S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 514.172, 515.12
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 52A20,
54D70

О ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКЕ ГРАНИЦЫ МНОЖЕСТВА

И.В. Поликанова

Представлено П.П. Петровым

Abstract: The article studies the conditions for the coincidence of the convex hulls of the set, its boundary and its closure in n-dimensional Euclidean space E^n. The concept of the **P**-property of a set in E^n is introduced: the convex hull of the closure of the set coincides with the convex hull of its boundary. The necessary conditions and some sufficient conditions for executing the P-property are given. Statements are proven that characterize the set "as a whole" by its boundary.

Main results.

1. If a set Y contains the boundary of a set X and its complement is connected, then it contains either the set X or its complement.

2. If the boundary of a set X with **P**-property is contained in a convex set Y, then the closure of X is contained in Y.

3. A necessary condition for the presence of the **P**-property: the set does not contain open half-spaces.

4. If the boundary of the set X in E^n is bounded, then for $n > 1$ either the set X itself or its complement is bounded.

Methods of proof – topological, based on the facts of the theory of convex bodies in E^n.

Keywords: boundary of a set, convex hull, convex hull of a boundary of a set, property **P** of set.

Polikanova, I.V., On the convex hull of the boundary.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

1 Введение

Выпуклые оболочки находят широкое применение в экономике, физике, биологии и в самой математике. Но большая часть литературы по данной теме посвящена поискам эффективных алгоритмов построения выпуклых оболочек. Что же касается топологических аспектов, то результатов в этой сфере не так много. Это вошедшие во все учебники по выпуклому анализу утверждения об открытости выпуклой оболочки открытого множества и компактности – компактного множества [1], ставшая уже классикой теорема Крейна-Мильмана [2] о том, что выпуклая оболочка компакта совпадает с выпуклой оболочкой её крайних точек и теорема Крейна-Смулиана, являющаяся её обобщением в банаховых пространствах [3], а также другие её аналоги – теоремы Кли и Страшевича, с которыми можно ознакомиться в [1], теорема Густина о том, что всякая внутренняя точка выпуклой оболочки некоторого множества X в n-мерном евклидовом пространстве E^n является внутренней точкой выпуклой оболочки подмножества X, состоящего не более, чем из $2n$ точек [4]. Сакумо Ицумо исследовал условия замкнутости выпуклой оболочки замкнутого множества [5]. Седых В.Д. составил список нормальных форм сингулярностей границы выпуклой оболочки замкнутой компактной кривой в E^3 [6]. Автор данной публикации выявил условия принадлежности кривой границе своей выпуклой оболочки [7], по сути, переоткрыв более ранний результат Густина У. [8], ознакомиться с которым довелось уже после опубликования статьи.

Наша цель – определить факторы, при которых включение границы множества X в множество Y влекло бы включение в Y самого множества X или его дополнения. Как показано в статье, к ним относятся: 1) связность дополнения множества Y в произвольном топологическом пространстве, и как следствие – гомеоморфность $(n-1)$-мерной сфере границы множества $Y \subset E^n$; 2) выпуклость множества $Y \subset E^n$ и ограниченность границы множества X. В случае, если множество X обладает **P**-свойством, а Y – выпуклое множество в E^n, то имеет место безальтернативный вариант: $X \subset Y$. В работе представлено необходимое условие обладания множеством X **P**-свойством: X не содержит полупространств. Есть предположение, что оно является и достаточным. Найдены некоторые достаточные условия для **P**-свойства.

В разделе 2 доказывается теорема об альтернативе, в разделе 3 – некоторые свойства выпуклых оболочек границ множеств. В разделе 4 вводится понятие **P**-свойства множества в E^n: выпуклая оболочка замыкания множества совпадает с выпуклой оболочкой его границы; приведены необходимые и некоторые достаточные условия **P**-свойства. В разделе 5 доказаны утверждения, характеризующие множество "в целом" по его границе.

Методы доказательства – топологические, с опорой на факты теории выпуклых тел в E^n.

2 Теорема об альтернативе.

В этом разделе множества рассматриваются в произвольном топологическом пространстве. Обозначения: $C(X)$, clX, $intX$, ∂X, $f(X)$ – соответственно дополнение, замыкание, внутренность, граница множества X и его образ при отображении f.

