S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 510.67
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 03C50,
03C64, 03C35, 05C65, 54A05

О СВОБОДЕ И НЕЗАВИСИМОСТИ В ГИПЕРГРАФАХ МОДЕЛЕЙ ВПОЛНЕ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ С НЕМАКСИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Б.Ш. Кулпешов, С.В. Судоплатов

Представлено П.П. Петровым

Abstract: We study properties of the concepts of freedom and independence for hypergraphs of models of a quite o-minimal theory with few countable models. Conditions for freedom of sets of realizations of isolated and non-isolated types are characterized in terms of the convexity rank. In terms of weak orthogonality, characterizations of the relative independence of sets of realizations of isolated and non-isolated types of convexity rank 1 are obtained. Conditions for freedom and independence of equivalence classes are established, indicating the finite rank of convexity of a non-algebraic isolated type of a given theory. In terms of equivalence classes, the conditions for the relative freedom of isolated and non-isolated types are characterized. In terms of weak orthogonality,

Kulpeshov, B.Sh., Sudoplatov, S.V., On freedom and independence in hypergraphs of models of quite o-minimal theories with few countable models.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (гранты BR20281002 и AP19674850), а также в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева, проект № FWNF-2022-0012.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

characterizations of the relative independence of sets of realizations of isolated and non-isolated types over given equivalence relations are obtained. The transfer of the property of relative freedom of types under the action of definable bijections is proved. It is shown that for the specified conditions the non-maximality of the number of countable models of the theory is essential.

Keywords: hypergraph of models, quite o-minimality, free set, independent sets.

1 Введение

Гиперграфы моделей теории относятся к производным объектам, относительно данных теорий и их моделей, позволяющим получать существенную структурную информацию как о самих теориях, так и о сопутствующих семантических объектах, включая графовые [1, 2, 3, 4, 5].

Как показано в работах [6, 7], вполне o-минимальные теории допускают структурное описание своих счетных моделей и их классификацию.

В настоящей работе исследуются свойства понятий свободы и независимости для гиперграфов моделей вполне o-минимальной теории с немаксимальным числом счетных моделей. В терминах ранга выпуклости охарактеризованы условия свободы множеств реализаций изолированных и неизолированных типов (теоремы 1 и 5). В терминах слабой ортогональности получены характеризации относительной независимости множеств реализаций изолированных и неизолированных типов ранга выпуклости 1 (теоремы 2 и 6). Установлены условия свободы и независимости классов эквивалентности, свидетельствующих о конечном ранге выпуклости неалгебраического изолированного типа данной теории (следствие 1). В терминах классов экввиватентности охарактеризованы условия относительной свободы изолированных и неизолированных типов (теоремы 3 и 7). В терминах слабой ортогональности получены характеризации относительной независимости множеств реализаций изолированных и неизолированных типов над данными отношениями эквивалентности (теоремы 4 и 8). Доказан перенос свойства относительной свободы типов при действии определимых биекций (следствие 2). Показано, что для указанных условий существенна немаксимальность числа счетных моделей теории (примеры 1–3).

2 Предварительные сведения

Напомним, что *гиперграфом* называется любая пара множеств (X, Y), где Y — некоторое подмножество булеана $\mathcal{P}(X)$ множества X.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель полной теории T. Следуя [4], обозначим через $H(\mathcal{M})$ совокупность всех подмножеств N носителя M системы $\mathcal{M}$, которые являются носителями элементарных подмоделей $\mathcal{N}$ модели

$\mathcal{M}$: $H(\mathcal{M}) = \{N \mid \mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}\}$. Пара $(M, H(\mathcal{M}))$ называется *гиперграфом элементарных подмоделей* модели $\mathcal{M}$ и обозначается через $\mathcal{H}(\mathcal{M})$.

Определение 1. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель теории T с гиперграфом элементарных подмоделей $\mathcal{H}(\mathcal{M}) = (M, H(\mathcal{M}))$, A — бесконечное определимое множество в модели $\mathcal{M}$ местности n: $A \subseteq M^n$. Множество A называется *$\mathcal{H}$-свободным*, если для любого бесконечного множества $A' \subseteq A$ имеет место равенство $A' = A \cap Z^n$ для некоторого $Z \in H(\mathcal{M})$, содержащего параметры для A. Два $\mathcal{H}$-свободных множества A и B местности m и n соответственно называются *$\mathcal{H}$-независимыми*, если для любых бесконечных множеств $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$ найдется $Z \in H(\mathcal{M})$, содержащий параметры для A и B и такой, что $A' = A \cap Z^m$ и $B' = B \cap Z^n$.

Вспомним, что подмножество A линейно упорядоченной структуры $\mathcal{M}$ называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $\mathcal{M} = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа выпуклых множеств в $\mathcal{M}$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{M}$ — слабо о-минимальная $|A|^+$-насыщенная структура, где $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют L_A-формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(\mathcal{M})$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(\mathcal{M})$ такие что $\beta_1 \in H(\mathcal{M}, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(\mathcal{M}, \alpha)$.

Иными словами, тип p является *слабо ортогональным* типу q ($p \perp^w q$), если $p(x) \cup q(y)$ имеет единственное расширение до полного 2-типа над A.

