S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 17, стр. 364–379 (2020)* УДК 539.3,517.958
DOI 10.33048/semi.2020.17.023 MSC 35Q74,74G65,74M15

# ЗАДАЧА ОБ ОДНОСТОРОННЕМ КОНТАКТЕ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО И ТОНКОГО УПРУГОГО ПРЕПЯТСТВИЯ

А.И. ФУРЦЕВ

Abstract. The paper deals with the problem of contact between a plate and a beam acting as an obstacle to the plate. The plate is described in the framework of Timoshenko theory of plates. It is assumed that no mutual penetration between the plate and the obstacle can occur, and so an appropriate non-penetration condition is used. We study the existence and uniqueness of a solution for the equilibrium problem as well as passages to the limit with respect to the shear rigidity parameter. The accompanying optimal control problem is investigated in which the rigidity parameter acts as a control parameter, cost functional characterizes the difference between known functions and the displacements obtained by equilibrium problem solving.

**Keywords:** contact, equilibrium, Timoshenko plate, beam, thin obstacle, non-penetration condition, minimization problem, variational inequality, rigidity parameter, optimal control.

## Введение

В статье исследуется задача о контакте упругих пластины и тонкого препятствия. В указанной задаче для описания изгиба пластины используются уравнения теории Тимошенко, широко применяемой в приложениях. Для описания перемещений препятствия используются уравнения изгиба балки Бернулли – Эйлера. Пластина и препятствие могут контактировать вдоль линии, и их контакт имеет односторонний характер: с целью предотвратить взаимное проникновение требуется, чтобы искомые в задаче перемещения удовлетворяли

---

Furtsev, A.I., The unilateral contact problem for a Timoshenko plate and a thin elastic obstacle.



Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19–31–90037.

*Поступила 18 декабря 2019 г., опубликована 10 марта 2020 г.*

краевому условию непроникания вида неравенства на множестве возможного контакта.

Задачи о тонких препятствиях с односторонними ограничениями в последние десятилетия и в настоящее время являются объектом активного интереса научного сообщества. Эти задачи часто формулируются в виде краевых в областях, из которых вычтены многообразия единичной коразмерности. На указанных многообразиях задаются краевые условия вида неравенств, при этом заранее не известно в каких точках многообразий для решений реализуется неравенство, а в каких – равенство, и таким образом неизвестными являются части границы, в которых решение должно удовлетворять качественно различным краевым условиям. Последнее обстоятельство представляет основную трудность при исследовании задач с тонкими препятствиями и приводит к необходимости рассмотрения слабых постановок.

Начало исследования задач с тонкими препятствиями положено в работах [1, 2], где для задач указанного класса рассматривались простейшие постановки с уравнением Лапласа и основное внимание уделялось вопросам дополнительной регулярности слабых решений. Дальнейшее развитие указанная тематика получила в работах [3–7]. Следует также отметить работы [8,9], в которых изучались задачи о тонких препятствиях для бигармонического и полигармонического уравнений, а также работы [10–14], в которых рассматривались задачи для линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

Отдельного упоминания заслуживает ряд недавних работ, которые посвящены задачам о тонких препятствиях, описывающим односторонний контакт упругих тел различной природы. Эффективным инструментом для исследования задач указанного класса оказался подход, основанный на вариационных постановках, при котором первым делом доказывается существование решений подходящих задач минимизации энергии и дальнейшее исследование сопутствующих вопросов опирается на свойства вариационных решений. Подобный подход позволил, в частности, доказать корректность широко спектра задач равновесия, изучить зависимость решений от механических и геометрических параметров и исследовать предельные переходы по этим параметрам, а также рассмотреть задачи оптимального управления, тесно связанные с задачами равновесия. Таким образом были исследованы задачи о контакте пластин и стержней [15–18, 21, 22], задачи о контакте расположенных под углом друг к другу тонких структур [17–20], контактные задачи при наличии жестких включений [19–21], задачи о контакте пластин и тонких препятствий с учетом сил сцепления [22].