В дальнейшем нам неоднократно придётся обращаться к следующему важному топологическому факту

Предложение 1. *([9], с. 120, теорема 7_G) Если связное множество X содержится в объединении двух непересекающихся открытых множеств, то оно целиком содержится в одном из этих множеств.*

Теорема 1. *(Об альтернативе.)* [10] *Пусть множества X, Y таковы, что $C(Y)$ связное множество и $\partial X \subset Y$. Тогда либо $cl\ X \subset Y$ либо $cl\ C(X) \subset Y$.*

Доказательство. $\partial X \subset Y \Rightarrow C(Y) \subset C(\partial X)$. Но ([10] формула (11))

$$C(\partial X) = C(clX) \cup intX.$$

Принимая во внимание, что $intX$, $C(clX)$ – непересекающиеся открытые множества, а множество $C(Y)$ связно, на основании предложения 1 делаем вывод, что

$$C(Y) \subset intX \quad \text{либо} \quad C(Y) \subset C(clX).$$

Если $C(Y) \subset intX$, то $C(intX) \subset Y$. А так как $intX \subset X$, то $C(X) \subset C(intX)$, следовательно $C(X) \subset Y$. Но $\partial(C(X)) = \partial X \subset Y$. Значит

$$cl\ C(X) = C(X) \cup \partial(C(X)) \subset Y.$$

Если же $C(Y) \subset C(clX)$, то $clX \subset Y$. Готово. □

Следствие 1. *Пусть множества X, Y таковы, что Y связное множество и $\partial X \subset C(Y)$. Тогда либо $X \subset C(Y)$ либо $Y \subset X$.*

Доказательство. По теореме 1 включение $\partial X \subset C(Y)$ в случае связного множества Y влечёт альтернативу: $cl\ X \subset C(Y)$ либо $cl\ C(X) \subset C(Y)$, откуда следует: $X \subset C(Y)$ либо $C(X) \subset C(Y)$. Последнее включение равносильно включению $Y \subset X$. Доказано. □

3 Выпуклые оболочки множества.

Начиная с этого раздела множества рассматриваются в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Точки обозначаем заглавными буквами латинского алфавита. Для точек A, B, M пространства E^n полагаем: $[AB]$ – отрезок с концами A и B; $|AB|$ – евклидово расстояние между A и B; $\overrightarrow{AB}$ – вектор с началом A и концом B; $A - M - B$ – коллинеарные точки A, B, M, причём, M лежит на их общей прямой между A и B.

Приведём необходимые сведения из теории выпуклых множеств.

Множество X в E^n называется *выпуклым*, если вместе с каждыми двумя своими точками A, B оно содержит и отрезок $[AB]$. Выпуклое множество с непустой внутренностью будем называть *выпуклым телом.*

Гиперплоскость δ называется *опорной* к множеству X, если пересечение её с clX не пусто и множество X содержится в одном из полупространств с границей δ.

Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество X, называется *выпуклой оболочкой множества* X и обозначается $Co\,X$.

Предложение 2. *([1], с. 9, теорема 1.6) Внутренность и замыкание выпуклого множества выпуклы.*

Предложение 3. *([1], с. 25, теорема 3.2) Через каждую точку границы замкнутого выпуклого множества проходит по крайней мере одна опорная к нему гиперплоскость.*

Предложение 4. *([11], с. 69, теорема 3) Каждая точка M, не принадлежащая замкнутому выпуклому множеству $X \subset E^n$, отделяется от него некоторой опорной гиперплоскостью к X.*

Предложение 5. *Для любых X, $Y \subset E^n$*

a) $X \subset CoX$;

b) $X \subset Y \;\Rightarrow\; CoX \subset CoY$;

c) $Co(X \cup Y) = Co(CoX \cup CoY)$;

d) если X – выпуклое множество, то $CoX = X$, в частности, $Co(CoX) = CoX$;

e) если X – компактное множество, то CoX – также компактное множество;

f) (теорема Каратеодори) CoX есть объединение всех m-мерных симплексов в E^n $(m \leqslant n)$ с вершинами в X.

