ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2018. Том 25, № 1. С. 42–74

УДК 519.714 DOI: 10.17377/daio.2018.25.587

# О СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ В ОДНОМ БЕСКОНЕЧНОМ БАЗИСЕ

*В. В. Кочергин*[1,a], *А. В. Михайлович*[2,b]

[1]Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия

[2]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Мясницкая, 20, 101000 Москва, Россия

*E-mail*: [a]vvkoch@yandex.ru, [b]avmikhailovich@gmail.com

**Аннотация.** Исследуется сложность реализации функций $k$-значной логики ($k \geqslant 3$) схемами из функциональных элементов в бесконечном базисе, состоящем из отрицания Поста, т. е. функции $x+1 \pmod k$, и всех монотонных функций. Под сложностью понимается общее число элементов в схеме. Для произвольной функции $f$ установлены отличающиеся друг от друга не более чем на единицу нижняя и верхняя оценки сложности вида $3\log_3(d(f)+1)+O(1)$, где $d(f)$ — максимальное (максимум берётся по всем возрастающим цепям наборов значений переменных) число изменений значений функции $f$ с большего значения на меньшее. Найдено точное значение соответствующей функции Шеннона, характеризующей сложность реализации самой сложно реализуемой функции от заданного числа переменных. Ил. 4, библиогр. 24.

**Ключевые слова:** функции многозначной логики, логическая схема, бесконечный базис, инверсионная сложность.

## Введение

Исследуется реализация функций $k$-значной логики схемами из функциональных элементов в бесконечном базисе, состоящем из отрицания Поста, т. е. функции $x+1 \pmod k$, и всех монотонных относительно порядка $0 < 1 < \dots < k-1$ функций. Определение понятия схемы из функциональных элементов (логической схемы, комбинационной схемы) и других связанных с ним понятий можно найти, например, в [8, 14].

В данной работе изучаемой мерой качества схем является сложность в её классическом варианте, когда под этим понимается общее число элементов схемы. Однако при её исследовании важную роль играет немонотонная сложность, которая может быть определена следующим образом.

Обозначим множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ через $E_k$. Пусть $P_k$ — множество всех функций $k$-значной логики, $M$ — класс всех функций из $P_k$, монотонных относительно порядка $0 < 1 < \cdots < k-1$, а $B$ — бесконечный базис, имеющий вид

$$B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}, \quad \omega_i \in P_k \setminus M,\ i = 1, \ldots, p,\ p \geqslant 1.$$

Определим *немонотонную сложность* $I_B(S)$ *схемы* $S$ *над базисом* $B$ как общее число всех немонотонных элементов схемы $S$, т. е. элементов, которым приписаны немонотонные функции базиса. В терминах сложности реализации функций в базисах с нулевыми весами (см., например, [11]) $I_B(S)$ — суммарный вес всех входящих в схему $S$ элементов базиса $B$, при этом вес всех монотонных функций базиса считается нулевым, а немонотонных — единичным.

*Немонотонную сложность функции $k$-значной логики $f$ над базисом $B$*, обозначаемую через $I_B(f)$, определим как минимальную немонотонную сложность схем, вычисляющих над базисом $B$ функцию $f$.

Относительно реализации булевых функций в базисе $B_0 = M \cup \{\bar{x}\}$ А. А. Марковым [9] установлено точное значение немонотонной сложности (называемой в этом случае инверсионной сложностью). Для аккуратной формулировки этого результата дадим необходимые определения, которые будем активно использовать в дальнейшем.

Последовательность

$$\widetilde{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}),\ \widetilde{\alpha}_2 = (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n}),\ \ldots,\ \widetilde{\alpha}_t = (\alpha_{t1}, \ldots, \alpha_{tn})$$

наборов из множества $E_k^n$ назовём *возрастающей цепью относительно порядка* $0 < 1 < \cdots < k-1$, или просто *цепью*, если все наборы $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_t$ различны и выполняются неравенства

$$\alpha_{ij} \leqslant \alpha_{i+1,j}, \quad i = 1, \ldots, t-1,\ j = 1, \ldots, n.$$

Наборы $\widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\alpha}_t$ будем называть *началом* и *концом* этой цепи соответственно.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция $k$-значной логики. Упорядоченную пару наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in E_k^n$, будем называть *обрывом для функции* $f$, если выполнены следующие условия:

1) $\alpha_j \leqslant \beta_j,\ j = 1, \ldots, n$;

2) $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$.

*Обрывом для системы функций* будем называть любую пару наборов, являющуюся обрывом хотя бы для одной функции системы.

Пусть $m \geqslant 1$, $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ — система функций $k$-значной логики от переменных $x_1, \ldots x_n$, а $C$ — цепь, имеющая вид $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_t$. Под *падением* $d_C(F)$ *системы* $F$ *на цепи* $C$ будем понимать число обрывов для системы $F$ на парах вида $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1})$.

*Спад* $d(F)$ системы $F$ определим равенством $d(F) = \max d_C(F)$, где максимум берётся по всем цепям $C$.

Теперь можно точно сформулировать основной результат работы [9]: *для любой булевой функции* $f$ *справедливо равенство*

$$I_{B_0}(f) = \lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil.$$

Отметим также работы [10, 11, 15–19, 22, 24], в которых затрагиваются различные аспекты задачи о вычислении булевых функций с использованием минимально возможного числа отрицаний.

В [6, 21] указанный классический результат А. А. Маркова обобщён на случай реализации функций $k$-значной логики ($k \geqslant 3$): установлено, что минимальное число отрицаний, достаточное для вычисления произвольной функции $k$-значной логики $f$, равно $\lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil$, если под отрицанием понимается отрицание Поста, т. е. функция $N_P(x) = x + 1 \pmod k$, и равно $\lceil \log_k(d(f) + 1) \rceil$, если под отрицанием понимается отрицание Лукасевича, т. е. функция $N_L(x) = k - 1 - x$. При $k = 2$ эти величины «схлопываются» в одну, превращая соответствующие утверждения в теорему Маркова. В терминах немонотонной сложности эти результаты могут быть сформулированы следующим образом: для любой функции $k$-значной логики $f$ справедливы равенства

$$I_{B_P}(f) = \lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil, \quad I_{B_L}(f) = \lceil \log_k(d(f) + 1) \rceil,$$

где $B_P = M \cup \{N_P\}$, $B_L = M \cup \{N_L\}$.

Если отказаться от «бесплатности» использования в схеме монотонных элементов, то задача о немонотонной сложности превращается в задачу об обычной сложности, численно равной количеству элементов в схеме. Как обычно, относительно такой меры для сложности в базисе $B$ схемы $S$ и функции $f$ будем использовать обозначения $L_B(S)$ и $L_B(f)$ соответственно.

Отличительной особенностью изучения величин $L_{B_P}(f)$ и $L_{B_L}(f)$ является бесконечность базисов $B_P$ и $B_L$.

В булевом случае сложность в бесконечных базисах исследована существенно менее полно, чем сложность в конечных базисах, однако есть достаточно много интересных и глубоких результатов, демонстрирующих, в числе прочего, существенные отличия от случая конечных базисов (см., например, [1–3, 7, 12, 13]). Исследований сложности реализации функций $k$-значной логики схемами в бесконечных базисах в литературе практически не встречается.

Из полученных в [6] результатов о немонотонной сложности функций $k$-значной логики и очевидных неравенств

$$I_{B_P}(f) \leqslant L_{B_P}(f) \leqslant 2I_{B_P}(f) + 1, \quad I_{B_L}(f) \leqslant L_{B_L}(f) \leqslant 2I_{B_L}(f) + 1,$$

справедливых для любой функции $k$-значной логики $f$, непосредственно следуют оценки

$$\lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil \leqslant L_{B_P}(f) \leqslant 2 \lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil + 1,$$
$$\lceil \log_k(d(f) + 1) \rceil \leqslant L_{B_L}(f) \leqslant 2 \lceil \log_k(d(f) + 1) \rceil + 1.$$

Достаточно естественное предположение о том, что для базиса $B_L$ значение $L_{B_L}(f)$ отличается от величины $2 \log_2(d(f) + 1)$ не более чем на небольшую константу, оказывается верным; несколько подробнее об этом сказано ниже в замечании 3.

Для базиса $B_P$ при любом $k \geqslant 3$ значение $L_{B_P}(f)$ с точностью до небольшой аддитивной константы совпадает с величиной $3 \log_3(d(f)+1)$.

Перейдём к получению соответствующих оценок.

## 1. Нижние оценки

Для конечного множества $B$ функций $k$-значной логики положим

$$D(B) = \max_{\omega \in B} d(\omega).$$

Для произвольной схемы $S$ через $F_S$ обозначим систему всех функций, реализуемых в вершинах схемы $S$, а через $d(S)$ — величину $d(F_S)$.

**Лемма 1.** *Пусть схема $S'$ над базисом $B$ получается из схемы $S$ добавлением элементов $e_1, \ldots, e_t$, на входы которых подаются либо входы схемы $S$, либо выходы каких-либо элементов схемы $S$. Тогда*

$$d(S') \leqslant (D(B)t + 1)(d(S) + 1) - 1.$$

Доказательство. Пусть на входы схем $S$ и $S'$ подаются переменные $x_1, \ldots, x_n$, а цепь $C = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r)$ наборов из $E_k^n$ удовлетворяет условию $d_C(F_{S'}) = d(S')$.

Обозначим величину $d_C(F_S)$ через $l$. Цепь $C$ можно разбить на $l + 1$ подцепей $C_1, \ldots, C_{l+1}$ так, что будут выполняться следующие условия.

1. Для каждого $i = 1, \ldots, l + 1$ найдутся такие натуральные $a$ и $b$, $1 \leqslant a < b \leqslant r$, что $C_i = (\widetilde{\alpha}_a, \widetilde{\alpha}_{a+1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_b)$.

2. При $i \neq j$ справедливо равенство $C_i \cap C_j = \varnothing$.

3. $\bigcup\limits_{i=1}^{l+1} C_i = C$.

4. Для каждого $i$, $1 \leqslant i \leqslant l+1$, верно равенство $d_{C_i}(F_S) = 0$.

