mathbf{x}_k^*)) \\ &- \frac{1}{2}\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big(\mathbf{G}_k'(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q)^2,\end{aligned}$$

откуда с учётом (33) окончательно получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_k^q(\mathbf{x}_k^q) &= \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*) - \frac{1}{2}\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k \\ &\times \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big(\mathbf{G}_k'(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q)^2. \qquad (54)\end{aligned}$$

III. Подставив (54) в (53), приходим к выражению

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*) + \big(\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^{q+1} - \mathbf{x}_k^*\big) \\ = \mathfrak{t}_k(\mathbf{x}_k^*) + \frac{1}{2}\big(\mathbf{G}'_k(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big)^2 \\ - \frac{1}{2}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big(\mathbf{G}'_k(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big)^2,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^{q+1} - \mathbf{x}_k^* = \frac{1}{2}\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big(\mathbf{G}'_k(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big)^2 \\ - \frac{1}{2}\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k \\ \times \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big(\mathbf{G}'_k(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}\big(\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big)^2. \quad (55)\end{aligned}$$

Таким образом, в силу (55) получаем оценку

$$\begin{aligned}\big|\mathbf{x}_k^{q+1} - \mathbf{x}_k^*\big| \leqslant \frac{1}{2}\big|\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big(\mathbf{G}'_k(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}\big|\big|\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big|^2 \\ + \frac{1}{2}\big|\mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{x}_k^q)\big|\big|\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big(\mathbf{G}'_k(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}\big|\big|\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big|^2\end{aligned}$$

и окончательно имеем

$$\big|\mathbf{x}_k^{q+1} - \mathbf{x}_k^*\big| \leqslant \frac{1}{2}\big(\mathbf{E}_k + \mathbf{M}_k\big)\big|\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big(\mathbf{G}'_k(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}\big|\big|\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big|^2. \quad (56)$$

Заметим, что $\big|\mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k^q)\big(\mathbf{G}'_k(\mathbf{\Theta}_k^q)\big)^{-1}\big|$ — это матрица, на главной диагонали которой стоят отношения $\Big|\frac{g_i''(x_i^q)}{g_i'(\Theta_i^q)}\Big|$, а недиагональные элементы равны нулю. Таким образом, с учётом выполнения (51) в некоторой окрестности $\mathbf{x}^*$ из (56) следует, что

$$\big|\mathbf{x}_k^{q+1} - \mathbf{x}_k^*\big| \leqslant \frac{1}{2}\big(\mathbf{E}_k + \mathbf{M}_k\big)\mathbf{\Omega}_k\mathbf{\Delta}_k^{-1}\big|\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k^q\big|^2, \quad (57)$$

где $\mathbf{\Delta}_k$ и $\mathbf{\Omega}_k$ — квадратные матрицы порядка k, на главных диагоналях которых стоят α_i и β_i соответственно, а недиагональные элементы равны нулю.

Таким образом, согласно (57) по определению имеет место квадратичная сходимость последовательности $\{\mathbf{x}^q\}$ итерационного процесса (40) при любом выборе $\mathbf{x}^0$ из множества, заданного (8) и (9). Теорема 3 доказана.

Замечание 6. Если учесть, что

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k^q, \quad \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{D}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big) = \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big) - \mathbf{x}_k^q,$$

то итерационный процесс (40) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{x}_k^{q+1} = \mathbf{x}_k^q - \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big[\mathbf{E}_k - \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big(\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\big)^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\big]\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big), \\ \mathbf{x}_{n-k}^{q+1} = \mathbb{O}.\end{gathered} \tag{58}$$

Заметим, что выражение, стоящее в квадратных скобках, является обобщённой проектирующей матрицей. Таким образом, получен явный вид проектирующего оператора для задачи (7)–(9).

Более того, из доказательства теорем 2 и 3 о сходимости следует, что полученный оператор является сжимающим. Тем самым если в качестве начального решения взять любое допустимое решение системы линейных ограничений, то итерационный процесс гарантированно сойдётся.