В данной работе мы, придерживаясь курса предыдущих работ, исследование задачи об одностороннем контакте пластины Тимошенко с тонким упругим препятствием начинаем с анализа вариационных постановок. Далее мы изучаем зависимость вариационного решения от одного из параметров задачи – параметра сдвиговой жесткости пластины, в частности, исследуем предельные переходы по указанному параметру. Наконец, в последней части работы мы рассматриваем задачу оптимального управления, в которой параметр сдвиговой жесткости является управляющим, и анализ которой опирается на полученные перед этим результаты о предельных переходах.

## 1. Постановка задачи

Данный параграф посвящен постановке задачи о равновесии контактирующих друг с другом пластины Тимошенко и тонкого упругого препятствия. В начале приводятся некоторые предварительные сведения и обозначения, после этого задача равновесия ставится в вариационном виде, а именно, в виде эквивалентных задачи минимизации функционала энергии и вариационного неравенства. Далее нашей целью является доказательство теоремы о существовании вариационного решения и анализ краевой задачи, по отношению к которой вариационные формулировки являются слабыми.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, лежащая в $x_1x_2$-координатной плоскости и имеющая гладкую границу $\partial\Omega$. Пусть множество $S \subset \Omega$ расположено строго внутри $\Omega$ (см. Рис. 1). Будем считать, что $S$ представляет собой открытый интервал некоторой координатной прямой $x$, лежащей в плоскости $x_1x_2$. Обозначим через $\Omega_S$ область $\Omega \setminus \overline{S}$, а через $\nu$ – вектор единичной нормали к $S$.

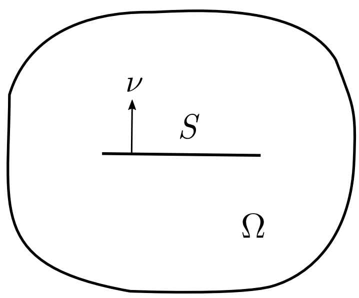


Рис. 1.

Мы полагаем, что область $\Omega$ соответствует точкам пластины Тимошенко, а множество $S$ – точкам тонкого упругого препятствия. Перемещения точек пластины при изгибе описываются определяемыми в $\Omega$ вектор-функцией $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ и функцией $v$ (эти функции в рамках теории Тимошенко характеризуют углы поворота поперечных сечений и прогибы пластины). Перемещения точек препятствия описываются определяемой на $S$ функцией прогиба $w$. Всюду в работе считается, что функция $w$ и другие определяемые только на $S$ функции зависят лишь от переменной $x$.

Для описания напряженного состояния пластины введем тензор изгибающих моментов и вектор перерезывающих сил. Компоненты тензора моментов $m = \big\{m_{ij}(\varphi)\big\}$ выражаются через перемещения следующим образом:

$$m(\varphi) = B\varepsilon(\varphi), \quad m_{ij}(\varphi) = b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\varphi),$$

где

$$\varepsilon(\varphi) = \big\{\varepsilon_{ij}(\varphi)\big\}, \quad \varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big),$$

а тензор $B = \{b_{ijkl}\}$ считается известным и характеризует изгибную жесткость пластины. Здесь и всюду в работе индексы $i, j, k, l$ принимают значения $1, 2$ и по указанным индексам проводится суммирование, если они повторяются. Вектор перерезывающих сил $q = (q_1(\varphi, v), q_2(\varphi, v))$ определяется по формуле

$$q_i(\varphi, v) = \Lambda_{ij}\Big(\varphi_j - \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big),$$

в которой тензор $\Lambda = \{\Lambda_{ij}\}$ считается известным и характеризует сдвиговую жесткость пластины. Предполагаются выполненными обычные свойства симметричности и положительной определенности:

$$b_{ijkl} = b_{jikl} = b_{klij}, \quad b_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0\xi_{ij}\xi_{ij} \ \forall \xi_{ij} = \xi_{ji},$$

$$\Lambda_{ij}\eta_j\eta_i \geq c_1\eta_i\eta_i \ \forall \eta_j, \quad c_0, c_1 = const > 0.$$