Тогда для любой цепи $C_i$, $i = 1, \ldots, l+1$, и для каждой функции $f_j$, вычисляемой на выходе элемента $e_j$, $j = 1, \ldots, t$, выполняется неравенство $d_{C_i}(f_j) \leqslant D(B)$.

Таким образом, используя также соотношения $l = d_C(F_S) \leqslant d(F_S) = d(S)$, получаем

$$\begin{aligned} d(S') = d_C(F_{S'}) &\leqslant d_{C_1}(F_{S'}) + \cdots + d_{C_{l+1}}(F_{S'}) + l \\ &= d_{C_1}(\{f_1, \ldots, f_t\}) + \cdots + d_{C_{l+1}}(\{f_1, \ldots, f_t\}) + l \\ &\leqslant D(B)(l+1)t + l = (D(B)t+1)(l+1) - 1 \\ &\leqslant (D(B)t+1)(d(S)+1) - 1. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Отметим, что способ доказательства леммы 1 в частном случае $t = 1$ может быть положен в основу альтернативного доказательства (основанного на анализе той части схемы, которая примыкает не к входам схемы, а к её выходам) нижней оценки минимального числа отрицаний Поста при реализации систем функций $k$-значной логики схемами в базисе $B_P$ (лемма 1 и теорема 2 из [6]).

Для произвольного натурального $n$ положим

$$\tau(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } 3^r < n \leqslant 4 \cdot 3^{r-1} \text{ для некоторого целого } r, \\ 2, & \text{если } 4 \cdot 3^{r-1} < n \leqslant 2 \cdot 3^r \text{ для некоторого целого } r, \\ 3, & \text{если } 2 \cdot 3^r < n \leqslant 3 \cdot 3^r \text{ для некоторого целого } r. \end{cases}$$

**Лемма 2.** *Пусть набор натуральных чисел $\{n_1, \ldots, n_m\}$ для некоторого натурального $N$ удовлетворяет условию $n_1 \times \cdots \times n_m \geqslant N$. Тогда справедливо неравенство*

$$n_1 + \cdots + n_m \geqslant 3\left(\lceil \log_3 N \rceil - 1\right) + \tau(N).$$

Доказательство. Зафиксируем значение $N$. Среди всех конечных наборов натуральных чисел, произведение элементов которых не меньше $N$, отметим наборы с минимально возможным значением суммы элементов, а среди них выделим тот набор, в котором произведение элементов максимально, и обозначим его через $(n_1, \ldots, n_m)$. В силу выбора набора достаточно установить справедливость утверждения леммы для выделенного набора $(n_1, \ldots, n_m)$. Опишем некоторые свойства элементов этого набора.

1. Все элементы набора не превосходят четырёх. Действительно, если найдётся элемент $n_i$, удовлетворяющий неравенству $n_i \geqslant 5$, то, заменив в исходном наборе элемент $n_i$ двумя элементами $n_{i_1} = 2$ и $n_{i_2} = n_i - 2$, получим набор с той же самой суммой элементов, но с бо́льшим произведением; противоречие свойствам построенного набора.

2. Не более двух элементов набора равны двум (иначе замена трёх двоек двумя тройками приведёт к набору с той же суммой элементов, но с бо́льшим произведением).

3. Среди элементов набора не более одной четвёрки (иначе замена двух четвёрок двумя тройками и двойкой приведёт к набору с той же суммой элементов, но с бо́льшим произведением).

4. В наборе не могут одновременно присутствовать двойка и четвёрка (иначе замена двойки и четвёрки двумя тройками приведёт к набору с той же суммой элементов, но с бо́льшим произведением).

Таким образом, в наборе $(n_1, \ldots, n_m)$ все элементы равны трём, за исключением, быть может, одной или двух двоек или одной четвёрки.

Если $N = 1$, то утверждение леммы проверяется непосредственно. Далее считаем, что $N \geqslant 2$. Положим $r = \lfloor \log_3(N-1) \rfloor$. Тогда имеем $(N-1)/3 < 3^r \leqslant N-1$, поэтому $3^r + 1 \leqslant N < 3^{r+1} + 1$. Следовательно, верны неравенства

$$3^r < N \leqslant 3^{r+1}.$$

Отдельно рассмотрим три случая.

Случай 1°. Пусть $3^r < N \leqslant 4 \cdot 3^{r-1}$. Тогда набор $(n_1, \ldots, n_m)$ состоит из $r-1$ троек и либо одной четвёрки, либо двух двоек. Следовательно,

$$n_1 + \cdots + n_m \geqslant 3(r-1) + 4 = 3\lfloor \log_3(N-1) \rfloor + 1.$$

Случай 2°. Пусть $4 \cdot 3^{r-1} < N \leqslant 2 \cdot 3^r$. Тогда набор $(n_1, \ldots, n_m)$ состоит из $r$ троек и одной двойки. Следовательно,

$$n_1 + \cdots + n_m \geqslant 3r + 2 = 3\lfloor \log_3(N-1) \rfloor + 2.$$

Случай 3°. Пусть $2 \cdot 3^r < N \leqslant 3 \cdot 3^r$. Тогда набор $(n_1, \ldots, n_m)$ состоит из $r+1$ троек. Следовательно,

$$n_1 + \cdots + n_m \geqslant 3(r+1) = 3\lfloor \log_3(N-1) \rfloor + 3.$$

В завершение доказательства осталось воспользоваться равенством $\lfloor \log_3(N-1) \rfloor = \lceil \log_3 N \rceil - 1$. Лемма 2 доказана.

Для нижней границы из леммы 2 введём обозначение, для каждого натурального $n$ положив

$$W(n) = 3\left(\lceil \log_3 n \rceil - 1\right) + \tau(n).$$

Отметим, что величина $W(n)$ численно равна минимально возможному числу дуг в ориентированном графе, допускающем кратные дуги, но не содержащем ориентированных циклов, в котором выделены две вершины с числом ориентированных путей между ними не менее $n$ (см., например, [4, 23]).

Выпишем значения аргумента $n$, при которых функция $W(n)$ принимает значения от 1 до 11:

| $W(n)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5–6 | 7–9 | 10–12 | 13–18 | 19–27 | 28–36 | 37–54 |

Отметим некоторые факты, связанные с функцией $W(n)$, которые будут использоваться в последующих доказательствах.

**Лемма 3.** *Функция $W(n)$ обладает следующими свойствами.*

1. *Справедливы неравенства*

$$\begin{gathered} W(n) \geqslant 3\log_3 n, \quad n \geqslant 1, \\ W(n) < 3\log_3 n + 2 - 3\log_3(4/3) < 3\log_3 n + 1{,}215, \quad n \geqslant 1, \\ W(n) \leqslant W(n+1), \quad n \geqslant 1, \\ W(n) \geqslant W(n+1) - 1, \quad n \geqslant 1, \\ W(n) \geqslant W(n+2) - 1, \quad n \geqslant 4. \end{gathered}$$

2. *Равенство $W(n) = W(n+1)$ верно тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$n \notin \{3^s \mid s = 0,1,\ldots\} \cup \{2 \cdot 3^s \mid s = 0,1,\ldots\} \cup \{4 \cdot 3^s \mid s = 0,1,\ldots\}.$$

3. *Если при некотором натуральном значении $s$ выполняется условие*

$$\frac{1}{2}3^s < n < 4 \cdot 3^{s-1},$$

*то справедливо равенство*

$$W(n+1) + 2 = W(2n+1).$$

Для доказательства нижних оценок сложности в базисе $B_P$ рассмотрим вспомогательный базис

$$B'_P = M \cup \{x + i \pmod k) \mid i = 1, \ldots, k-1\}.$$

Как обычно, схему в базисе $B$, реализующую функцию или систему функций, будем называть *минимальной*, если никакая схема в базисе $B$ меньшей сложности не реализует эту функцию или систему функций.

Функциональный элемент схемы в базисе $B$ будем называть *монотонным*, если ему приписана монотонная функция из базиса, и соответственно *немонотонным*, если ему приписана немонотонная функция из базиса.

Далее будем считать, что значность $k$ рассматриваемой логики не менее 3. При доказательстве нижних оценок, как правило, этот момент дополнительно оговариваться не будет, так как при $k = 2$ устанавливаемые нижние оценки являются хоть и малоинформативными, но формально верными.

На множестве минимальных схем в базисе $B'_P$, в которых есть пара немонотонных элементов, соединённых ребром, определим следующую операцию преобразования этих схем.

Пусть $S$ — произвольная минимальная схема, реализующая некоторую функцию в базисе $B'_P$, и пусть в схеме $S$ выход некоторого элемента $e_1$, которому приписана функция $x + i \pmod k$, подаётся на вход элемента $e_2$, которому приписана функция $x + j \pmod k$. Рассмотрим схему $S'$, которая получается из схемы $S$ заменой элемента $e_2$ элементом $e'_2$, которому приписана функция $x + i + j \pmod k$ и в который входит ребро, исходящее из того элемента, из которого выходит ребро в элемент $e_1$. Будем говорить, что схема $S'$ получена из схемы $S$ *операцией приведения* (относительно пары элементов $e_1$ и $e_2$).

Выделим класс минимальных схем в базисе $B'_P$, к которым невозможно применить операцию приведения. Схему $S$ в базисе $B'_P$ будем называть *приведённой*, если схема $S$ минимальна и на вход никакого элемента схемы, которому приписана немонотонная функция из базиса $B'_P$, не подаётся выход никакого элемента, которому тоже приписана немонотонная функция из базиса $B'_P$, т. е. никакие два немонотонных элемента схемы не соединены ребром.

Сформулируем простые утверждения, которые потребуются в дальнейшем.