Лемма 1. [8] *Пусть T — слабо о-минимальная теория, $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$. Тогда отношение не слабой ортогональности $\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.*

Определение 3. [9] Пусть $\mathcal{M}$ — слабо о-минимальная $|A|^+$-насыщенная структура, где $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Будем говорить что тип p не является *вполне ортогональным* типу q ($p \not\perp^q q$), если существует A-определимая биекция $f : p(\mathcal{M}) \to q(\mathcal{M})$. Будем говорить что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

3 О свободе и независимости в гиперграфах моделей для изолированных типов

Заметим, что если рассмотреть произвольный неалгебраический изолированный тип $p \in S_1(\emptyset)$ в произвольной вполне о-минимальной теории T с немаксимальным числом счетных моделей, то в любой модели $\mathcal{M} \models T$ множество $p(M)$ не будет $\mathcal{H}$-свободным, поскольку если возьмем в качестве A' некоторый замкнутый интервал $[a, b] \subset p(\mathcal{M})$, где $a < b$, то не существует $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ такой, что $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$.

Другой причиной нарушения $\mathcal{H}$-свободы является возможность взятия бесконечного множества $A' \subset p(\mathcal{M})$, не являющегося плотным, тогда как множества $p(\mathcal{M}) \cap M_1$ для моделей теории T должны быть плотными.

Произвольный открытый интервал, содержащий элемент b, будем называть *окрестностью* элемента b. Вспомним, что произвольное подмножество A линейно упорядоченной структуры M является *открытым*, если для любого $b \in A$ существует окрестность элемента b, содержащаяся в A.

Определение 4. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $\mathcal{M} \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический изолированный тип. Будем говорить, что множество $p(\mathcal{M})$ *относительно* $\mathcal{H}$*-свободно*, $\mathcal{H}$*-свободно относительно выпуклых множеств*, или $(\mathcal{H}, \mathrm{cs})$*-свободно*, если для любого открытого выпуклого множества $A' \subseteq p(\mathcal{M})$ имеет место равенство $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$ для некоторого $M_1 \in H(\mathcal{M})$.

Отметим, что наряду с тем, что гиперграфы $\mathcal{H}$ позволяют выделять все бесконечные подмножества в $\mathcal{H}$-свободных множествах, соответствующие гиперграфы для $(\mathcal{H}, \mathrm{cs})$-свободных множеств помимо выпуклых множеств без концевых точек дают возможность выделения плотных множеств без концевых точек. Например, для теории плотного линейного порядка без концевых точек таким образом выделяется любое плотное подмножество без концевых точек.

Также напомним следующие необходимые определения.

Определение 5. [11] Пусть $\mathcal{M}$ — слабо о-минимальная $|A|^+$-насыщенная структура, где $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип.
(1) L_A-формула $F(x, y)$ называется *p-сохраняющей*, если существуют α, γ_1, $\gamma_2 \in p(\mathcal{M})$ такие, что $F(\mathcal{M}, \alpha) \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$ и $\gamma_1 < F(\mathcal{M}, \alpha) < \gamma_2$.
(2) p-сохраняющая формула $F(x, y)$ называется *выпуклой вправо (влево)*, если существует $\alpha \in p(\mathcal{M})$ такой, что $F(\mathcal{M}, \alpha)$ выпукло, α — левая (правая) концевая точка множества $F(\mathcal{M}, \alpha)$ и $\alpha \in F(\mathcal{M}, \alpha)$.

Определение 6. [12] Будем говорить, что p-сохраняющая выпуклая вправо (влево) формула $F(x, y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$ таких, что $M \models F(\beta, \alpha)$, имеет место следующее:

$$M \models \forall x[x \geq \beta \to [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)]]$$
$$(M \models \forall x[x \leq \beta \to [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)]]).$$

Определение 7. [13], [14] Пусть T — слабо о-минимальная теория, $\mathcal{M} \models T$ — насыщенная модель, $A \subseteq M$. *Ранг выпуклости множества* A ($\mathrm{RC}(A)$) определяется следующим образом:

1) $\mathrm{RC}(A) = -1$, если $A = \emptyset$.
2) $\mathrm{RC}(A) = 0$, если A конечно и непусто.
3) $\mathrm{RC}(A) \geq 1$, если A бесконечно.

4) $\mathrm{RC}(A) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и $b_i \in A, i \in \omega$, удовлетворяющие следующим условиям:

- для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $\mathcal{M} \models \neg E(b_i, b_j)$
- для каждого $i \in \omega$ $\mathrm{RC}(E(\mathcal{M}, b_i)) \geq \alpha$ и $E(\mathcal{M}, b_i)$ — выпуклое подмножество множества A;

5) $\mathrm{RC}(A) \geq \delta$, если $\mathrm{RC}(A) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Для ординала α полагаем $\mathrm{RC}(A) = \alpha$, если $\mathrm{RC}(A) \geq \alpha$ и не имеет места $\mathrm{RC}(A) \geq \beta$ при $\beta > \alpha$.