Замечание 7. Итерационный процесс (40) может быть переписан в следующем виде:

$$\mathbf{x}_k^{q+1} = \mathbf{x}_k^q - \mathbf{G}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big)\mathfrak{t}_k\big(\mathbf{x}_k^q\big) + \mathbf{Y}_k^q\big(\mathbf{x}_k^q\big),$$

или покомпонентно:

$$x_i^{q+1} = x_i^q - \frac{t_i\big(x_i^q\big)}{t_i'\big(x_i^q\big)} + y_i^q\big(x_1^q, \ldots, x_k^q\big).$$

Таким образом, на каждом новом шаге итерационного процесса оптимизационная задача (7)–(9) «решается» для случая линейных функций в целевом функционале. При этом данные линейные функции соответствуют касательным, проведённым к исходным функциям $\int\limits_0^{x_i} t_i(u)\,du$, $i = \overline{1, k}$, в точках значений оптимального решения, полученных на предшествующем шаге.

Теоремы 2 и 3 позволяют утверждать, что итерационный процесс (40) при любом допустимом решении задачи (7)–(9), выбранном в качестве $\mathbf{x}^0$, сходится к $\mathbf{x}^*$, причём при достаточно естественных требованиях к целевой функции имеет место квадратичная сходимость. Отметим, что если задачу (7)–(9) сформулировать в виде вариационных неравенств, то для их решения может быть эффективно использован полученный в явном виде проектирующий оператор (58). Стало быть, полученные результаты также вносят вклад в развитие проекционных методов решения вариационных неравенств.

3. Распределение потока в сети с одной парой исток — сток

Важной областью практического применения полученных результатов является задача распределения потока в сети с одной парой исток — сток. Настоящий раздел посвящён данному вопросу.

Рассмотрим сеть, представленную связным ориентированным графом $G = (P, N)$, имеющим один исток и один сток, а также $n = |N|$ дуг. Совокупный поток между истоком и стоком будем обозначать через F, а распределение F по дугам — через $x_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$. Время перемещения потока по дуге будем описывать гладкой неубывающей функцией на множестве неотрицательных вещественных чисел: $t_i \in C^1(R^+)$, $t_i(x) - t_i(y) \geqslant 0$ при $x - y \geqslant 0$ для любых $x, y \in R^+$, $i = \overline{1,n}$, где R^+ — множество неотрицательных вещественных чисел. Более того, считаем, что $t_i(x) \geqslant 0$ для любого $x \geqslant 0$ и $\partial t_i(x)/\partial x > 0$ для любого $x > 0$, $i = \overline{1,n}$, а также что $\int\limits_0^{x_i} t_i(u)\,du$ — выпуклая функция на R^+. Функция $t_i(x_i)$ называется *задержкой* или *стоимостью* при перемещении по дуге i, $i = \overline{1,n}$. Также введём $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{x} = x^{\mathrm{T}}$.

Конкурентным равновесием Вардропа (user equilibrium of Wardrop) в сети с одной парой исток — сток называется такое распределение $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ потока F по имеющимся дугам, что время передвижения из истока в сток одинаково по каждому используемому маршруту и меньше времени свободного движения по неиспользуемым маршрутам [5, 10]. Доказано, что задача поиска конкурентного равновесия в сети с одной парой исток — сток может быть сформулирована в виде оптимизационной задачи двумя эквивалентными способами [8]. В случае сети с одной парой исток — сток имеет место следующая оптимизационная задача для поиска конкурентного равновесия:

$$\mathfrak{T}(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{x_i} t_i(u)\,du \tag{59}$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in V_p} x_j - \sum_{k \in W_p} x_k = b_p, \quad p \in P, \tag{60}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{61}$$

где V_p — множество дуг, входящих в узел p, W_p — множество дуг, выходящих из узла p и

$$b_p = \begin{cases} -F, & \text{если узел } p \text{ является истоком,} \\ F, & \text{если узел } p \text{ является стоком,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{62}$$