**Лемма 4.** *У любой функции $k$-значной логики есть реализующая её в базисе $B'_P$ приведённая схема.*

**Лемма 5.** *Пусть схема $S'$ получается из схемы $S$, построенной в базисе $B'_P$, применением операции приведения. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Схемы $S$ и $S'$ реализуют одну и ту же функцию.*
2. *Число элементов в схемах $S$ и $S'$ одинаково.*
3. *Число немонотонных элементов в схемах $S$ и $S'$ одинаково.*
4. *Число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от входа к этому элементу не содержит немонотонных элементов, в схемах $S$ и $S'$ одинаково.*
5. *Число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от этого элемента до выхода не содержит немонотонных элементов, в схемах $S$ и $S'$ одинаково.*

Пусть $S$ — приведённая схема для некоторой функции $f$ в базисе $B'_P$. Разобьём множество всех монотонных элементов схемы $S$ на подмножества $S_0, S_1, S_2, \ldots$ следующим образом. К множеству $S_i$, $i = 0, 1, \ldots$, отнесём все монотонные элементы схемы $S$, для каждого из которых максимальное число немонотонных элементов в путях от входов схемы до этого элемента равно $i$. Тогда схема $S$ имеет вид, представленный на рис. 1, где элементам $e_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant t_i)$ приписаны немонотонные элементы из базиса $B'_P$ и блоки $S_1, \ldots, S_{r-1}$ по построению непустые, т. е. содержат хотя бы один монотонный элемент. Такое представление приведённой схемы будем называть *каноническим*.

Для приведённой схемы $S$ через $l_0(S)$ обозначим число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от входа к этому элементу не содержит немонотонных элементов, а через $l_1(S)$ — число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от этого элемента до выхода не содержит немонотонных элементов. Заметим, что если в минимальной схеме максимальное число немонотонных элементов в цепях от входов к выходу равно $r$, то для каждого монотонного элемента, ни один путь от которого до выхода не содержит немонотонных элементов, найдётся цепь от входа до этого элемента, содержащая $r$ немонотонных элементов.

**Лемма 6.** *Пусть $S$ — приведённая схема в базисе $B'_P$ для немонотонной функции $f$. Тогда выполняется неравенство*

$$L_{B'_P}(S) - l_0(S) - l_1(S) \geqslant W(d(f) + 1) - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим каноническое представление схемы $S$ (рис. 1).

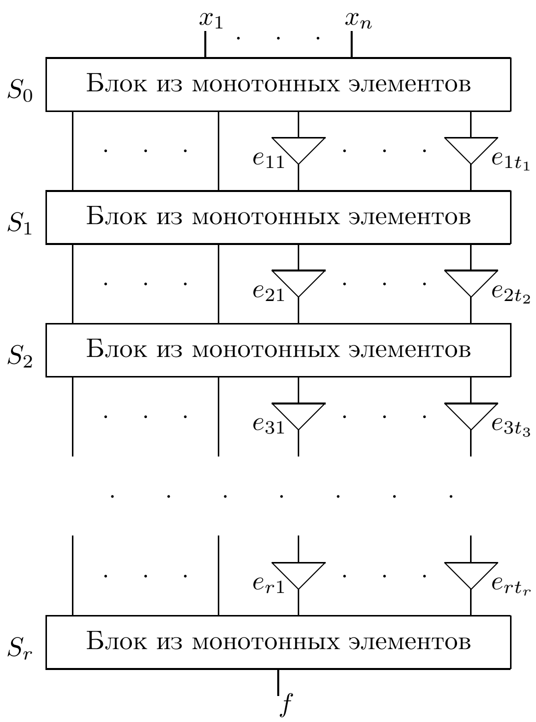


Рис. 1

Применяя лемму 1 и учитывая равенство $D(B'_P) = 1$, получаем

$$d(f) + 1 \leqslant d(S) + 1 \leqslant (t_1 + 1) \cdots (t_r + 1).$$

Из этого соотношения в силу леммы 2 следует неравенство

$$(t_1 + 1) + \cdots + (t_r + 1) \geqslant W(d(f) + 1).$$

С другой стороны,

$$L_{B'_P}(S) - l_0(S) - l_1(S) \geqslant (t_1 + 1) + \cdots + (t_r + 1) - 1,$$

так как каждый из блоков $S_1, \ldots, S_{r-1}$ содержит хотя бы по одному элементу, поэтому

$$L_{B'_P}(S) - l_0(S) - l_1(S) \geqslant W(d(f) + 1) - 1.$$

Лемма 6 доказана.

Непосредственно из леммы 6 вытекает

**Лемма 7.** *Для любой функции $k$-значной логики $f$ справедливо неравенство*

$$L_{B'_P}(f) \geqslant W(d(f)+1) - 1.$$

Прежде чем продолжить получение нижних оценок сложности реализации функций в базисах $B_P$ и $B'_P$, установим близость значений спадов двух функций, отличающихся по модулю $k$ на константу.

**Лемма 8.** *Пусть функции $k$-значной логики $f$ и $g$ удовлетворяют условию*

$$g \equiv f + i \pmod{k}$$

*для некоторого фиксированного значения $i$. Тогда*

$$|d(f) - d(g)| \leqslant 1.$$

Доказательство. Пусть цепь $C = (\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_t)$ наборов значений переменных функций $f$ и $g$ удовлетворяет условию $d_C(f) = d(f)$. Рассмотрим значения функции $f$ на соседних наборах $\widetilde{\alpha}_j$ и $\widetilde{\alpha}_{j+1}$ цепи $C$, $j = 1, \ldots, t-1$.

Если выполняются неравенства $0 \leqslant f(\widetilde{\alpha}_j) \leqslant f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) < k - i$ или $k - i \leqslant f(\widetilde{\alpha}_j) \leqslant f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) \leqslant k - 1$, то пара наборов $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$ не является обрывом ни для функции $f$, ни для функции $g$.

Если выполняются неравенства $k - i > f(\widetilde{\alpha}_j) > f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) \geqslant 0$ или $k - 1 \geqslant f(\widetilde{\alpha}_j) > f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) \geqslant k - i$, то пара наборов $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$ является обрывом и для функции $f$, и для функции $g$.

Если $0 \leqslant f(\widetilde{\alpha}_j) < k-i \leqslant f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) \leqslant k-1$, то пара наборов $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$ не является обрывом для функции $f$, но является обрывом для функции $g$. Число таких пар среди пар $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$, $j = 1, \ldots, t-1$, обозначим через $p$.

Если $k - 1 \geqslant f(\widetilde{\alpha}_j) \geqslant k - i > f(\widetilde{\alpha}_{j+1}) \geqslant 0$, то пара наборов $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$ является обрывом для функции $f$, но не является обрывом для функции $g$. Число таких пар среди пар $(\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_{j+1})$, $j = 1, \ldots, t-1$, обозначим через $q$.

Очевидно, что $q - p \leqslant 1$. Следовательно,

$$d(g) \geqslant d_C(g) = d_C(f) + p - q \geqslant d(f) - 1.$$

Аналогично устанавливается и неравенство $d(f) \geqslant d(g) - 1$. Лемма 8 доказана.

**Лемма 9.** *Пусть для немонотонной функции $f$ значение $d(f)$ ни при каком целом неотрицательном $s$ не равно величинам $3^s$, $4 \cdot 3^{s-1}$, $2 \cdot 3^s$. Тогда верно хотя бы одно из следующих утверждений.*

1. *Справедливо неравенство*

$$L_{B'_P}(f) \geqslant W(d(f)+1)+1.$$

2. *Выходной элемент любой приведённой схемы, реализующей функцию $f$ в базисе $B'_P$, является монотонным.*

Доказательство. Пусть схема $S$ является приведённой в базисе $B'_P$ для функции $f$ и элемент $e$, являющийся выходом схемы, не является монотонным, т. е. ему приписана некоторая функция $x+i \pmod k$, $i \in \{1,\ldots,k-1\}$. Тогда на вход элемента $e$ подаётся функция $g = f+k-i \pmod k$, причём для функции $g$ ввиду леммы 8 справедливо неравенство $d(g) \geqslant d(f)-1$. Отсюда и из условий леммы следует, что функция $g$ немонотонна. Схема $S'$, получающаяся из схемы $S$ путём удаления элемента $e$, является минимальной схемой в базисе $B'_P$ для функции $g$, иначе, заменив подсхему $S'$ минимальной схемой в базисе $B'_P$ для функции $g$, получили бы схему в базисе $B'_P$ для функции $f$ сложности менее $L_{B'_P}(S)$. Выходной элемент схемы $S'$ в силу приведённости схемы $S$ монотонный. Согласно леммам 5 и 6 справедливо неравенство

$$L_{B'_P}(S') \geqslant W(d(g)+1).$$

В силу неравенства $d(g) \geqslant d(f)-1$ и ограничений, накладываемых на величину $d(f)$ условиями леммы, с учётом леммы 3 получаем

$$W(d(g)+1) \geqslant W(d(f)+1),$$

поэтому

$$L_{B'_P}(S) \geqslant W(d(f)+1)+1.$$

Отсюда ввиду минимальности схемы $S$ следует утверждение леммы 9. Лемма 9 доказана.

**Лемма 10.** *Пусть значение $d(f)$ при некотором натуральном $s$ равно либо $2 \cdot 3^{s-1}$, либо $3^s$, либо $4 \cdot 3^{s-1}$. Тогда справедливо неравенство*

$$L_{B'_P}(f) \geqslant W(d(f)+1).$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в условиях леммы выполняется неравенство $d(f) \geqslant 2$.

Пусть схема $S$ является приведённой в базисе $B'_P$ для функции $f$. Обозначим выходной элемент схемы $S$ через $e$. Если элемент $e$ монотонный, то утверждение леммы следует из леммы 6.

Если элемент $e$ не монотонный, т. е. ему приписана некоторая функция $x + i \pmod k$, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, то на вход элемента $e$ подаётся функция $g = f + k - i \pmod k$, причём в силу леммы 8 для функции $g$ справедливо неравенство $d(g) \geqslant d(f) - 1$ (из этого неравенства, в частности, следует, что функция $g$ немонотонная). Схема $S'$, получающаяся из схемы $S$ путём удаления элемента $e$, является минимальной схемой в базисе $B'_P$ для функции $g$; иначе, заменив подсхему $S'$ минимальной схемой в базисе $B'_P$ для функции $g$, получили бы схему в базисе $B'_P$ для функции $f$ сложности менее $L_{B'_P}(S)$. Выходной элемент схемы $S'$ в силу приведённости схемы $S$ монотонный. Согласно леммам 5 и 6 справедливо неравенство

$$L_{B'_P}(S') \geqslant W(d(g) + 1).$$

В силу неравенства $d(g) \geqslant d(f) - 1$ и ограничения $d(f) \geqslant 2$ с использованием леммы 3 получаем соотношение

$$W(d(g) + 1) \geqslant W(d(f) + 1) - 1,$$

поэтому

$$L_{B'_P}(S) \geqslant W(d(f) + 1).$$

Отсюда ввиду минимальности схемы $S$ следует утверждение леммы 10. Лемма 10 доказана.