Доказательство. Свойства a), b), d) непосредственно вытекают из определения выпуклой оболочки множества X как минимального по включению выпуклого множества, содержащего данное множество X, c) ([11], с. 66, теорема 10), e), f) ([1], с. 20, 18, теорема 2.6, теорема 2.4). $\square$

Предложение 6. *([10], теорема 5) Для выпуклого тела X справедливы формулы:*

$$\partial(clX) = \partial X = \partial(intX).$$

Предложение 7. *Для выпуклого тела X если $clX = E^n$, то $X = E^n$.*

Доказательство. Если допустить, что $X \neq E^n$, то для точки $M \notin X$ существует флаговое полупространство S_M, содержащее множество X ([1], с. 12, теорема 1.9). Замыкание его представляет собой обычное замкнутое полупространство, что следует из его структуры ([1], с. 12, теорема 1.10) Тогда $clX = E^n \subset clS_M$. Противоречие: пространство E^n содержится в собственном полупространстве. Допущение ложно. $\square$

Теорема 2. *Для любого* $X \subset E^n$

$$Co(clX) \setminus clX \subset Co(\partial X). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $M \in Co(clX) \setminus clX$. Так как $M \in Co(clX)$, то по предложению 5f) найдётся m-мерный симплекс S, $m \leq n$, с вершинами A_0, A_1,... , A_m в clX, содержащий точку M, т.е.

$$M = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + ... + \alpha_m A_m \tag{2}$$

при некоторых числах α_0, α_1,...,α_m таких, что

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 0, ..., m, \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1. \tag{3}$$

Для всех $i = 0, ..., m$ справедливо: $[MA_i] \cap \partial X \neq \emptyset$. Для $A_i \in \partial X$, это очевидно. Если $A_i \in intX$, то поскольку $M \in C(clX)$, отрезок $[A_i M]$ пересекает ∂X, иначе он бы содержался в объединении $intX \cup C(clX)$ двух открытых непересекающихся множеств и в силу связности должен был бы целиком содержаться в одном из них (предложение 1), пришли бы к противоречию. Пусть точка $B_i \in [MA_i] \cap \partial X$ – произвольная, $i = 0, ..., m$. Существует число β_i такое, что $\overrightarrow{MA_i} = \beta_i \overrightarrow{MB_i}$. Ясно, что $\beta_i \geq 1$ и

$$A_i = (1 - \beta_i)M + \beta_i B_i, \tag{4}$$

в частности, если $B_i = A_i$, то $\beta_i = 1$. Подставим выражения для A_i из формул (4) в (2):

$$M = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i [(1 - \beta_i)M + \beta_i B_i] \quad \Rightarrow$$

$$M = \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i\right) M - \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \beta_i\right) M + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \beta_i B_i.$$

Учитывая, что $\beta_i \geq 1$, и принимая во внимание (3), имеем: $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \beta_i \geq 1$. Тогда последнее равенство можно переписать в виде:

$$\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \beta_i\right) M = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \beta_i B_i.$$

После обозначений

$$\lambda_i = \frac{\alpha_i \beta_i}{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \beta_i}$$

оно примет вид:

$$M = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i B_i, \text{ где } 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1.$$

Так как все $B_i \in \partial X$, $i = 0, ..., m$, то по предложению 5f) это означает, что $M \in Co(\partial X)$. Доказано. $\square$

Следствие 2. *Для любого* $X \subset E^n$

$$Co(clX) \setminus Co(\partial X) \subset clX. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем сначала, что для любых множеств A, B, D:

$$A \setminus B \subset D \quad \Rightarrow \quad A \setminus D \subset A \cap B. \tag{6}$$

Действительно, $A \setminus B \subset D \quad \Rightarrow \quad C(D) \subset C(A \setminus B)$. Но

$$C(A \setminus B) = C(A \cap C(B)) = C(A) \cup B.$$

Таким образом, $C(D) \subset C(A) \cup B$. Тогда

$$A \setminus D = A \cap C(D) \subset A \cap (C(A) \cup B) = A \cap C(A) \cup A \cap B = \emptyset \cup A \cap B = A \cap B.$$

Импликация (6) установлена.

Из (1) на основании (6) выводим:

$$Co(clX) \setminus Co(\partial X) \subset Co(clX) \cap clX.$$

По предложению 5a) $clX \subset Co(clX)$, откуда следует (5). □

4 P-свойство множества.

В этом разделе будет сформулировано **P**-свойство множества и установлены его необходимое и некоторые достаточные условия.