Рассмотрим матрицу $\widetilde{\mathbf{A}}$ и вектор $\tilde{\mathbf{b}}$

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{A}}_{\tau\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\tau 1} & a_{\tau 2} & \dots & a_{\tau n} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}_{\tau\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\tau \end{pmatrix}$$

такие, что

$$a_{lk} = \begin{cases} +1, & \text{если дуга } k \in N \text{ входит в узел } l \in P, \\ -1, & \text{если дуга } k \in N \text{ выходит из узла } l \in P, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

а b_p определяется согласно (62) для любого $p \in P$ и $\tau = |P|$. В таком случае задача (59)–(61) может быть сформулирована в виде

$$\mathfrak{T}(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x}} \mathfrak{T}(\mathbf{x}) \tag{63}$$

при ограничениях

$$\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}, \tag{64}$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbb{O}. \tag{65}$$

Матрица $\widetilde{\mathbf{A}}$ является матрицей инцидентности связного графа G, а значит, $\operatorname{rank}(\widetilde{\mathbf{A}}) = m = \tau - 1$ [4, теорема 6.2]. Таким образом, уравнения связи (64) гарантированно являются линейно зависимыми. Выделим m линейно независимых строк расширенной матрицы $(\widetilde{\mathbf{A}} \,|\, \tilde{\mathbf{b}})$ и составим из них матрицу $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$, где $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{m\times 1}$. В таком случае с формальной точки зрения задача (63)–(65) будет эквивалентна следующей:

$$\mathfrak{T}(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x}} \mathfrak{T}(\mathbf{x})$$

при ограничениях

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbb{O},$$

где строки матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимы, т. е. $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = m < n$.

Таким образом, изложенный в данной статье метод применим к решению задачи (59)–(61), т. е. к нахождению конкурентного равновесия Вардропа в сети с одной парой исток — сток. Действительно, теорема 1 говорит об эквивалентности задачи поиска конкурентного равновесия и задачи поиска неподвижной точки для сети с одной парой исток — сток. В свою очередь, благодаря возможности представления задачи поиска конкурентного равновесия (59)–(61) в виде (10) нахождение равновесного распределения потоков в сети с одной парой исток — сток может быть реализовано в виде процесса простой итерации, имеющего квадратичную скорость сходимости при достаточно естественных условиях на функции задержки.

Отметим, что, как следует из доказательств теорем 2 и 3, при практической реализации данного подхода потребуется знание множества используемых дуг транспортной сети, иначе придётся решать ряд комбинаторных задач по их перенумерованию. Однако задача поиска конкурентного равновесия может быть также сформулирована в виде вариационных неравенств [9], а как было отмечено ранее, соответствующие вариационные неравенства могут быть эффективно решены благодаря полученному в явном виде проектирующему оператору (58).

4. Заключение

Основным результатом данной работы является разработка нового метода решения задачи условной оптимизации специального вида. Метод, в частности, будет полезен при решении задачи распределения потока в сети произвольной топологии с одной парой исток — сток. Содержательно метод заключается в представлении задачи минимизации сепарабельной целевой функции в виде задачи поиска неподвижной точки, которая в силу своего вида позволяет запускать процедуру простой итерации. Доказано, что полученный итерационный процесс обладает высокой скоростью сходимости. Более того, даны практические рекомендации по использованию полученных теоретических результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
2. **Коннов И. В.** Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2013. 508 с.
3. **Крылатов А. Ю.** Распределение потока в сети как задача поиска неподвижной точки // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 2. С. 63–87.