Из лемм 9 и 10 с использованием лемм 5 и 6 вытекает следующее формально верное и для булевых функций утверждение, являющееся однако содержательным для оценок сложности функций $k$-значной логики при $k \geqslant 3$ и используемое именно в этом случае.

**Теорема 1.** *Для любой функции $k$-значной логики $f$, удовлетворяющей условию $d(f) \geqslant 2$, справедливо неравенство*

$$L_{B_P}(f) \geqslant L_{B'_P}(f) \geqslant 3\left(\lceil \log_3(d(f) + 1) \rceil - 1\right) + \tau(d(f) + 1).$$

**Замечание 1.** Нижняя оценка величины $L_{B'_P}(f)$ из теоремы 1 для функций, удовлетворяющих условию $d(f) = 1$, не всегда выполняется: для функции $h_i(x) = x + i \pmod k$ $(i \in \{1, \ldots, k-1\})$, очевидно, верны равенства $d(h_i) = 1$ и $L_{B'_P}(h_i) = 1$, в то время как величина $3\left(\lceil \log_3 2 \rceil - 1\right) + \tau(2)$ равна 2.

Введём функцию $k$-значной логики от $n$ переменных, имеющую при фиксированных значениях $k$ и $n$ максимально возможный спад:

$$\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n + 1)(k-1) \pmod{k}.$$

Положим

$$T(k,n) = (k-1)n - \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor + 1 = (k-2)n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 1.$$

Очевидно, что $d(\xi) + 1 = T(k,n)$.

**Лемма 11.** *Пусть при заданных значениях $k$ и $n$ выполняется условие $d(\xi) \geqslant 5$. Тогда справедливо неравенство*

$$L_{B_P}(\xi) \geqslant W(T(k,n)) + 1.$$

Доказательство. Соотношение $L_{B_P}(\xi) \geqslant L_{B'_P}(\xi)$ очевидно. Если выполняется и строгое неравенство $L_{B_P}(\xi) > L_{B'_P}(\xi)$, то требуемая оценка следует из теоремы 1.

Далее считаем, что $L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi)$. Тогда минимальная для функции $\xi$ схема $S$ в базисе $B_P$ является также минимальной для функции $\xi$ и в базисе $B'_P$. В зависимости от того, есть ли в схеме $S$ немонотонный элемент, на вход которого подаётся переменная, рассмотрим два случая.

Случай 1°. Пусть в схеме $S$ нет ни одного немонотонного элемента, на вход которого подаётся вход схемы (переменная).

Обозначим через $S'$ построенную по схеме $S$ приведённую схему. В силу леммы 5 верно соотношение $l_0(S') \geqslant 1$. Если дополнительно выполняется неравенство $l_1(S') \geqslant 1$, то согласно лемме 6 имеем

$$L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(S) = L_{B'_P}(S') \geqslant W(d(\xi)+1) + 1 = W(T(k,n)) + 1.$$

Пусть выполняется условие $l_1(S') = 0$, т. е. выходной элемент $e'$ схемы $S'$ немонотонный. Рассмотрим схему $S''$, получающуюся из схемы $S'$ путём удаления элемента $e'$. Схема $S''$ реализует функцию $h$, которая подаётся на вход элемента $e'$ в схеме $S'$. Отметим справедливость следующих свойств схемы $S''$ и функции $h$. Во-первых, ввиду леммы 8 выполняется неравенство $d(h) \geqslant d(\xi) - 1$ и, следовательно, по условиям леммы функция $h$ немонотонна. Во-вторых, схема $S''$ является минимальной для функции $h$ в базисе $B'_P$ (иначе схема $S'$ не была бы минимальной для функции $\xi$ в базисе $B'_P$). В-третьих, схема $S''$ приведённая. В-четвёртых, в силу условий случая и условий леммы, а также приведённости схемы $S'$ выполняются неравенства $l_0(S'') \geqslant 1$ и $l_1(S'') \geqslant 1$. Таким образом, применяя лемму 6 для схемы $S''$ и лемму 3, получаем

$$\begin{aligned} L_{B_P}(\xi) &= L_{B'_P}(S') = L_{B'_P}(S'') + 1 \\ &\geqslant W(d(h)+1) + 2 \geqslant W(d(\xi)+1) + 1 = W(T(k,n)) + 1. \end{aligned}$$

Случай 2°. Пусть в схеме $S$ есть немонотонный элемент, на вход которого подаётся вход схемы.

Обозначим этот элемент через $e$. В силу симметричности функции $\xi$ без ограничения общности можно считать, что в схеме $S$ на вход элемента $e$ подаётся переменная $x_1$. Переделаем $S$, удалив из неё элемент $e$ и создав вместо него ещё один вход схемы, на который подадим переменную $y$. Полученная таким перестроением схема $S_1$ реализует некоторую функцию $g(y, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую соотношению

$$\xi(x_1, \ldots, x_n) = g(N_P(x_1), x_1, \ldots, x_n).$$

Отметим, что схема $S_1$ минимальная для функции $g$ в базисе $B'_P$, так как иначе и схема $S$ не была бы минимальной для функции $\xi$ в базисе $B'_P$. Следовательно,

$$L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(g) + 1.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ максимальных возрастающих цепей наборов из $E_k^n$, начинающихся с нулевого набора и заканчивающихся наборами $(k-2, k-1, \ldots, k-1)$, $(k-1, k-1, \ldots, k-1)$. Очевидно, что для любой цепи $C$ из множества $\mathcal{C}$ справедливы равенства

$$|C| = (k-1)n + 1, \quad d_C(\xi) = d(\xi) = T(k,n) - 1.$$

Определим множество $\mathcal{C}_1$ возрастающих цепей длины $(k-1)n$ наборов из $E_k^n$ следующим образом. По каждой цепи $C$ из множества $\mathcal{C}$ построим включаемую в множество $\mathcal{C}_1$ возрастающую цепь $C_1$ из $(k-1)n$ наборов длины $n+1$ путём исключения последнего набора и замены остальных наборов цепи $C$ наборами длины $n+1$ по правилу

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to (\alpha_1 + 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

По построению для любой цепи $C_1$ из множества $\mathcal{C}_1$ выполняется неравенство $d_{C_1}(g) \geqslant d_C(\xi) - 1$, поэтому, в частности,

$$d(g) \geqslant d(\xi) - 1 = T(k,n) - 2.$$

Случай 2.1°. Пусть $d(g) \geqslant d(\xi)$. Тогда достаточно к функции $g$ применить теорему 1 и воспользоваться монотонностью функции $W(n)$:

$$\begin{aligned}L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(g) + 1\\ \geqslant W(d(g)+1)+1 \geqslant W(d(\xi)+1)+1 = W(T(k,n))+1.\end{aligned}$$

Случай 2.2°. Пусть $d(g) = d(\xi) - 1$. В зависимости от того, есть ли в схеме $S_1$ немонотонный элемент, на вход которого подаётся переменная, рассмотрим два подслучая.

Случай 2.2.1°. Пусть в схеме $S_1$ нет ни одного немонотонного элемента, на вход которого подаётся вход схемы (переменная).

Обозначим через $S'_1$ построенную по схеме $S_1$ приведённую схему. В силу леммы 5 верно соотношение $l_0(S'_1) \geqslant 1$. Если дополнительно выполняется неравенство $l_1(S'_1) \geqslant 1$, то по лемме 6 имеем

$$L_{B'_P}(S'_1) \geqslant W(d(g)+1)+1.$$

Пусть выполняется условие $l_1(S'_1) = 0$, т. е. выходной элемент $e'_1$ схемы $S'_1$ немонотонный. Рассмотрим схему $S''_1$, получающуюся из схемы $S'_1$ путём удаления элемента $e'_1$. Схема $S''_1$ реализует функцию $h$, которая подаётся на вход элемента $e'_1$ в схеме $S'_1$. Отметим справедливость следующих свойств схемы $S''_1$ и функции $h$. Во-первых, ввиду леммы 8 выполняется неравенство $d(h) \geqslant d(g) - 1$ и, следовательно, в силу условий леммы функция $h$ немонотонна. Во-вторых, схема $S''_1$ является минимальной для функции $h$ в базисе $B'_P$ (иначе схема $S'_1$ не была бы минимальной для функции $g$ в базисе $B'_P$). В-третьих, схема $S''_1$ приведённая. В-четвертых, согласно условиям случая и леммы, а также приведённости схемы $S'_1$ выполняются неравенства $l_0(S''_1) \geqslant 1$ и $l_1(S''_1) \geqslant 1$. Значит, применяя лемму 6 для схемы $S''_1$ и лемму 3, и в случае немонотонного выходного элемента схемы $S'_1$ получаем

$$L_{B'_P}(S'_1) = L_{B'_P}(S''_1) + 1 \geqslant W(d(h)+1)+2 \geqslant W(d(g)+1)+1.$$

Таким образом, по лемме 3 в рассматриваемом случае окончательно имеем

$$\begin{aligned}L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(g) + 1 = L_{B'_P}(S_1) + 1 = L_{B'_P}(S'_1) + 1\\ \geqslant W(d(g)+1)+2 \geqslant W(d(\xi)+1)+1 = W(T(k,n))+1.\end{aligned}$$

Случай 2.2.2°. Пусть в схеме $S_1$ есть немонотонный элемент, на вход которого подаётся вход схемы.

Обозначим этот элемент через $e_1$. В силу минимальности схемы $S$ на вход элемента $e_1$ не может подаваться переменная $x_1$. Далее опять рассмотрим два случая.

Случай 2.2.2.1°. Пусть на вход элемента $e_1$ подаётся переменная $y$.