Будем говорить, что *множество в* E^n *обладает* ***P**-свойством* , если выпуклая оболочка его замыкания совпадает с выпуклой оболочкой его границы:

$$Co(clX) = Co(\partial X), \tag{7}$$

Теорема 3. *Для того, чтобы множество* $X \subset E^n$ *обладало* ***P**-свойством, необходимо, чтобы оно не содержало открытых полупространств.*

Доказательство. Допустим противное: множество $X \subset E^n$ содержит открытое полупространство σ и для него выполняется равенство (7). Тогда

$$Co(clX) \subset Co(\partial X). \tag{8}$$

Имеем:

$$\sigma \subset X \Rightarrow C(X) \subset C(\sigma) \Rightarrow cl\ C(X) \subset cl\ C(\sigma).$$

Так как σ – открытое множество, то $C(\sigma)$ – замкнутое множество, поэтому $cl\ C(\sigma) = C(\sigma)$, следовательно, $cl\ C(X) \subset C(\sigma)$. Но $\partial C(X) \subset cl\ C(X)$, что влечёт: $\partial C(X) \subset C(\sigma)$. Учитывая, что $\partial C(X) = \partial X$, предложение 5b) и выпуклость множества $C(\sigma)$, можем записать цепочку следствий:

$$\partial X \subset C(\sigma) \ \Rightarrow \ Co(\partial X) \subset Co(C(\sigma)) = C(\sigma).$$

Таким образом, $Co(\partial X) \subset C(\sigma)$, что влечёт

$$\sigma \subset C(Co(\partial X)). \tag{9}$$

С другой стороны:

$$\sigma \subset X \;\Rightarrow\; \sigma \subset clX \;\Rightarrow\; Co(\sigma) \subset Co(clX).$$

Так как полупространство σ выпукло, то по предложению 5d) $Co(\sigma) = \sigma$. Поэтому $\sigma \subset Co(clX)$. Принимая во внимание включение (8), получим:

$$\sigma \subset Co(\partial X),$$

что противоречит соотношению (9). Допущение о том, что множество X содержит открытое полупространство, ложно. □

Замечание 1. Множество X содержит (не содержит) открытое полупространство тогда и только тогда, когда оно содержит (не содержит) замкнутое полупространство.

Теорема 4. *Если множество $X \subset E^n$ не содержит открытых полупространств, то имеет место равенство*

$$cl\ Co(clX) = cl\ Co(\partial X). \tag{10}$$

Доказательство. Докажем равносильное утверждение: *если*

$$cl\ Co(clX) \neq cl\ Co(\partial X), \tag{11}$$

то множество X включает в себя открытое полупространство.

Пусть для множества $X \subset E^n$ справедливо (11). По предложению 5b) и свойству замыканий

$$\partial X \subset clX \;\Rightarrow\; Co(\partial X) \subset Co(clX) \;\Rightarrow\; cl\ Co(\partial X) \subset cl\ Co(clX).$$

Поэтому соотношение (11) означает, что

$$cl\ Co(clX) \not\subset cl\ Co(\partial X).$$

Тогда существует точка

$$M \in Co(clX) \setminus cl\ Co(\partial X).$$

Так как множество $cl\ Co(\partial X)$ выпуклое (предложение 2) и замкнутое, то по предложению 4 существует опорная гиперплоскость δ, разделяющая точку M и множество $cl\ Co(\partial X)$. Обозначим через σ открытое полупространство с границей δ, содержащее точку M. Тогда

$$cl\ Co(\partial X) \subset C(\sigma).$$

На основании предложения 5a) имеем:

$$\partial X \subset Co(\partial X) \subset cl\ Co(\partial X),$$

что влечёт: $\partial X \subset C(\sigma)$. Множество $C(C(\sigma)) = \sigma$ связное. По следствию 1 справедливо:

$$X \subset C(\sigma) \quad \text{или} \quad \sigma \subset X.$$

Так как

$$Co(clX) \setminus cl\ Co(\partial X) \subset Co(clX) \setminus Co(\partial X),$$

то $M \in Co(clX) \setminus Co(\partial X)$. По следствию 2 верно: $M \in clX$. Если бы выполнялась первая альтернатива $X \subset C(\sigma)$, то вследствие замкнутости множества $C(\sigma)$ имели бы: $clX \subset C(\sigma)$, а значит $M \in C(\sigma)$. В то же время $M \in \sigma$, что привело бы к ложному заключению: $C(\sigma) \cap \sigma \neq \emptyset$. Поэтому реализуется второй вариант: $\sigma \subset X$, что и требовалось установить. □

Приведём некоторые достаточные условия **P**-свойства .