Если $\mathrm{RC}(A) = \alpha$ для некоторого ординала α, то мы говорим что $\mathrm{RC}(A)$ определяется. В противном случае, т.е. если $\mathrm{RC}(A)) \geq \alpha$ для всех α, мы полагаем $\mathrm{RC}(A) = \infty$.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x, \bar{a})$, где $\bar{a} \in M$, определяется как ранг выпуклости множества $\phi(\mathcal{M}, \bar{a})$, т.е. $\mathrm{RC}(\phi(x, \bar{a})) := \mathrm{RC}(\phi(\mathcal{M}, \bar{a}))$. *Ранг выпуклости 1-типа* p определяется как ранг выпуклости множества $p(\mathcal{M})$, т.е. $\mathrm{RC}(p) := \mathrm{RC}(p(\mathcal{M}))$.

Отметим, что значение $\mathrm{RC}(p)$ не зависит от выбора модели $\mathcal{M}$, если p — изолированный тип.

Теорема 1. *Пусть T — вполне о-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M} \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический изолированный тип. Тогда множество $p(\mathcal{M})$ относительно $\mathcal{H}$-свободно* $\Leftrightarrow \mathrm{RC}(p) = 1$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть множество $p(\mathcal{M})$ относительно $\mathcal{H}$-свободно. Допустим противное: $\mathrm{RC}(p) > 1$. В силу бинарности теории T существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Возьмем произвольный элемент $a \in p(\mathcal{M})$ и рассмотрим E-класс $E(a, \mathcal{M})$. Очевидно, что $E(a, \mathcal{M})$ является открытым выпуклым множеством, и не существует элементарной подмодели $\mathcal{M}_1$ модели $\mathcal{M}$ такой, что $E(a, \mathcal{M}) = p(\mathcal{M}) \cap M_1$.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathrm{RC}(p) = 1$. Поймем что $p(\mathcal{M})$ неразличимо над $\emptyset$. В силу бинарности теории T достаточно показать, что $p(\mathcal{M})$ 2-неразличимо над $\emptyset$. Допустим противное: существуют $\langle a_1, a_2\rangle$, $\langle a_1', a_2'\rangle \in [p(\mathcal{M})]^2$ такие, что $a_1 < a_2$, $a_1' < a_2'$ и $tp(\langle a_1, a_2\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a_1', a_2'\rangle/\emptyset)$. Тогда существует $a_2'' \in p(\mathcal{M})$ такой, что $a_1 < a_2''$ и $tp(\langle a_1, a_2\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a_1, a_2''\rangle/\emptyset)$. Следовательно, существует $\emptyset$-определимая формула $\phi(x, y)$ такая, что $\mathcal{M} \models \phi(a_1, a_2) \wedge \neg\phi(a_1, a_2'')$. В силу слабой о-минимальности теории T можем считать, что множество $\phi(a_1, \mathcal{M})$ выпукло. Не умаляя общности, будем также считать что $a_2 < a_2''$. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$F(x, a_1) := x \geq a_1 \wedge \exists y[\phi(a_1, y) \wedge x \leq y].$$

Легко понять, что $F(x,y)$ — p-стабильная выпуклая вправо. Если формула $F(x,y)$ эквивалентность-генерирующая, то получаем противоречие с тем, что $\mathrm{RC}(p) = 1$. Если $F(x,y)$ не является эквивалентность-генерирующей, то это противоречит предложению 2.8 из [6]. Таким образом, $p(\mathcal{M})$ неразличимо над $\emptyset$, откуда следует, что для любого открытого выпуклого множества $A' \subseteq p(\mathcal{M})$ существует элементарная подмодель $\mathcal{M}_1$ модели $\mathcal{M}$ такая, что $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$. □

Пример 1. Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Q}, <, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, $f(x) = x + 1$ — унарная функция на $\mathbb{Q}$.

Легко понять, что $\mathcal{M}$ — о-минимальная структура, при этом теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ имеет континуум счетных моделей. Также замечаем, что $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический изолированный тип, $\mathrm{RC}(p) = 1$, но $p(\mathcal{M})$ не является относительно $\mathcal{H}$-свободным.

Определение 8. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $\mathcal{M} \models T$, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические изолированные типы, $\mathrm{RC}(p) = \mathrm{RC}(q) = 1$. Будем говорить, что $p(\mathcal{M})$ и $q(\mathcal{M})$ *относительно $\mathcal{H}$-независимы*, *$\mathcal{H}$-независимы относительно выпуклых множеств*, или *$(\mathcal{H}, \mathrm{cs})$-независимы*, если для любых открытых выпуклых множеств $A' \subseteq p(\mathcal{M})$ и $B' \subseteq q(\mathcal{M})$ найдется $M_1 \in H(\mathcal{M})$ такая, что $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$ и $B' = q(\mathcal{M}) \cap M_1$.