Переделаем схему $S_1$, удалив из неё элемент $e_1$ и создав вместо него ещё один вход схемы, на который подадим переменную $z$. Полученная таким перестроением схема $S_2^1$ реализует некоторую функцию $h_1(y, z, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую соотношению

$$\xi(x_1, \ldots, x_n) = h_1(N_P(x_1), N_P(N_P(x_1)), x_1, \ldots, x_n).$$

Отметим, что схема $S_2^1$ минимальная для функции $h_1$ в базисе $B'_P$, так как иначе и схема $S_1$ не была бы минимальной для функции $g$ в базисе $B'_P$. Следовательно,

$$L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(g) + 1 = L_{B'_P}(h_1) + 2.$$

Рассмотрим произвольную цепь $C_1^1$ из множества $\mathcal{C}_1$, начинающуюся с набора $(1, 0, \ldots, 0)$ и заканчивающуюся наборами

$$(k-2, k-3, k-1, \ldots, k-1), \quad (k-1, k-2, k-1, \ldots, k-1).$$

По цепи $C_1^1$ построим возрастающую цепь $C_2^1$ из $(k-1)n-1$ наборов длины $n+2$ путём исключения последнего набора цепи $C_1^1$ и замены остальных наборов цепи наборами длины $n+2$ по правилу

$$(\alpha_1 + 1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \to (\alpha_1 + 1, \alpha_1 + 2, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

По построению для цепи $C_2^1$ выполняются неравенства

$$d_{C_2^1}(h_1) \geqslant d_{C_1^1}(g) - 1 \geqslant d_C(\xi) - 2,$$

поэтому

$$d(h_1) \geqslant d(\xi) - 2 = T(k, n) - 3.$$

Применяя теорему 1, имеем

$$L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(h_1) + 2 \\ \geqslant W(d(h_1) + 1) + 2 \geqslant W(T(k, n) - 2) + 2.$$

Учитывая неравенство $T(k, n) \geqslant 6$ и справедливое в силу леммы 3 при $n \geqslant 6$ соотношение $W(n-2) \geqslant W(n) - 1$, окончательно получаем

$$L_{B_P}(\xi) \geqslant W(T(k, n)) + 1.$$

Случай 2.2.2.2°. Пусть на вход элемента $e_1$ подаётся переменная из множества $\{x_2, \ldots, x_n\}$.

Не ограничивая общности, будем считать, что в схеме $S_1$ на вход элемента $e_1$ подаётся переменная $x_2$. Переделаем схему $S_1$, удалив из неё элемент $e_1$ и создав вместо него ещё один вход схемы, на который подадим переменную $z$. Полученная таким перестроением схема $S_2^2$ реализует некоторую функцию $h_2(y, z, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую соотношению

$$\xi(x_1, \ldots, x_n) = h_2(N_P(x_1), N_P(x_2), x_1, \ldots, x_n).$$

Отметим, что схема $S_2^2$ минимальная для функции $h_2$ в базисе $B'_P$, так как иначе и схема $S_1$ не была бы минимальной для функции $g$ в базисе $B'_P$. Следовательно,

$$L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(g) + 1 = L_{B'_P}(h_2) + 2.$$

Рассмотрим произвольную цепь $C_1^2$ из множества $\mathcal{C}_1$, начинающуюся с набора $(1, 0, \ldots, 0)$ и заканчивающуюся наборами

$$(k-1, k-2, k-2, k-1, \ldots, k-1),$$
$$(k-1, k-2, k-1, k-1, \ldots, k-1).$$

По цепи $C_1^2$ построим возрастающую цепь $C_2^2$ из $(k-1)n - 1$ наборов длины $n + 2$ путём исключения последнего набора цепи $C_1^2$ и замены остальных наборов цепи наборами длины $n + 2$ по правилу

$$(\alpha_1 + 1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \to (\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

По построению для цепи $C_2^2$ выполняются неравенства

$$d_{C_2^2}(h_2) \geqslant d_{C_1^2}(g) - 1 \geqslant d_C(\xi) - 2,$$

поэтому

$$d(h_2) \geqslant d(\xi) - 2 = T(k, n) - 3.$$

Применяя теорему 1, имеем

$$L_{B_P}(\xi) = L_{B'_P}(\xi) = L_{B'_P}(h_2) + 2$$
$$\geqslant W(d(h_2) + 1) + 2 \geqslant W(T(k, n) - 2) + 2.$$

Учитывая неравенство $T(k, n) \geqslant 6$ и справедливое в силу леммы 3 при $n \geqslant 6$ соотношение $W(n-2) \geqslant W(n) - 1$, окончательно получаем

$$L_{B_P}(\xi) \geqslant W(T(k, n)) + 1.$$

Все случаи разобраны полностью. Лемма 11 доказана.

Стандартным образом определим функцию Шеннона сложности реализации функций $k$-значной логики схемами в базисе $B_P$:

$$L_{B_P}(n) = \max L_{B_P}(f),$$

где максимум берётся по всем функциям $k$-значной логики $f$ от $n$ переменных.

Лемма 11 приводит к следующей нижней оценке функции Шеннона $L_{B_P}(n)$.

**Теорема 2.** *Для любого натурального $n \geqslant 4$ для функции Шеннона $L_{B_P}(n)$ справедливо неравенство*

$$L_{B_P}(n) \geqslant 3\left(\lceil \log_3 T(k,n) \rceil - 1\right) + \tau(T(k,n)) + 1.$$

## 2. Верхние оценки

Переходя к получению верхних оценок, согласно [6] введём понятие переключателя. Для упорядоченного набора функций $k$-значной логики $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назовём *$s$-переключателем* функций $f_1, \ldots, f_s$ любую функцию $k$-значной логики $g(z_1, \ldots, z_s, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered}
g(1, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
g(0, 1, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g(0, \ldots, 0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{gathered}$$

**Лемма 12.** *Для любого набора $(f_1, \ldots, f_s)$ функций $k$-значной логики найдётся $s$-переключатель $g$ этого набора функций, удовлетворяющий условию*

$$d(g) \leqslant \max\{d(f_1), \ldots, d(f_s)\}.$$

Доказательство. В качестве искомого $s$-переключателя достаточно взять функцию $g(z_1, \ldots, z_s, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая в случае, когда обычная сумма первых $s$ переменных не превышает единицы, задаётся равенствами

$$\begin{gathered}
g(0, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\
g(1, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
g(0, 1, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g(0, \ldots, 0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{gathered}$$

и которая равна $k-1$ в случае, когда сумма первых $s$ переменных больше единицы. Функция $g$ обладает следующим свойством. Если наборы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+n})$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_{s+n})$ удовлетворяют условиям

1) $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, s+n$;

2) $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+n}) > g(\beta_1, \ldots, \beta_{s+n})$,

то $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \ldots, s$, и $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = 1$.

Из этого свойства следует, что если из какой-либо цепи $C$ наборов из $E_k^{s+n}$ построить цепь $C'$ наборов из $E_k^n$, удалив первые $s$ разрядов в каждом наборе цепи $C$, то для цепей $C$ и $C'$ будет выполняться равенство $d_C(g) = d_{C'}(f)$, которое, по существу, и доказывает лемму 12.

Следующее утверждение, несмотря на то, что при его доказательстве и дальнейшем применении используется язык схем, удобнее формулировать на языке формул.

**Лемма 13.** *Пусть функция* $f(\tilde{x}) \in P_k$, $k \geqslant 3$, *удовлетворяет условию* $d(f) \geqslant 1$. *Тогда найдутся монотонные функции* $\mu_0(\tilde{x})$, $\mu_1(y_1, y_2, \tilde{x})$, $\mu_2(y_1, y_2, \tilde{x})$, $\mu_3(y_1, y_2, \tilde{x})$, *а также функция* $g(z_1, z_2, z_3, \tilde{x})$, *удовлетворяющая условию*

$$d(g) + 1 \leqslant \left\lceil \frac{d(f)+1}{3} \right\rceil,$$

*для которых справедливо равенство*

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) = g(&\mu_1(N_P(\mu_0(\tilde{x})), N_P(N_P(\mu_0(\tilde{x}))), \tilde{x}),\\ &\mu_2(N_P(\mu_0(\tilde{x})), N_P(N_P(\mu_0(\tilde{x}))), \tilde{x}),\\ &\mu_3(N_P(\mu_0(\tilde{x})), N_P(N_P(\mu_0(\tilde{x}))), \tilde{x}), \tilde{x}). \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала воспользуемся описанным при доказательстве верхней оценки теоремы 3 из [6] способом для построения реализующей функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ схемы во вспомогательном базисе $B$, состоящем из всех монотонных функций и функции $\omega(x)$, задаваемой равенством

$$\omega(x) = \begin{cases} k-1, & \text{если } x \leqslant k-3, \\ k-2, & \text{если } x = k-2, \\ 0, & \text{если } x = k-1. \end{cases}$$

Положим $R(f) = \lceil (d(f)+1)/3 \rceil$. По условию теоремы справедливо неравенство $R(f) \geqslant 1$.

Обозначим через $T_1$ множество $k$-значных наборов длины $n$, обладающих тем свойством, что для любой цепи $C$ с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(f) < R(f)$, т. е.

$$T_1 = \bigl\{\widetilde{\alpha} \in E_k^n \mid d_C(f) < R(f) \text{ для любой цепи } C \text{ с концом } \widetilde{\alpha}\bigr\}.$$

Далее, обозначим через $T_2$ множество $k$-значных наборов длины $n$, обладающих тем свойством, что для любой цепи $C$ наборов из множества $E_k^n \setminus T_1$ с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(f) < R(f)$, т. е.

$$T_2 = \bigl\{\widetilde{\alpha} \in E_k^n \setminus T_1 \mid d_C(f) < R(f) \text{ для любой цепи } C \text{ с концом } \widetilde{\alpha},\ C \subset E_k^n \setminus T_1\bigr\}.$$

Наконец, положим

$$T_3 = E_k^n \setminus (T_1 \cup T_2).$$

Отметим, что если $\widetilde{\alpha} \in T_i$ и каждый разряд набора $\widetilde{\beta}$ не превосходит соответствующего разряда набора $\widetilde{\alpha}$, то $\widetilde{\beta} \in T_1 \cup \ldots \cup T_i$, $i = 1, 2, 3$.