Теорема 5. *Множество $X \subset E^n$ и его дополнение $C(X)$ одновременно обладают **P**-свойством тогда и только тогда, когда одновременно не содержат открытых полупространств. В этом случае*

$$Co(clX) = Co(clC(X)) = E^n. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть множества X и $C(X)$ не содержат открытых полупространств. По теореме 4 справедливо:

$$cl\ Co(clX) = cl\ Co(\partial X), \quad cl\ Co(clC(X)) = cl\ Co(\partial C(X)).$$

В силу равенства $\partial X = \partial C(X)$, заключаем, что

$$cl\ Co(clX) = cl\ Co(clC(X)). \tag{13}$$

Если допустить, что $cl\ Co(clX)$ не совпадает с E^n, то существует опорное замкнутое полупространство $\overline{\sigma}$ к множеству $cl\ Co(clX)$, так что:

$$cl\ Co(clX) = cl\ Co(clC(X)) \subset \overline{\sigma}.$$

Так как
$$X \subset clX \subset Co(clX) \subset cl\ Co(clX),$$
$$C(X) \subset clC(X) \subset Co(clC(X)) \subset cl\ Co(clC(X)),$$
то
$$E^n = X \cup C(X) \subset \overline{\sigma}.$$
Пришли к противоречию. Поэтому

$$cl\ Co(clX) = cl\ Co(\partial X) = cl\ Co(\partial C(X)) = cl\ Co(clC(X)) = E^n.$$

По предложению 7 отсюда следует, что

$$E^n = Co(clX) = Co(\partial X) = Co(\partial C(X)) = Co(clC(X)).$$

Это означает, что множества X и $C(X)$ обладают **P**-свойством и выполнено соотношение (12).

Пусть, наоборот, множество $X \subset E^n$ и его дополнение $C(X)$ одновременно обладают **P**-свойством, т.е. выполняются равенства:

$$Co(clX) = Co(\partial X), \quad Co(clC(X)) = Co(\partial C(X)).$$

По теореме 3 множества X и $C(X)$ не содержат открытых полупространств. Принимая во внимание, что $\partial X = \partial C(X)$, заключаем, что

$$Co(clX) = Co(clC(X)),$$

а это равенство влечёт формулу (13). Повторяя следующие за ней рассуждения, убеждаемся в справедливости равенств (12). □

Теорема 6. *Ограниченное множество в E^n обладает $\boldsymbol{P}$-свойством.*

Доказательство. Так как множество X ограничено, то его замыкание clX и граница ∂X также ограничены и, будучи замкнутыми множествами в E^n, компактны. По предложению 5e) их выпуклые оболочки $Co(clX)$ и $Co(\partial X)$ также компактны, а значит, замкнуты. Поэтому

$$Co(clX) = cl(Co(clX)), \quad Co(\partial X) = cl(Co(\partial X)) \tag{14}$$

Поскольку ограниченное множество не содержит открытых полупространств, то по теореме 4 выполняется равенство (10), которое в силу соотношений (14) приводит к равенству

$$Co(clX) = Co(\partial X).$$

Доказано. □

Теорема 7. *Если множество $X \subset E^n$ с непустой внутренностью таково, что через каждую его внутреннюю точку M проходит прямая, пересекающая ∂X по крайней мере в двух точках, между которыми оказывается заключённой точка M, то оно обладает $\boldsymbol{P}$-свойством.*

Доказательство. Пусть множество X обладает указанным в условии теоремы свойством, $M \in clX$. Если $M \in \partial X$, то $M \in Co(\partial X)$ по предложению 5a). Если $M \in intX$, то найдётся прямая l, пересекающая ∂X в точках A и B таких, что $A - M - B$. Тогда $M \in [AB]$, и следовательно $M \in Co(\partial X)$. Таким образом

$$M \in clX \;\Rightarrow\; M \in Co(\partial X),$$

что доказывает включение

$$clX \subset Co(\partial X).$$

На основании предложения 5b),d) выводим

$$Co(clX) \subset Co(Co(\partial X)) = Co(\partial X) \quad \Rightarrow \quad Co(clX) \subset Co(\partial X).$$

Обратное включение вытекает из соотношения $\partial X \subset clX$ на основании предложения 5b). Таким образом, равенство (7) для множества X выполнено. □

Теорема 8. *Пусть $X \subset E^n$.*

1. *Если множество X замкнуто, то*

$$Co(\partial X) \subset CoX. \tag{15}$$

2. *Если множество X ограничено, то*

$$CoX \subset cl(CoX) = Co(clX) = Co(\partial X). \tag{16}$$

3. *Если множество X компактно, то*

$$CoX = Co(clX) = Co(\partial X). \tag{17}$$

Доказательство. 1. Если множество X замкнуто, то (15) вытекает из соотношений $\partial X \subset clX = X$ на основании предложения 5a).