Отметим, что данное определение не зависит от выбора модели $\mathcal{M}$, если p и q — изолированные типы.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические типы. Напомним, что семейство 1-типов $\{p_1, \ldots, p_s\}$ называется *ортогональным над* $\emptyset$, если для любой модели $\mathcal{M}$ данной теории, любой последовательности $(n_1, \ldots, n_s) \in \omega^s$, для любых возрастающих кортежей $\bar{a}_1, \bar{a}'_1 \in [p_1(\mathcal{M})]^{n_1}, \ldots, \bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [p_s(\mathcal{M})]^{n_s}$ таких, что $tp(\bar{a}_1/\emptyset) = tp(\bar{a}'_1/\emptyset), \ldots, tp(\bar{a}_s/\emptyset) = tp(\bar{a}'_s/\emptyset)$ мы имеем $tp(\langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s \rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_1, \ldots, \bar{a}'_s \rangle/\emptyset)$.

Теорема 2. *Пусть T — вполне о-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические изолированные типы,* $\mathrm{RC}(p) = \mathrm{RC}(q) = 1$. *Тогда $p(\mathcal{M})$ и $q(\mathcal{M})$ относительно $\mathcal{H}$-независимы $\Leftrightarrow p \perp^w q$.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $p(\mathcal{M})$ и $q(\mathcal{M})$ относительно $\mathcal{H}$-независимы. Допустим противное: $p \not\perp^w q$. В силу вполне о-минимальности существует $\emptyset$-определимая биекция $f : p(\mathcal{M}) \to q(\mathcal{M})$. Поскольку $\mathrm{RC}(p) = \mathrm{RC}(q) = 1$, эта биекция является строго монотонной. Возьмем произвольное открытое выпуклое множество $A' \subseteq p(M)$ и рассмотрим $f(A')$. В силу строгой монотонности функции f образ $f(A')$ также будет открытым выпуклым множеством. Возьмем произвольные $a, b \in f(A')$ с условием $a < b$. Тогда пусть $B' := \{c \in q(M) \mid a < c < b\}$. Тогда не существует $M_1 \prec M$ такой, что $A' = p(M) \cap M_1$ и $B' = q(M) \cap M_1$.

($\Leftarrow$) Пусть $p \perp^w q$. Тогда в силу теоремы 4.7 [6] семейство $\{p, q\}$ является ортогональным над $\emptyset$, откуда следует относительная $\mathcal{H}$-независимость $p(M)$ и $q(M)$. $\square$

Из теоремы 2 непосредственно вытекает:

Следствие 1. *Пусть T — вполне o-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M} \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический изолированный тип, $\mathrm{RC}(p) = n$, где $n > 1$. Предположим что $E_1(x,y), E_2(x,y), \ldots, E_{n-1}(x,y)$ — $\emptyset$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что для любого $a \in p(\mathcal{M})$, $E_1(a,\mathcal{M}) \subset E_2(a,\mathcal{M}) \subset \ldots \subset E_{n-1}(a,\mathcal{M})$. Тогда:*

1) *каждый E_1-класс является относительно $\mathcal{H}$-свободным;*

2) *любые два E_1-класса являются относительно $\mathcal{H}$-независимыми.*

3) *для любого $2 \le i \le n-1$ каждый E_i-класс не является относительно $\mathcal{H}$-свободным.*

Пример 2. Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; <, E^2, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура, где $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ упорядочено лексикографически. Символ E интерпретируется бинарным отношением, определяемым следующим образом: для любых $a = (n_1, m_1), b = (n_2, m_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $E(a,b) \Leftrightarrow n_1 = n_2$. Символ f интерпретируется унарной функцией, определяемой равенством $f((n,m)) = (n+1, m)$ для всех $(n,m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Очевидно, что $E(x,y)$ является отношением эквивалентности, разбивающим M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Может быть установлено, что $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ — вполне o-минимальная теория, имеющая континуум счетных моделей. Замечаем, что $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический изолированный тип, $\mathrm{RC}(p) = 2$, каждый E-класс является относительно $\mathcal{H}$-свободным, однако для каждого $a \in M$ E-классы $E(a,\mathcal{M})$ и $E(f(a),\mathcal{M})$ не являются относительно $\mathcal{H}$-независимыми.

Определение 9. Пусть T — слабо o-минимальная теория, $\mathcal{M} \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический изолированный тип. Пусть $E(x,y)$ — $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Если $A \subseteq p(\mathcal{M})$, то мы обозначаем через A/E множество представителей E-классов, имеющих непустое пересечение с A. Будем говорить, что $p(\mathcal{M})$ *относительно $(\mathcal{H}, E)$-свободно*, если для любого выпуклого $A' \subseteq p(\mathcal{M})$ такого, что A'/E — непустое открытое множество, имеет место равенство $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$ для некоторого $M_1 \in H(\mathcal{M})$.

Заметим, что в последнем определении в случае плотной упорядоченности $p(\mathcal{M})$ выпуклость множества A' существенна. Действительно, пусть $p(x) := \{U(x)\}$, $a_1, a_2 \in p(\mathcal{M})$ такие, что $\mathcal{M} \models E(a_1, a_2) \wedge a_1 < a_2$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\phi(x, a_1, a_2) := U(x) \wedge [x \le a_1 \vee x \ge a_2]$$

Пусть $A' = \phi(\mathcal{M}, a_1, a_2)$. Очевидно, что $A' \subseteq p(\mathcal{M})$, A' не является выпуклым, A'/E — открытое выпуклое множество, но не существует $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ такой, что $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$.