Теперь докажем, что для любой цепи $C$ наборов из множества $T_3$ также выполняется неравенство $d_C(f) < R(f)$. Действительно, предположив противное, получаем, что существует цепь $C_3$ с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_3 \in T_3$, для которой выполняется неравенство $d_{C_3}(f) \geqslant R(f)$. С другой стороны, так как набор $\widetilde{\alpha}_3$ не лежит в множестве $T_2$, найдётся цепь $C_2$ с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_2 \in T_2$ и с концом в наборе $\widetilde{\alpha}_3 \in T_3$, для которой выполняется неравенство $d_{C_2}(f) \geqslant R(f)$. Аналогично устанавливаем существование цепи $C_1$ с началом в наборе $\widetilde{\alpha}_1 \in T_1$ и с концом в наборе $\widetilde{\alpha}_2 \in T_2$, для которой выполняется неравенство $d_{C_1}(F) \geqslant R(f)$.

Тогда для цепи $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ справедливы соотношения

$$d_C(f) = d_{C_1}(f) + d_{C_2}(f) + d_{C_3}(f) \geqslant 3R(f) > d(f),$$

что противоречит определению величины $d(f)$.

Введём функции $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равенствами

$$f_1(\tilde{x}) = \begin{cases} f(\tilde{x}), & \text{если } \tilde{x} \in T_1, \\ k-1, & \text{если } \tilde{x} \in T_2 \cup T_3, \end{cases}$$

$$f_2(\tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{x} \in T_1, \\ f(\tilde{x}), & \text{если } \tilde{x} \in T_2, \\ k-1, & \text{если } \tilde{x} \in T_3, \end{cases}$$

$$f_3(\tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{x} \in T_1 \cup T_2, \\ f(\tilde{x}), & \text{если } \tilde{x} \in T_3. \end{cases}$$

Для $i = 1, 2, 3$ в силу определения функций $f_i$ выполняются неравенства $d(f_i) < R(f)$, а следовательно, и неравенства

$$d(f_i) \leqslant R(f) - 1.$$

Определим следующие функции:

$$\mu_0(\tilde{x}) = \begin{cases} k-3, & \text{если } \tilde{x} \in T_1, \\ k-2, & \text{если } \tilde{x} \in T_2, \\ k-1, & \text{если } \tilde{x} \in T_3, \end{cases}$$

$$\lambda_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < j, \\ 1, & \text{если } x \geqslant j, \end{cases} \quad j = k-2, k-1,$$

$$\chi_2(\tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{x} \in T_1, \\ 1, & \text{если } \tilde{x} \in T_2 \cup T_3, \end{cases} \qquad \chi_3(\tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{x} \in T_1 \cup T_2, \\ 1, & \text{если } \tilde{x} \in T_3. \end{cases}$$

Отметим, что функции $\mu_0(\tilde{x})$, $\lambda_{k-2}(x)$, $\lambda_{k-1}(x)$, $\chi_2(\tilde{x})$ и $\chi_3(\tilde{x})$ монотонны.

В силу леммы 12 для функций $f_1(\tilde{x})$, $f_2(\tilde{x})$ и $f_3(\tilde{x})$ найдётся функция $g(z_1, z_2, z_3, \tilde{x})$, удовлетворяющая условиям

$$g(1,0,0,\tilde{x}) = f_1(\tilde{x}), \quad g(0,1,0,\tilde{x}) = f_2(\tilde{x}), \quad g(0,0,1,\tilde{x}) = f_3(\tilde{x}),$$
$$d(g) \leqslant \max\left\{d(f_1), d(f_2), d(f_3)\right\}.$$

Из последнего соотношения в силу неравенств $d(f_i) \leqslant R(f) - 1$, $i = 1,2,3$, получаем

$$d(g) \leqslant R(f) - 1 = \left\lceil \frac{d(f)+1}{3} \right\rceil - 1.$$

В функцию $g(z_1, z_2, z_3, \tilde{x})$ вместо переменных $z_1$, $z_2$ и $z_3$ подставим функции

$$Z_1(\tilde{x}) = \lambda_{k-1}(\omega(\mu_0(\tilde{x})),$$
$$Z_2(\tilde{x}) = \min\{\lambda_{k-2}(\omega(\mu_0(\tilde{x}))), \chi_2(\tilde{x})\},$$
$$Z_3(\tilde{x}) = \chi_3(\tilde{x})$$

соответственно (см. схему на рис. 2).

Учитывая, что для $i = 1,2,3$ функция $Z_i(\tilde{x})$ обращается в единицу на наборах из множества $T_i$, а на остальных наборах равна нулю, получаем, что на наборах $\tilde{x}$ из множества $T_i$ справедливы равенства

$$g(Z_1(\tilde{x}), Z_2(\tilde{x}), Z_3(\tilde{x}), \tilde{x}) = f_i(\tilde{x}) = f(\tilde{x}).$$

Для схемной реализации функций $Z_1, Z_2, Z_3$ помимо использования монотонных функций потребовалось лишь однократное использование функции $\omega$.

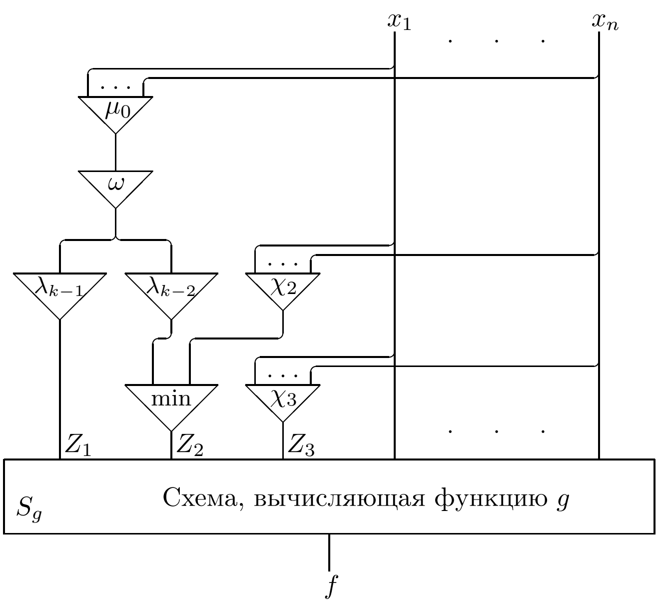


Рис. 2

Возвращаясь от базиса $B$ к базису $B_P$, покажем, как задача построения схемы в базисе $B_P$ для функции $f$ сводится к задаче построения схемы в базисе $B_P$ для функции $g$.

По схеме, реализующей функцию $f(\tilde{x})$ над вспомогательным базисом $B$, построим схему, реализующую эту функцию в базисе $B_P$. Прежде всего отметим, что в схеме, представленной на рис. 2, на вход элемента, которому приписан функциональный символ $\omega$, могут подаваться только значения $k-3$, $k-2$ и $k-1$.

Введём монотонные функции $\zeta(x)$ и $\eta(x)$, положив

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 1, \\ x, & \text{если } x \neq 1, \end{cases} \qquad \eta(x) = \min\{k-2, x\}.$$

Тогда для $x \in \{k-3, k-2, k-1\}$ справедливо равенство

$$\omega(x) = \max\left\{\eta(N_P(x)), \zeta(N_P(N_P(x)))\right\}.$$

Заменив в соответствии с этим равенством в схеме, представленной на рис. 2, элемент, которому приписан функциональный символ $\omega$, на подсхему из пяти элементов, получим схему, реализующую функцию

$f(\tilde{x})$ в базисе $B_P$ (рис. 3). Для получения искомого представления достаточно положить

$$\mu_1(y_1, y_2, \tilde{x}) = \lambda_{k-1}(\max\{\eta(y_1), \zeta(y_2)\}),$$

$$\mu_2(y_1, y_2, \tilde{x}) = \min\{\lambda_{k-2}(\max\{\eta(y_1), \zeta(y_2)\}), \chi_2(\tilde{x})\},$$

$$\mu_3(y_1, y_2, \tilde{x}) = \chi_3(\tilde{x}).$$

Лемма 13 доказана.

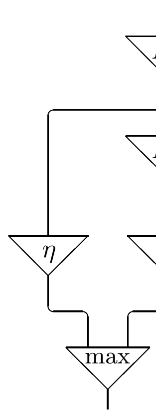


Рис. 3

Аналогично лемме 13 доказывается

**Лемма 14.** *Пусть функция $f(\tilde{x}) \in P_k$, $k \geqslant 2$, удовлетворяет условию $d(f) \geqslant 1$. Тогда найдутся монотонные функции $\mu_0(\tilde{x})$, $\mu_1(y, \tilde{x})$, $\mu_2(y, \tilde{x})$, а также функция $g(z_1, z_2, \tilde{x})$, удовлетворяющая условию*

$$d(g) + 1 \leqslant \left\lceil \frac{d(f) + 1}{2} \right\rceil,$$

*для которых справедливо равенство*

$$f(\tilde{x}) = g(\mu_1(N_P(\mu_0(\tilde{x})), \tilde{x}), \mu_2(N_P(\mu_0(\tilde{x})), \tilde{x}), \tilde{x}).$$

Теперь из лемм 13 и 14 выведем требуемую верхнюю оценку немонотонной сложности в базисе $B_P$.

**Теорема 3.** *Для любой немонотонной функции $f \in P_k$, $k \geqslant 3$, справедливо неравенство*

$$L_{B_P}(f) \leqslant 3\left(\lceil \log_3(d(f) + 1) \rceil - 1\right) + \tau(d(f) + 1) + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно три случая.

Случай 1°. Пусть для некоторого целого неотрицательного $r$ выполняются неравенства $2 \cdot 3^r < d(f) + 1 \leqslant 3 \cdot 3^r$.