2. Пусть множество X ограничено. Первое включение в (16) очевидно, второе равенство следует из теоремы 6. Остаётся доказать центральное равенство. Докажем сначала включение

$$cl(CoX) \subset Co(clX). \tag{18}$$

По предложению 5b), свойствам замыканий и первому равенству в (14) имеем:

$$X \subset clX \Rightarrow CoX \subset Co(clX) \quad \Rightarrow \quad cl(CoX) \subset cl(Co(clX)) = Co(clX),$$

откуда и следует (18).

Проверим обратное включение

$$Co(clX) \subset cl(CoX). \tag{19}$$

Пусть $M \in Co(clX)$. По теореме Каратеодори найдётся m-мерный симплекс S, $m \leq n$, с вершинами A_0, A_1,... , A_m в clX, содержащий точку M, т.е. выполнено соотношение ([1], теорема 2.3)

$$M = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + ... + \alpha_m A_m$$

при некоторых числах α_0, α_1,...,α_m таких, что

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 0, ..., m, \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1.$$

Так как $A_i \in clX$, то для каждого $i = 0, 1, ..., m$ существует последовательность точек (A_{ij}) множества X, сходящаяся к A_i при $j \to \infty$. Пусть

$$M_j = \sum_{i=o}^{m} \alpha_i A_{ij}.$$

По предложению 5f) все точки $M_j \in CoX$. Тогда

$$M_j - M = \sum_{i=o}^{m} \alpha_i (A_{ij} - A_i) \to 0$$

при $j \to \infty$ в силу непрерывности операций сложения векторов и умножения вектора на число в E^n. Следовательно, $M_j \to M$ и $M \in cl(CoX)$. Тем самым доказано (19), а вместе с ним и (16).

3. Равенства (17) следуют из (15) и (16), поскольку компактное множество в E^n замкнуто и ограничено. Теорема 8 доказана полностью. □

Пример 1. *Для незамкнутого множества равенство* $CoX = Co(\partial X)$ *может не выполняться*, например, для открытого шара X.

Пример 2. *Для неограниченного множества равенство* $CoX = Co(\partial X)$ *может не выполняться*, например, для дополнения открытого шара.

Следствие 3. *Пусть X – выпуклое множество в E^n.*

1. Если множество X замкнуто, то

$$Co(\partial X) \subset X.$$

2. Если множество X ограничено, то

$$clX = Co(\partial X) = Co(clX).$$

3. Если множество X компактно, то

$$X = Co(\partial X) = Co(clX).$$

Доказательство. По предложению 5d). □

Пример 3, показывающий, что *и для выпуклого замкнутого множества равенство $Co(\partial X) = X$ может не выполняться,* например для замкнутого выпуклого полупространства, границей которого служит гиперплоскость.

5 Свойства границы, характеризующие множество в целом.

Здесь исследуется вопрос, когда включение границы ∂X в множество Y, влечёт включение самого множества X в Y.

Теорема 9. *Если ∂X – ограниченное множество в E^n, $n \geq 2$, то либо X либо $C(X)$ – ограниченное множество.*

Доказательство. Пусть ∂X – ограниченное множество в E^n, $n \geq 2$. Если $intX = \emptyset$, то $X \subset \partial X$. Значит X – ограниченное множество. Аналогично, если $int\, C(X) = \emptyset$, то $C(X) \subset \partial X$. Тогда $C(X)$ – ограниченное множество.

Пусть $intX \neq \emptyset$ и $int\, C(X) \neq \emptyset$. Допустим противное, что X и $C(X)$ оба неограниченные множества. Возьмём произвольную точку $O \in \partial X$. Обозначим через a верхнюю грань расстояний от точки O до точек множества ∂X. Так как множество ∂X ограничено, то $a < \infty$. Пусть B – шар радиуса $r > a$. Тогда вне шара B отсутствуют точки множества ∂X. Назовём часть исходящего из точки O луча, лежащую вне шара B, хвостом этого луча. Тогда хвост каждого луча с вершиной O принадлежит только одному из множеств $intX$, $int\, C(X)$. Действительно, если допустить, что на каком-нибудь из хвостов существуют точки $M \in intX$ и $N \in int\, C(X)$, то, учитывая, что $intX \cup int\, C(X) \cup \partial X = E^n$ и $intX \cap int\ C(X) = \emptyset$, мы будем вынуждены признать, что отрезок $[MN]$, будучи связным множеством, пересекает (предложение 1) множество ∂X в точке, не принадлежащей шару B, что невозможно из-за специального выбора радиуса шара B. Допустим, что существуют лучи l и m, хвосты которых лежат в разных множествах: один в $intX$, а другой – в $int\ C(X)$. Пусть S_i – последовательность сфер с центром O, радиусы которых $r_i \mapsto \infty$. Каждая из них пересекает оба луча l и