Теорема 3. *Пусть T — вполне о-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M} \models T$, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический изолированный тип, $E(x,y)$ — $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда $p(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E)$-свободно $\Leftrightarrow$ для любого $\emptyset$-определимого отношения эквивалентности $E'(x,y)$, разбивающего $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число выпуклых классов, имеет место $E'(a,\mathcal{M}) \subseteq E(a,\mathcal{M})$ для некоторого $a \in p(\mathcal{M})$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $p(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E)$-свободно. В силу следствия 5.5 из [6] имеет место $\mathrm{RC}(p) < \omega$, т.е. существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E^*(x,y)$, разбивающее $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число выпуклых классов, и для любого $\emptyset$-определимого отношения эквивалентности $E'(x,y)$, разбивающего $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число выпуклых классов, имеет место $E'(a,\mathcal{M}) \subseteq E^*(a,\mathcal{M})$ для некоторого $a \in p(\mathcal{M})$. Тогда утверждаем, что $E(x,y) \equiv E^*(x,y)$ на $p(\mathcal{M})$. Если это не так, то либо $E(a,\mathcal{M}) \subset E^*(a,\mathcal{M})$, либо $E^*(a,\mathcal{M}) \subset E(a,\mathcal{M})$. В первом случае получаем противоречие с тем, что $p(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E)$-свободно. Во втором случае получаем противоречие с тем, что $E^*(x,y)$ — наибольшее отношение эквивалентности.

($\Leftarrow$) Пусть $E(x,y)$ — наибольшее $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число выпуклых классов. Тогда если в качестве A' возьмем произвольное выпуклое подмножество множества $p(\mathcal{M})$, так что A'/E — открытое, то легко находится $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ с условием $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$. □

Пример 3. Пусть $\mathcal{M} = \langle M, <, E_i^2 \rangle_{i \in \omega}$ — линейно упорядоченная структура, где для каждого $i \in \omega$ формула $E_i(x,y)$ определяет отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечное число выпуклых классов, при этом E_i разбивает каждый E_{i+1}-класс на бесконечное число E_i-классов, каждый E_i-класс выпуклый и открытый, так что E_i-подклассы каждого E_{i+1}-класса являются плотно упорядоченными без концевых точек.

Может быть установлено, что $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ — вполне о-минимальная теория, имеющая континуум счетных моделей. Очевидно, что $\mathcal{M}$ — 1-неразличимая модель, т.е. $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\emptyset)$. Нетрудно понять, что $p(\mathcal{M})$ не является относительно $(\mathcal{H}, E_i)$-свободным для любого $i \in \omega$.

Определение 10. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $\mathcal{M} \models T$, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические изолированные типы. Пусть $E_1(x,y)$, $E_2(x,y)$ — $\emptyset$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие $p_1(\mathcal{M})$ и $p_2(\mathcal{M})$ соответственно на бесконечное число выпуклых классов.

Предположим, что $p_1(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_1)$-свободно и $p_2(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_2)$-свободно. Будем говорить, что $p_1(\mathcal{M})$ и $p_2(\mathcal{M})$ *относительно* $(\mathcal{H}, E_1, E_2)$*-независимы*, если для любых выпуклых $A' \subseteq p_1(\mathcal{M})$ и $B' \subseteq p_2(\mathcal{M})$ таких, что A'/E_1 и B'/E_2 — открытые множества, найдется $M_1 \in H(\mathcal{M})$ такая, что $A' = p_1(\mathcal{M}) \cap M_1$ и $B' = p_2(\mathcal{M}) \cap M_1$.

Теорема 4. *Пусть T — вполне о-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M} \models T$, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические изолированные типы. Пусть $E_1(x, y)$, $E_2(x, y)$ — $\emptyset$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие $p_1(\mathcal{M})$ и $p_2(\mathcal{M})$ соответственно на бесконечное число выпуклых классов. Предположим, что множество $p_1(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_1)$-свободно, а множество $p_2(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_2)$-свободно. Тогда $p_1(\mathcal{M})$ и $p_2(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_1, E_2)$-независимы тогда и только тогда, когда $p_1 \perp^w p_2$.*

Доказательство. Пусть $p_1(\mathcal{M})$ и $p_2(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_1, E_2)$-независимы. Допустим противное: $p_1 \not\perp^w p_2$. В силу вполне о-минимальности существует $\emptyset$-определимая биекция $f : p_1(\mathcal{M}) \to p_2(\mathcal{M})$, откуда $\mathrm{RC}(p_1) = \mathrm{RC}(p_2)$ и $f(E_1(a, \mathcal{M})) = E_2(f(a), \mathcal{M})$ для любого $a \in p_1(\mathcal{M})$. Возьмем произвольное выпуклое $A' \subseteq p_1(\mathcal{M})$ с условием открытости множества A'/E_1 и рассмотрим $f(A')$. Очевидно, что $f(A')$ выпукло и $f(A')/E_2$ — открытое множество. Возьмем произвольные E_2-классы $C = E_2(a, \mathcal{M})$ и $D = E_2(b, \mathcal{M})$ для некоторых $a, b \in p_2(\mathcal{M})$ с условием $C < D$, лежащие в $f(A')$. Тогда пусть $B' := \{e \in p_2(\mathcal{M}) \mid C < e < D\}$. Очевидно, что B' будет также выпукло, а B'/E_2 открыто. Легко понять, что не существует $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ такой, что $A' = p_1(\mathcal{M}) \cap M_1$ и $B' = p_2(\mathcal{M}) \cap M_1$. □