Прежде всего отметим, что для произвольной функции $f$, удовлетворяющей условию $d(f) + 1 \leqslant 3 \cdot 3^r$, применяя не более $r + 1$ раз лемму 13, с учётом монотонности суперпозиции монотонных функций можно построить схему в базисе $B_P$ сложности не более $3(r + 1) + 1$ (рис. 4, на котором элементы, соответствующие монотонным функциям базиса, обозначены через $m_i$, $i = 0, 1, \dots, r$). Этот факт будет использоваться и при разборе других случаев.

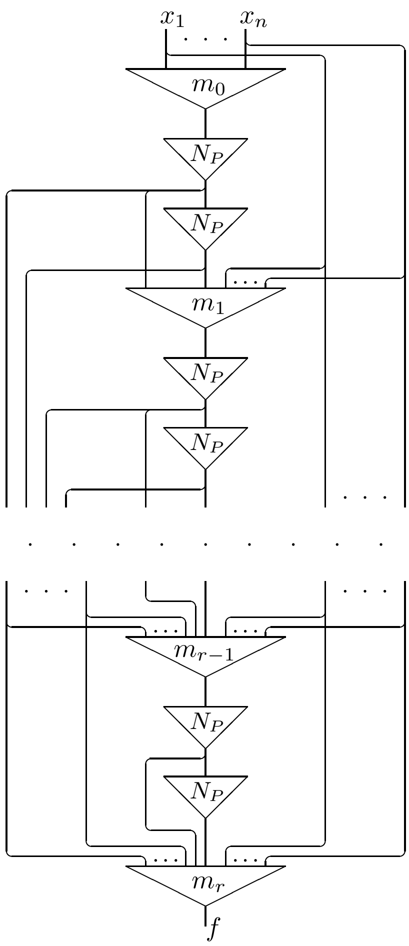


Рис. 4

Используя теперь ограничение снизу на величину $d(f)+1$ из условия случая, имеем равенства $\tau(d(f)+1)=3$ и $\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil = r+1$. Следовательно,

$$L_{B_P}(f) \leqslant 3(r+1)+1 = 3\left(\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil - 1\right) + \tau(d(f)+1)+1.$$

Случай 2°. Пусть для некоторого целого неотрицательного $r$ выполняются неравенства $4\cdot 3^{r-1} < d(f)+1 \leqslant 2\cdot 3^r$.

В случае выполнения соотношения $d(f)+1 \leqslant 2\cdot 3^r$ задача построения схемы для функции $f$ применением леммы 14 сводится к задаче построения схемы для некоторой функции $g$, удовлетворяющей условию $d(g)+1 \leqslant \lceil (d(f)+1)/2 \rceil$, а с учётом условий случая — и неравенству $d(g)+1 \leqslant 3^r$.

Используя для построения схемы для функции $g$ способ, использовавшийся в случае 1°, и учитывая монотонность суперпозиции монотонных функций, получаем для функции $f$ схему в базисе $B_P$ сложности не более $2+(3r+1)$.

Учитывая теперь и ограничение снизу на величину $d(f)+1$ из условия случая, имеем равенства $\tau(d(f)+1)=2$ и $\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil = r+1$. Следовательно,

$$L_{B_P}(f) \leqslant 3r+3 = 3\left(\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil - 1\right) + \tau(d(f)+1)+1.$$

Случай 3°. Пусть для некоторого целого неотрицательного $r$ выполняются неравенства $3^r < d(f)+1 \leqslant 4\cdot 3^{r-1}$.

В случае выполнения соотношения $d(f)+1 \leqslant 4\cdot 3^{r-1}$ задача построения схемы для функции $f$ двукратным применением леммы 14 сводится к задаче построения схемы для некоторой функции $g'$, удовлетворяющей условию $d(g')+1 \leqslant \lceil \lceil (d(f)+1)/2 \rceil /2 \rceil$, а с учётом условий случая — и неравенству $d(g')+1 \leqslant 3^{r-1}$.

Используя для построения схемы для функции $g'$ способ, использовавшийся в случае 1°, с учётом монотонности суперпозиции монотонных функций получаем для функции $f$ схему в базисе $B_P$ сложности не более $4+(3(r-1)+1)$.

Учитывая теперь ограничение снизу на величину $d(f)+1$ из условия случая, имеем равенства $\tau(d(f)+1)=1$ и $\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil = r+1$. Следовательно,

$$L_{B_P}(f) \leqslant 3r+2 = 3\left(\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil - 1\right) + \tau(d(f)+1)+1.$$

Все случаи рассмотрены. Теорема 3 доказана.

## 3. Заключительные замечания

Объединим оценки теорем 2 и 3 в одно утверждение.

**Теорема 4.** *Для любого натурального $n \geqslant 4$ для функции Шеннона $L_{B_P}(n)$ сложности реализации функций $k$-значной логики ($k \geqslant 3$) в базисе $B_P$ справедливо равенство*

$$L_{B_P}(n) = 3\left(\lceil \log_3 T(k,n) \rceil - 1\right) + \tau(T(k,n)) + 1.$$

**Замечание 2.** Для произвольной функции многозначной логики $f$, удовлетворяющей условию $d(f) \geqslant 2$, теоремы 1 и 3 дают нижнюю и верхнюю оценки величины $L_{B_P}(f)$, отличающиеся на единицу:

$$W(d(f)+1) \leqslant L_{B_P}(f) \leqslant W(d(f)+1) + 1.$$

Оценим величину $L_{B_P}(f)$ для произвольной функции многозначной логики $f$, удовлетворяющей условию $d(f) < 2$.

Пусть $d(f) = 0$. Тогда функция $f$ монотонна. Если $f$ — переменная, то $L_{B_P}(f) = 0$. Для всех остальных монотонных функций выполняется равенство $L_{B_P}(f) = 1$.

Пусть $d(f) = 1$. Функции вида $x_i + 1 \pmod k$ имеют в базисе $B_P$ сложность, равную единице. Для реализации любой другой функции $f$, имеющей единичный спад, требуется как минимум два элемента. С другой стороны, в силу теоремы 3 для любой функции $f$, удовлетворяющей условию $d(f) = 1$, выполняется неравенство $L_{B_P}(f) \leqslant 3$.

Тем самым для всех функций многозначной логики либо найдено точное значение сложности реализации схемами в базисе $B_P$, либо установлены нижняя и верхняя оценки, отличающиеся не более чем на единицу.

Приведём пример последовательности функций, для которых нижняя оценка из теоремы 1 является точным значением сложности.

Пусть $k \geqslant 3$ и $t$ — натуральный параметр. При выполнении условия $n \geqslant \frac{2t-1}{k-1}$ в $E_k^n$ найдётся цепь из $2t$ наборов $\widetilde{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$, $i = 1, \ldots, 2t$.

Обозначим через $f(x, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ функцию $k$-значной логики, принимающую значение 1 на $t$ наборах из $E_k^{2n+1}$ вида

$$(0, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}, 0, \ldots, 0), \quad i = 1, 3, \ldots 2t-1,$$

и на $t$ наборах из $E_k^{2n+1}$ вида

$$(k-1, k-1, \ldots, k-1, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}), \quad i = 1, 3, \ldots 2t-1,$$

а на остальных наборах принимающую значение 0.

Далее обозначим через $g(y, x, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ функцию $k$-значной логики, принимающую значение 1 на $t$ наборах из $E_k^{2n+2}$ вида

$$(1, 0, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}, 0, \ldots, 0), \quad i = 1, 3, \ldots 2t - 1,$$

и на $t$ наборах из $E_k^{2n+2}$ вида

$$(0, k - 1, k - 1, \ldots, k - 1, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}), \quad i = 1, 3, \ldots 2t - 1,$$

а на остальных наборах принимающую значение 0.

Для введённых функций выполняются следующие равенства:

$$d(f) = 2t, \quad d(g) = t,$$
$$g(N_P(x), x, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) = f(x, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n).$$

В силу последнего соотношения выполняется неравенство

$$L_{B_P}(f) \leqslant L_{B_P}(g) + 1.$$

Из теоремы 3 следует оценка

$$L_{B_P}(g) \leqslant W(t + 1) + 1.$$

Поэтому если при некотором натуральном значении $s$ выполняется условие $0{,}5{\cdot}3^s < n < 4{\cdot}3^{s-1}$, то при $t \geqslant 2$ с использованием леммы 3 получаем:

$$L_{B_P}(f) \leqslant L_{B_P}(g) + 1 \leqslant W(t + 1) + 2 = W(2t + 1) = W(d(f) + 1).$$

В качестве $t = t(m)$ можно взять, например, $3^m$.

**Замечание 3.** Возвращаясь ко второму рассматриваемому в [6] бесконечному базису функций $k$-значной логики ($k \geqslant 2$) — базису $B_L$, состоящему из отрицания Лукасевича и всех монотонных функций, — отметим, что для сложности $L_{B_L}(f)$ реализации произвольной функции $f$ схемами в базисе $B_L$ справедливы следующие оценки:

$$2\lceil \log_k(d(f) + 1)\rceil - 1 \leqslant L_{B_L}(f) \leqslant 2\lceil \log_k(d(f) + 1)\rceil + 1.$$

Верхняя оценка без особых трудностей может быть извлечена из доказательства теоремы 3 из [6]. Доказательство нижней оценки, несмотря на идейную близость с доказательством теоремы 1, имеет ряд существенных отличий, которые не дают возможности в той или иной степени «объединить» эти доказательства или вести их параллельно. Поэтому доказательство указанной нижней оценки величины $L_{B_L}(f)$, как и нахождение точного значения соответствующей функции Шеннона, характеризующей сложность реализации самой сложнореализуемой функции от заданного числа переменных схемами в базисе $B_L$, осталось за рамками данной работы.