m в точках $L_i \in intX$ и $M_i \in int\ C(X)$ (при $r_i > r$). Будучи при $n \geq 2$ связными множествами, сферы пересекают ∂X. Действительно, если допустить противное, то множество S_i окажется содержащимся в объединении двух непересекающихся открытых множеств $intX$ и $int\ C(X)$, но в силу связности оно должно целиком содержаться только в одном из них (предложение 1), а это противоречит тому что S_i содержит точки L_i и M_i из обоих множеств. Пусть $A_i \in S_i \cap \partial X$, $i = 1, 2, ...$ Тогда $|OA_i| = r_i \mapsto \infty$. Поскольку $A_i \in \partial X$, то это означает неограниченность множества ∂X, что противоречит условию теоремы. Таким образом, хвосты всех лучей содержатся либо в $intX$, и это означает, что $C(B) \subset intX \subset X$, что влечёт $C(X) \subset B$, и множество $C(X)$ ограничено, либо, наоборот, хвосты всех лучей содержатся в множестве $int\ C(X)$, что означает ограниченность множества X. Теорема доказана. □

Пример 4, *показывающий, что при $n = 1$ утверждение теоремы 9 перестаёт быть верным.*

Пусть $X = [-1, 0] \cup (1, +\infty)$ в E^1. Тогда $C(X) = (-\infty, -1) \cup (0, 1]$ и граница $\partial X = \{-1, 0, 1\}$ есть ограниченное множество. Но ни X, ни $C(X)$ не являются ограниченными множествами.

Замечание 2. *Одновременно оба множества X и $C(X)$ в E^n ограниченными быть не могут*, поскольку объединение двух ограниченных множеств есть ограниченное множество, а пространство $E^n = X \cup C(X)$ неограничено. В то же время они могут быть одновременно неограниченными, например, если X – замкнутое полупространство.

Теорема 10. *Пусть множество X обладает $\mathbf{P}$-свойством, а Y – выпуклое множество в E^n и $\partial X \subset Y$. Тогда $clX \subset Y$.*

Доказательство. Если $\partial X \subset Y$, то по предложению 5b),d) $Co(\partial X) \subset CoY = Y$. По определению $\mathbf{P}$-свойства $Co(\partial X) = Co(clX)$. Поэтому $Co(clX) \subset Y$. По предложению 5a) $clX \subset Co(clX)$, что влечёт требуемое включение: $clX \subset Y$. □

Пример 5 множества X, не обладающего $\mathbf{P}$-свойством, для которого заключение теоремы неверно: X – невыпуклая часть плоскости, ограниченная параболой в E^n, а Y – содержащее эту параболу полупространство. Тогда $\partial X \subset Y$, но $clX \not\subset Y$.

Следствие 4. *Пусть X, Y – множества в E^n, $n \geq 2$, причём, Y – выпуклое множество, а ∂X – ограниченное множество и $\partial X \subset Y$. Тогда либо $clX \subset Y$ либо $cl\ C(X) \subset Y$.*

Доказательство. По теореме 9 из ограниченности ∂X вытекает ограниченность одного из множеств X, $C(X)$, что влечёт для одного из них выполнение $\mathbf{P}$-свойства (теорема 6). Так как $\partial X = \partial C(X)$, то одно из множеств X, $C(X)$ оказывается в условиях теоремы 10. □

Теорема 11. *Пусть X, $Y \subset E^n$, $n \geq 2$, и существует гомеоморфизм $f : E^n \to E^n$, отображающий множество Y в ограниченное выпуклое множество B. Тогда, если $\partial X \subset Y$, то либо $cl\ X \subset Y$ либо $cl\ C(X) \subset Y$.*

Доказательство. Так как $\partial f(X) = f(\partial X)$ ([10], теорема 3), то
$$\partial f(X) = f(\partial X) \subset f(Y) = B,$$
что влечёт ограниченность множества $\partial f(X)$. По следствию 4 имеет место альтернатива:
$$cl f(X) \subset B \quad \text{или} \quad clC(f(X)) \subset B,$$
откуда имеем:
$$f(X) \subset B \quad \text{или} \quad C(f(X)) \subset B.$$
Далее применяем свойства биективного отображения $f : Y \to Z$ ([12], с. 24, свойства (19),(21)): для любых подмножеств X множества Y и $X' \subset Z$ справедливо: 1) $f^{-1}(f(X)) = X$, 2) $C(f(X)) = f(C(X))$.