Из теоремы 4 непосредственно вытекает:

Следствие 2. *Пусть T — вполне о-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M} \models T$, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические изолированные типы, и предположим, что существует $\emptyset$-определимая биекция $f : p_1(\mathcal{M}) \to p_2(\mathcal{M})$. Пусть $E_1(x, y)$ — $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности, разбивающие $p_1(\mathcal{M})$ на бесконечное число выпуклых классов. Определим на множестве $p_2(\mathcal{M})$ отношение $E_2(x, y)$ следующим образом:*

$$\text{для любых } a, b \in p_2(\mathcal{M}) \quad E_2(a, b) \Leftrightarrow E_1(f^{-1}(a), f^{-1}(b)).$$

Тогда $p_1(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_1)$-свободно $\Leftrightarrow$ $p_2(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_2)$-свободно.

4 О свободе и независимости в гиперграфах моделей для неизолированных типов

Далее мы расширяем определения относительной $\mathcal{H}$-свободы, относительной $\mathcal{H}$-независимости, относительной $(\mathcal{H}, E)$-свободы и относительной $(\mathcal{H}, E_1, E_2)$-независимости на неизолированные 1-типы.

Вспомним, что если A — произвольное подмножество линейно упорядоченной структуры $\mathcal{M}$, то через A^+ (и соответственно A^-) будем обозначать множество элементов b рассматриваемой структуры с условием $A < b$ ($b < A$).

Определение 11. [8] Пусть $\mathcal{M}$ —слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Мы говорим, что p — *квазирациональный вправо (влево)*, если существует A-определимая выпуклая формула $U_p(x) \in p$ такая, что для любой достаточной насыщенной модели $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ имеет место $U_p(\mathcal{N})^+ = p(\mathcal{N})^+$ ($U_p(\mathcal{N})^- = p(\mathcal{N})^-$). Неизолированный 1-тип называется *квазирациональным*, если он является либо квазирациональным вправо, либо квазирациональным влево. Неквазирациональный неизолированный 1-тип называется *иррациональным*.

Очевидно, что 1-тип, будучи одновременно квазирациональным вправо и квазирациональным влево, является изолированным.

Будем говорить, что выпуклое множество A является *открытым вправо (влево)*, если существует $a \in A$ такой, что для любого $b > a$ ($b < a$) существует окрестность элемента b, содержащаяся в A. Очевидно, что множество, будучи одновременно открытым вправо и открытым влево, является открытым.

Определение 12. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $\mathcal{M}$ — достаточно насыщенная модель теории T, $p \in S_1(\emptyset)$ — неизолированный тип, $\mathrm{RC}(p) = 1$. Если p — квазирациональный вправо (влево), то будем говорить, что $p(\mathcal{M})$ *относительно $\mathcal{H}$-свободно*, если для любого открытого вправо (влево) выпуклого $A' \subseteq p(\mathcal{M})$ имеет место равенство $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$ для некоторого $M_1 \in H(\mathcal{M})$. Если же p иррациональный, то в качестве A' достаточно взять произвольное выпуклое множество.

Теорема 5. *Пусть T — вполне о-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M}$ — достаточно насыщенная модель теории T, $p \in S_1(\emptyset)$ — неизолированный тип. Тогда $p(\mathcal{M})$ — относительно $\mathcal{H}$-свободно $\Leftrightarrow$ $\mathrm{RC}(p) = 1$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Действительно, если $\mathrm{RC}(p) > 1$, то существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Очевидно, что не существует $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ такой, что $E(a, \mathcal{M}) = p(\mathcal{M}) \cap M_1$ для некоторого $a \in p(M)$.

($\Leftarrow$) Если $\mathrm{RC}(p) = 1$, то аналогично доказательству теоремы 1 устанавливается что $p(\mathcal{M})$ неразличимо над $\emptyset$. Тогда если p — квазирациональный вправо (влево), то для любого открытого вправо (влево) выпуклого множества $A' \subseteq p(\mathcal{M})$ существует $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ такая, что $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$. Если же p — иррациональный тип, то для любого выпуклого множества $A' \subseteq p(\mathcal{M})$ (включая случай когда $A' = \{a\}$ для некоторого $a \in p(M)$) существует $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ с условием $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$. $\square$

Определение 13. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $\mathcal{M}$ — достаточно насыщенная модель теории T, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неизолированные типы, $\mathrm{RC}(p) = \mathrm{RC}(q) = 1$. Будем говорить, что $p(\mathcal{M})$ и $q(\mathcal{M})$ *относительно $\mathcal{H}$-независимы*, если для любых выпуклых множеств $A' \subseteq p(\mathcal{M})$ и $B' \subseteq q(\mathcal{M})$, соответствующих типам p и q (как в определении 12), найдется $M_1 \in H(\mathcal{M})$ такая, что $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$ и $B' = q(\mathcal{M}) \cap M_1$.