**Замечание 4.** Функции $k$-значной логики $x+1 \pmod k$ и $k-1-x$ при $k=2$ «схлопываются» в обычное булево отрицание, а бесконечные базисы $B_P$ и $B_L$ в этом случае совпадают. Поэтому нижняя оценка величины $L_{B_L}(f)$, указанная в замечании 3, не позволяет распространить верхнюю оценку из теоремы 3 на случай $k=2$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Карпова Н. А.** О некоторых свойствах функций Шеннона // Мат. заметки. 1970. Т. 8, вып. 5. С. 663–674.
2. **Касим-Заде О. М.** О сложности схем в одном бесконечном базисе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1994. № 6. С. 40–44.
3. **Касим-Заде О. М.** О порядках роста функций Шеннона сложности схем над бесконечными базисами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 3. С. 55–57.
4. **Кочергин В. В.** Теория вентильных схем (современное состояние) // Дискретная математика и её приложения. Вып. 7. М.: Изд-во ИПМ РАН, 2013. С. 23–40.
5. **Кочергин В. В., Михайлович А. В.** О сложности схем в базисах, содержащих монотонные элементы с нулевыми весами // Прикл. дискрет. математика. 2015. № 4. С. 24–31.
6. **Кочергин В. В., Михайлович А. В.** О минимальном числе отрицаний при реализации систем функций $k$-значной логики // Дискрет. математика. 2016. Т. 28, вып. 4. С. 80–90.
7. **Лупанов О. Б.** О синтезе схем из пороговых элементов // Пробл. кибернетики. Вып. 26. М.: Наука, 1973. С. 109–140.
8. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
9. **Марков А. А.** Об инверсионной сложности систем функций // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116, № 6. С. 917–919.
10. **Марков А. А.** Об инверсионной сложности систем булевых функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 3. С. 477–479.
11. **Нечипорук Э. И.** О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами // Пробл. кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 123–160.
12. **Нечипорук Э. И.** О синтезе схем из пороговых элементов // Пробл. кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 49–62.

13. **Подольская О. В.** Сложность реализации симметрических булевых функций схемами в базисе антицепных функций // Дискрет. математика. 2015. Т. 27, вып. 3. С. 95–107.
14. **Сэвидж Д. Е.** Сложность вычислений. М.: Факториал, 1998.
15. **Blais E., Canonne C. L., Oliveira I. C., Servedio R. A., Tan L.-Y.** Learning circuits with few negations // Electron. Colloq. Comput. Complex. Rep. No. 144. 2014.
16. **Gilbert E. N.** Lattice theoretic properties of frontal switching functions // J. Math. Phys. 1954. V. 33, No. 1. P. 57– 67.
17. **Guo S., Malkin T., Oliveira I. C., Rosen A.** The power of negations in cryptography // Theory of cryptography. Heidelberg: Springer-Verl., 2015. P. 36–65. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9014).
18. **Fischer M. J.** The complexity of negation-limited networks — A brief survey // Automata theory and formal languages. Berlin: Springer-Verl., 1975. P. 71–82. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 33).
19. **Jukna S.** Boolean function complexity: Advances and frontiers. Heidelberg: Springer-Verl., 2012. (Algorithms Comb.; Vol. 27).
20. **Kochergin V. V., Mikhailovich A. V.** Some extensions of the inversion complexity of Boolean functions. 2015. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:1506.04485).
21. **Kochergin V. V., Mikhailovich A. V.** Inversion complexity of functions of multi-valued logic. 2015. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv: 1510.05942).
22. **Morizumi H.** A note on the inversion complexity of Boolean functions in Boolean formulas. 2008. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv: 0811.0699).
23. **Pippenger N.** The mimimum number of edges in graphs with prescribed paths // Math. Syst. Theory. 1979. V. 12, No. 4. P. 325–346.
24. **Sung S., Tanaka K.** Limiting negations in bounded-depth circuits: An extension of Markovs theorem // Algorithms and computation. Heidelberg: Springer-Verl., 2003. P. 108–116. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2906).

*Кочергин Вадим Васильевич,*
*Михайлович Анна Витальевна*

Статья поступила
4 августа 2017 г.

Исправленный вариант —
6 октября 2017 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2018. Volume 25, No. 1. P. 42–74

UDC 519.714 DOI: 10.17377/daio.2018.25.587

# ON THE COMPLEXITY OF MULTIVALUED LOGIC FUNCTIONS OVER SOME INFINITE BASIS

*V. V. Kochergin*[1,a] and *A. V. Mikhailovich*[2,b]

[1]Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russia

[2]National Research University “Higher School of Economics”,
20 Myasnitskaya St., 101000 Moscow, Russia

*E-mail*: [a]vvkoch@yandex.ru, [b]avmikhailovich@gmail.com

**Abstract.** Under study is the complexity of the realization of $k$-valued logic functions ($k \geqslant 3$) by logic circuits in the infinite basis consisting of the Post negation (i.e., the function $(x+1) \bmod k$) and all monotone functions. The complexity of the circuit is the total number of elements of this circuit. For an arbitrary function $f$, we find the lower and upper bounds of complexity which differ from one another at most by 1 and have the form $3\log_3(d(f)+1)+O(1)$, where $d(f)$ is the maximal number of the decrease of the value of $f$ taken over all increasing chains of tuples of values of the variables. We find the exact value of the corresponding Shannon function which characterizes the complexity of the most complex function of a given number of variables. Illustr. 4, bibliogr. 24.

**Keywords:** multivalued logic functions, logic circuit, infinite basis, inversion complexity.

## REFERENCES

1. **N. A. Karpova,** Some properties of Shannon functions, *Mat. Zametki,* **8**, No. 5, 663–674, 1970 [Russian]. Translated in *Math. Notes,* **8**, No. 5, 843–849, 1970.
2. **O. M. Kasim-Zade,** Complexity of circuits in an infinite basis, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1,* No. 6, 40–44, 1994 [Russian].
3. **O. M. Kasim-Zade,** Orders of growth of Shannon functions for circuit complexity over infinite bases, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1,* No. 3, 55–57, 2013 [Russian]. Translated in *Mosc. Univ. Math. Bull.,* **68**, No. 3, 170–172, 2013.
4. **V. V. Kochergin**, Theory of rectifier circuits (the current state), in *Diskretnaya matematika i eyo prilozheniya* (Discrete Mathematics and Its Applications), Vol. 7, pp. 23–40, Izd. IPM RAN, Moscow, 2013 [Russian]. Available at http://www.keldysh.ru/dmschool/datastore/media/ dmsc9_lect7.pdf (accessed Nov. 16, 2017).

5. **V. V. Kochergin** and **A. V. Mikhailovich,** On the complexity of circuits in bases containing monotone elements with zero weights, *Prikl. Diskretn. Mat.,* No. 4, 24–31, 2015 [Russian].
6. **V. V. Kochergin** and **A. V. Mikhailovich,** The minimum number of negations in circuits for systems of multi-valued functions, *Diskretn. Mat.,* **28**, No. 4, 80–90, 2016 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **27**, No. 5, 295–302, 2017.
7. **O. B. Lupanov,** The synthesis of circuits from threshold elements, *Problemy Kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 26, pp. 109–140, Nauka, Moscow, 1973 [Russian].
8. **O. B. Lupanov,** *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem* (Asymptotic Estimations of Complexity of Control Systems), Izd. Mosk. Univ., Moscow, 1984 [Russian].
9. **A. A. Markov,** On the inversion complexity of a system of functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **116**, No. 6, 917–919, 1957 [Russian]. Translated in *J. ACM,* **5**, No. 4, 331–334, 1958.
10. **A. A. Markov,** On the inversion complexity of systems of Boolean functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **150**, No. 3, 477–479, 1963 [Russian]. Translated in *Sov. Math., Dokl.,* **4**, 694–696, 1963.
11. **E. I. Nechiporuk,** On the complexity of circuits in some bases containing nontrivial elements with zero weights, *Problemy Kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 8, pp. 123–160, Fizmatgiz, Moscow, 1962 [Russian].
12. **E. I. Nechiporuk,** On a synthesis of schemes of threshold elements, *Problemy Kibernetiki* (Problems of Cybernetics), Vol. 11, pp. 49–62, Nauka, Moscow, 1964 [Russian].
13. **O. V. Podolskaya,** Circuit complexity of symmetric Boolean functions in an antichain basis, *Diskretn. Mat.,* **27**, No. 3, 95–107, 2015 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **26**, No. 1, 31–40, 2016.
14. **J. E. Savage,** *The Complexity of Computing*, Wiley, New York, 1976. Translated under the title *Slozhnost' vychislenii,* Faktorial, Moscow, 1998 [Russian].
15. **E. Blais, C. L. Canonne, I. C. Oliveira, R. A. Servedio,** and **L.-Y. Tan,** Learning circuits with few negations, *Electron. Colloq. Comput. Complex.,* Rep. No. 144, 2014. Available at http://eccc.weizmann.ac.il/report/2014/144/download (accessed Nov. 16, 2017).
16. **E. N. Gilbert**, Lattice theoretic properties of frontal switching functions, *J. Math. Phys.,* **33**, No. 1, 57–67, 1954.
17. **S. Guo, T. Malkin, I. C. Oliveira,** and **A. Rosen,** The power of negations in cryptography, in *Theory of Cryptography,* pp. 36–65, Springer, Heidelberg, 2015 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9014).
18. **M. J. Fischer,** The complexity of negation-limited networks — A brief survey, in *Automata Theory and Formal Languages,* pp. 71–82, Springer-Verl., Berlin, 1975 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 33).

19. **S. Jukna,** *Boolean Function Complexity: Advances and Frontiers,* Springer, Heidelberg, 2012 (Algorithms Comb., Vol. 27).
20. **V. V. Kochergin** and **A. V. Mikhailovich,** Some extensions of the inversion complexity of Boolean functions, 2015 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1506.04485).
21. **V. V. Kochergin** and **A. V. Mikhailovich,** Inversion complexity of functions of multi-valued logic, 2015 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1510.05942).
22. **H. Morizumi,** A note on the inversion complexity of Boolean functions in Boolean formulas, 2008 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:0811.0699).
23. **N. Pippenger,** The minimum number of edges in graphs with prescribed paths, *Math. Syst. Theory,* **12**, No. 4, 325–346, 1979.
24. **S. Sung** and **K. Tanaka,** Limiting negations in bounded-depth circuits: An extension of Markovs theorem, *Algorithms and Computation,* pp. 108–116, Springer, Heidelberg, 2003 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 2906).

*Vadim V. Kochergin,*
*Anna V. Mikhailovich*

Received
4 August 2017
Revised
6 October 2017