4. **Свами М., Тхуласираман К.** Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984. 454 с.
5. **Beckmann M. J., McGuire C. B., Winsten C. B.** Studies in the economics of transportation. New Haven, CT: Yale Univ. Press, 1956. 359 p.
6. **Bertsekas D. P.** Nonlinear programming. Belmont, MA: Athena Scientific, 1999.
7. **Chen R.-J., Meyer R. R.** Parallel optimization for traffic assignment // Math. Program. 1988. Vol. 42, No. 1-3. P. 327–345.
8. **Patriksson M.** A unified description of iterative algorithms for traffic equilibria // Eur. J. Oper. Res. 1993. Vol. 71, No. 2. P. 154–176.
9. **Patriksson M.** The traffic assignment problem: models and methods. Mineola, NY: Dover Publ., 2015. 240 p.
10. **Wardrop J. G.** Some theoretical aspects of road traffic research // Proc. Inst. Civil Eng. 1952. Vol. 1, No. 3. P. 325–362.

Крылатов Александр Юрьевич

Статья поступила
26 декабря 2016 г.

Исправленный вариант —
8 августа 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2018. Volume 25, No. 1. P. 75–97

UDC 519.8 DOI: 10.17377/daio.2018.25.560

REDUCTION OF A MINIMIZATION PROBLEM OF A SEPARABLE CONVEX FUNCTION UNDER LINEAR CONSTRAINTS TO A FIXED POINT PROBLEM

A. Yu. Krylatov[1,2]

[1]Saint-Petersburg State University,
7/9 Universitetskaya nab., 199034 Saint-Petersburg, Russia
[2]Solomenko Institute of Transport Problems,
13 on the 12th line of V.O., 199178 Saint-Petersburg, Russia
E-mail: a.krylatov@spbu.ru, aykrylatov@yandex.ru

Abstract. The paper is devoted to studying a constrained nonlinear optimization problem of a special kind. The objective functional of the problem is a separable convex function whose minimum is sought for on a set of linear constraints in the form of equalities. It is proved that, for this type of optimization problems, the explicit form can be obtained of a projection operator based on a generalized projection matrix. The projection operator allows us to represent the initial problem as a fixed point problem. The explicit form of the fixed point problem makes it possible to run a process of simple iteration. We prove the linear convergence of the obtained iterative method and, under rather natural additional conditions, its quadratic convergence. It is shown that an important application of the developed method is the flow assignment in a network of an arbitrary topology with one pair of source and sink. Bibliogr. 10.

Keywords: constrained nonlinear optimization, fixed point problem, generalized projection matrix, network flow assignment.

REFERENCES

1. **F. R. Gantmakher,** *Teoriya matrits* (Theory of Matrices), Nauka, Moscow, 1966 [Russian].
2. **I. V. Konnov,** *Nelineinaya optimizatsiya i variatsionnye neravenstva* (Nonlinear Optimization and Variational Inequalities), Kazan. Univ., Kazan, 2013 [Russian].
3. **A. Yu. Krylatov,** Network flow assignment as a fixed point problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **23**, No. 2, 63–87, 2016 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **10**, No. 2, 243–256, 2016.

4. **M. N. S. Swamy** and **K. Thulasiraman,** *Graphs, Networks, and Algorithms,* Wiley, New York, 1981. Translated under the title *Grafy, seti i algoritmy,* Mir, Moscow, 1984 [Russian].

5. **M. J. Beckmann, C. B. McGuire,** and **C. B. Winsten,** *Studies in the Economics of Transportation,* Yale Univ. Press, New Haven, CT, 1956.

6. **D. P. Bertsekas,** *Nonlinear Programming,* Athena Scientific, Belmont, MA, 1999.

7. **R.-J. Chen** and **R. R. Meyer,** Parallel optimization for traffic assignment, *Math. Program.,* **42**, No. 1–3, 327–345, 1988.

8. **M. Patriksson,** A unified description of iterative algorithms for traffic equilibria, *Eur. J. Oper. Res.,* **71**, No. 2, 154–176, 1993.

9. **M. Patriksson,** *The Traffic Assignment Problem: Models and Methods*, Dover Publ., Mineola, NY, 2015.

10. **J. G. Wardrop,** Some theoretical aspects of road traffic research, *Proc. Inst. Civil Eng.,* **1**, No. 3, 325–362, 1952.

Alexander Yu. Krylatov

Received
26 December 2016
Revised
8 August 2017