Предложение 1. [8] *Пусть T —слабо о-минимальная теория, $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы, $p \not\perp^w q$. Тогда:*
(1) *p — иррациональный $\Leftrightarrow$ q — иррациональный*
(2) *p — квазирациональный $\Leftrightarrow$ q — квазирациональный.*

Теорема 6. *Пусть T — вполне о-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M}$ — достаточно насыщенная модель теории T, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неизолированные типы,* $\mathrm{RC}(p) = \mathrm{RC}(q) = 1$. *Тогда $p(\mathcal{M})$ и $q(\mathcal{M})$ относительно $\mathcal{H}$-независимы $\Leftrightarrow$ $p \perp^w q$.*

Доказательство. Если $p \not\perp^w q$, то в силу теоремы 1 типы p и q являются одновременно либо квазирациональными, либо иррациональными. Не умаляя общности, предположим что p и q — квазирациональные типы. В силу вполне о-минимальности существует $\emptyset$-определимая биекция $f : p(\mathcal{M}) \to q(\mathcal{M})$. Поскольку ранги выпуклости типов равны единице, то эта биекция является строго монотонной. Для определенности предположим что p — квазирациональный вправо. Тогда если f — строго возрастающая (убывающая) биекция, то q будет квазирациональным вправо (влево). Возьмем произвольное открытое вправо выпуклое множество $A' \subseteq p(\mathcal{M})$ и рассмотрим $f(A')$. Если f — строго возрастающая (убывающая) биекция, то $f(A')$ также будет открытым вправо (влево) выпуклым множеством. Возьмем произвольные $a, b \in f(A')$ с условием $a < b$ и пусть $B' := \{c \in q(\mathcal{M}) \mid a < c < b\}$. Тогда не существует $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ такой, что $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$ и $B' = q(\mathcal{M}) \cap M_1$. □

Определение 14. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $\mathcal{M}$ — достаточно насыщенная модель теории T, $p \in S_1(\emptyset)$ — неизолированный тип. Пусть $E(x, y)$ — $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Если p — квазирациональный вправо (влево) тип, то будем говорить, что $p(\mathcal{M})$ *относительно $(\mathcal{H}, E)$-свободно*, если для любого выпуклого $A' \subseteq p(\mathcal{M})$ такого, что A'/E — открытое вправо (влево) множество, имеет место равенство $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$ для некоторого $M_1 \in H(\mathcal{M})$. Если же p — иррациональный тип, то в качестве A' достаточно взять любое открытое выпуклое подмножество множества $p(\mathcal{M})$, оставляя на произвол тип множества A'/E.

Теорема 7. *Пусть T — вполне о-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M}$ — достаточно насыщенная модель теории T, $p \in S_1(\emptyset)$ — неизолированный тип, $E(x, y)$ — $\emptyset$-определимое* *отношение эквивалентности, разбивающее $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда $p(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E)$-свободно $\Leftrightarrow E(x,y)$ — наибольшее $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(\mathcal{M})$ на бесконечное число выпуклых классов.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ доказывается по аналогии с доказательством теоремы 3.
$(\Leftarrow)$. Если p — квазирациональный вправо (влево) тип, то, беря в качестве A' произвольное выпуклое подмножество множества $p(\mathcal{M})$ с условием открытости вправо (влево) A'/E, мы легко находим $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ такую, что $A' = p(\mathcal{M}) \cap M_1$. Если же p — иррациональный тип, то в качестве A' берем произвольное открытое выпуклое подмножество множества $p(\mathcal{M})$. □

Определение 15. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $\mathcal{M}$ — достаточно насыщенная модель теории T, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ — неизолированные типы. Пусть $E_1(x,y), E_2(x,y)$ — $\emptyset$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие $p_1(\mathcal{M})$ и $p_2(\mathcal{M})$ соответственно на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Предположим, что $p_1(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_1)$-свободно и $p_2(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_2)$-свободно. Будем говорить, что $p_1(\mathcal{M})$ и $p_2(\mathcal{M})$ *относительно $(\mathcal{H}, E_1, E_2)$-независимы*, если для любых выпуклых $A' \subseteq p_1(\mathcal{M})$ и $B' \subseteq p_2(\mathcal{M})$, соответствующих типам p_1 и p_2 (как в Определении 14), найдется $M_1 \in H(\mathcal{M})$ такая, что $A' = p_1(\mathcal{M}) \cap M_1$ и $B' = p_2(\mathcal{M}) \cap M_1$.