Если $f(X) \subset B$, то $f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}(B)$, что влечёт $X \subset Y$. Если $C(f(X)) \subset B$, то $f^{-1}(C(f(X)) = f^{-1}(f(C(X)) \subset f^{-1}(B)$, что влечёт $C(X) \subset Y$. А так как и $\partial X = \partial(C(X)) \subset Y$, то либо $clX \subset Y$ либо $cl\ C(X) \subset Y$. Доказано. □

Теорема 12. *Пусть S – $(n-1)$ мерное многообразие в E^n, $n \geq 2$, гомеоморфное сфере, Y – одно из ограниченных им множеств. Множество $X \subset E^n$ таково, что $\partial X \subset Y$. Тогда либо $clX \subset Y$ либо $cl\ C(X) \subset Y$. В частности, альтернатива имеет место для жордановой области Y в плоскости E^2.*

Доказательство. Данный факт вытекает из теоремы 1 об альтернативе и теоремы Жордана-Брауэра ([13], с. 423), утверждающей, что многообразие S разбивает пространство E^n, $n \geq 2$, на 2 связные компоненты и является их общей границей. □

6 Заключение.

Исследование может быть продолжено в направлении изучения иных факторов, гарантирующие включение $X \subset Y$ при условии $\partial X \subset Y$. Теоремы 1, 9-12 интересны тем, что позволяют судить о множестве в целом по его границе. Теорема 10 проигрывает теореме 1, относясь к конкретному классу топологических пространств – евклидову, с другой стороны усиливает её результат, *во-первых*, потому, что заключение носит безальтернативный характер: $clX \subset Y$ для выпуклого множества $Y \subset E^n$, *во-вторых*, справедлива и для множества Y, дополнение которого не обязательно связно, например, для множества Y, являющегося частью пространства, заключённого между двумя параллельными гиперплоскостями. Пока нами не найден пример множества, для которого выполнялось бы равенство (10), но не выполнялось бы (7). *Гипотеза* эквивалентности **P**-свойства требованию, чтобы множество не содержало открытых полупространств, остаётся в силе.

References

[1] K. Leichtweiss, *Convex sets*, Nauka, Moscow, 1985.

[2] M. Krein, D. Milman, *On extreme points of regular convex sets*, Studia Mathematica, **9**(1940), 133–138.

[3] M. Krein, D. Šmulian, *On regularly convex sets in the space conjugate to Banach space*, Annals of Mathematics, Second Series, **41**:3 (1940), 556–583.

[4] W. Gustin, *On The interior of the convex hull of a Euclidian set*, Bulletian of the American Mathematical Society, **53**:4 (1947), 299–301.

[5] Sakuma Itsuo, *Closedness of the convex hulls*, Journal of economic Theory, **14** (1977), 223–227.

[6] V.D. Sedykh, *Structure of the convex hull of a space curve*, Trudy Seminara Imen. I.G. Petrovskogo, **6** (1981), 239–256.

[7] I.V. Polikanova, *A sufficient condition for a curve to belong to boundary of its own convex hull in A^n*, Izvestiya of Altai State University, matematika i mekhanika, **126**:4 (2022), 144–149.

[8] W. Gustin *Sets of finite planar order*, Duke Math. Journal, **14**:1 (1947), 51–66.

[9] P.S. Aleksandrov, *Introduction to set theory and general topology*, Nauka, Moscow, 1977.

[10] I.V. Polikanova, *On the boundaries of sets and boundaries of convex sets*, Izvestiya Altaiskogo gosudarstvennogo Universiteta, matematika i mekhanika, **126**:4 (2023), 144–149.

[11] I.Ya. Bakelman, A.L. Werner, B.E. Kantor, *Introduction to differential geometry in whole*, Nauka, Moscow, 1973.

[12] K. Kuratovskiy, *Topology, v. 1*, Mir, Moscow, 1966.

[13] I.M. Vinogradov, *Jordan's theorem*, Math. encyclopedia, **2**, Nauka, Moscow,1979, 423.

Irina Viktorovna Polikanova
Altai State Pedagogical University,
st. Molodozhnaya, 55,
656931, Barnaul, Russia
E-mail address: Anirix1@yandex.ru