Теорема 8. *Пусть T — вполне о-минимальная теория с немаксимальным числом счетных моделей, $\mathcal{M}$ — достаточно насыщенная модель теории T, $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$ — неизолированные типы. Предположим, что $p_1(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_1)$-свободно и $p_2(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_2)$-свободно, где $E_1(x,y)$, $E_2(x,y)$ — $\emptyset$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие $p_1(\mathcal{M})$ и $p_2(\mathcal{M})$ соответственно на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда $p_1(\mathcal{M})$ и $p_2(\mathcal{M})$ относительно $(\mathcal{H}, E_1, E_2)$-независимы $\Leftrightarrow p_1 \perp^w p_2$.*

Доказательство. Если $p_1 \not\perp^w p_2$, то в силу теоремы 1 типы p_1 и p_2 являются одновременно либо квазирациональными, либо иррациональными. Не умаляя общности, предположим что p_1 и p_2 — квазирациональные типы. В силу вполне о-минимальности существует $\emptyset$-определимая биекция $f : p_1(\mathcal{M}) \to p_2(\mathcal{M})$. Для определенности пусть p_1 — квазирациональный вправо. Тогда возьмем произвольное выпуклое $A' \subseteq p_1(\mathcal{M})$ с условием открытости вправо множества A'/E_1. Очевидно, что $f(A')$ будет выпуклым. Если f является строго возрастающей (убывающей) на $p_1(\mathcal{M})/E_1$, то $f(A')/E_2$ будет открытым вправо (влево) множеством. Беря произвольные E_2-классы $E_2(a, \mathcal{M})$ и $E_2(b, \mathcal{M})$ для некоторых $a, b \in p_2(\mathcal{M})$ с условием $E_2(a, \mathcal{M}) < E_2(b, \mathcal{M})$, лежащие в $f(A')$, и рассматривая $B' := \{h \in p_2(\mathcal{M}) \mid E_2(a, \mathcal{M}) < h < E_2(b, \mathcal{M})\}$, мы видим, что B' выпукло, а B'/E_2 открыто. Очевидно, что не существует $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ такой, что $A' = p_1(\mathcal{M}) \cap M_1$ и $B' = p_2(\mathcal{M}) \cap M_1$. □

5 Заключение

Мы исследовали свойства понятий свободы и независимости для гиперграфов моделей вполне о-минимальной теории с немаксимальным числом счетных моделей применительно к изолдированным и неизолированным типам. Было бы естественно распространить изучение этих понятий на класс слабо о-минимальных теорий как с максимальным, так и с немаксимальным числом счетных моделей.

References

[1] S.V. Sudoplatov,*Classification of Countable Models of Complete Theories*, Edition of NSTU, Novosibirsk, 2018.

[2] S.V. Sudoplatov,*On acyclic hypergraphs of minimal prime models*, Siberian Math. J., **42**:6 (2001), 1170–1172.

[3] S.V. Sudoplatov,*Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories*, J. Math. Sciences, **169**:5 (2010), 680–695.

[4] S.V. Sudoplatov,*On the separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory*, Bulletin of Karaganda University. Mathematics, **82**:2 (2016), 113–120.

[5] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov,*On relative separability in hypergraphs of models of theories*, Eurasian Mathematical Journal, **9**:4 (2018), 68–78.

[6] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov,*Vaught's conjecture for quite o-minimal theories*, Annals of Pure and Applied Logic, **168**:1 (2017), 129–149.

[7] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov,*Distributions of countable models of quite o-minimal Ehrenfeucht theories*. Eurasian Mathematical Journal, **11**:3 (2020), 66–78.

[8] B.S. Baizhanov,*Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates*, The Journal of Symbolic Logic, **66**:3 (2001), 1382–1414.

[9] B.Sh. Kulpeshov, *The convexity rank and orthogonality in weakly o-minimal theories*, Izv. Nats. Akad. Nauk Resp. Kaz. Ser. Fiz.-Mat., **227**:1 (2003), 26–31.

[10] A. Alibek, B.S. Baizhanov, *Examples of countable models of a weakly o-minimal theory*, International Journal of Mathematics and Physics, **3**:2 (2012), 1–8.

[11] B.S. Baizhanov, *One-types in weakly o-minimal theories*, Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, 1996. — P. 75–88.

[12] B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov,*On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories*, Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. World Scientific, Singapore, 2006. — P. 31–40.

[13] B.Sh. Kulpeshov,*Weakly o-minimal structures and some of their properties*, The Journal of Symbolic Logic, **63**:4 (1998), 1511–1528.

[14] B.Sh. Kulpeshov,*A criterion for binarity of almost ω-categorical weakly o-minimal theories*, Siberian Mathematical Journal, **62**:3 (2021), 1063–1075.

Beibut Shaiykovich Kulpeshov
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
Shevchenko street, 28
050010, Almaty, Kazakhstan.
E-mail address: kulpesh@mail.ru

Kazakh British Technical University
Tole bi street, 59
050000, Almaty, Kazakhstan.
E-mail address: b.kulpeshov@kbtu.kz

Novosibirsk State Technical University
K. Marx avenue, 20
630073, Novosibirsk, Russia.
E-mail address: kulpeshov@corp.nstu.ru

Sergey Vladimirovich Sudoplatov
Novosibirsk State Technical University
K. Marx avenue, 20
630073, Novosibirsk, Russia.
E-mail address: sudoplatov@corp.nstu.ru

Sobolev Institute of Mathematics,
Academician Koptyug avenue, 4
630090, Novosibirsk, Russia.
E-mail address: sudoplat@math.nsc.ru