Для того, чтобы сформулировать задачу о равновесии в вариационном виде, введем в рассмотрение пространства Соболева $H_0^1(\Omega)$, $H_0^2(S)$ и определим на $H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S)$ функционал энергии

$$\mathcal{E}(\varphi, v, w) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega q(\varphi, v)\cdot(\varphi - \nabla v) \\ - \int\limits_\Omega fv + \frac{1}{2}\int\limits_S b(w_{xx})^2 - \int\limits_S gw.$$

Здесь и всюду далее предполагается, что

$$b_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad \Lambda_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega), \quad b \in L^\infty(S), \quad g \in L^2(S),$$

функция $b$ удовлетворяет условию положительной определенности $b \geq c_2$ на $S$, где $c_2 = const > 0$, а обозначение $w_x$ используется для $\frac{dw}{dx}$. Введем выпуклое и замкнутое множество допустимых перемещений

$$\mathcal{K} = \big\{(\varphi, v, w) \in H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S) : \ v - w \geq 0 \text{ на } S\big\},$$

образованное функциями, которые удовлетворяют условию непроникания на множестве возможного контакта пластины и препятствия. Теперь мы в состоянии сформулировать задачу равновесия в виде задачи минимизации энергии: найти $(\varphi, v, w) \in \mathcal{K}$ такой, что

$$\mathcal{E}(\varphi, v, w) = \min_{(\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w}) \in \mathcal{K}} \mathcal{E}(\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w}). \tag{1}$$

В свою очередь, благодаря дифференцируемости по Гато функционала энергии задача минимизации эквивалентна вариационному неравенству

$$(\varphi, v, w) \in \mathcal{K}, \qquad \forall (\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w}) \in \mathcal{K} :$$

$$\int\limits_\Omega m(\varphi) : \varepsilon(\overline{\varphi} - \varphi) + \int\limits_\Omega q(\varphi, v)\cdot(\overline{\varphi} - \nabla\overline{v}) - \int\limits_\Omega q(\varphi, v)\cdot(\varphi - \nabla v) \\ - \int\limits_\Omega f(\overline{v} - v) + \int\limits_S bw_{xx}(\overline{w}_{xx} - w_{xx}) - \int\limits_S g(\overline{w} - w) \geq 0. \tag{2}$$

Анализ приведенных вариационных задач начнем с доказательства теоремы существования. С этой целью воспользуемся следующей леммой.

**Лемма 1.** *Существует постоянная $c > 0$ такая, что*

$$\int\limits_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \int\limits_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \nabla v) \geq c\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)^2} + c\|v\|^2_{H^1_0(\Omega)},$$

$$\int\limits_{S} b(w_{xx})^2 \geq c\|w\|^2_{H^1_0(S)}$$

*для всех* $\varphi \in H^1_0(\Omega)^2$, $v \in H^1_0(\Omega)^2$, $w \in H^1_0(S)$.

Мы опускаем доказательство приведенной леммы. Отметим только, что утверждаемые в лемме оценки вытекают из условий положительной определенности, неравенств Корна и Пуанкаре, а также неравенства Коши с эпсилон. Перейдем к доказательству теоремы существования.

**Теорема 1.** *Задача минимизации* (1) *имеет единственное решение.*

*Доказательство.* Чтобы доказать существование решения, проверим коэрцитивность функционала энергии. Благодаря оценкам из леммы 1 и неравенству Коши – Буняковского имеем

$$\mathcal{E}(\varphi, v, w) \geq \frac{c}{2}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)^2} + \frac{c}{2}\|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1_0(\Omega)} + \frac{c}{2}\|w\|^2_{H^2_0(S)} - \|g\|_{L^2(S)}\|w\|_{H^2_0(S)}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}(\varphi, v, w) \to \infty \quad \text{при} \quad \|\varphi\|_{H^1_0(\Omega)^2} + \|v\|_{H^1_0(\Omega)} + \|w\|_{H^2_0(S)} \to \infty,$$

то есть функционал энергии $\mathcal{E}$ коэрцитивен. В дополнение к этому, функционал энергии слабо полунепрерывен снизу, а множество $\mathcal{K}$, на котором он минимизируется, слабо замкнуто. Отсюда заключаем, что решение задачи минимизации (1) существует.

Заметим наконец, что функционал энергии $\mathcal{E}$ строго выпуклый, а значит, он не может иметь более одного минимума. Следовательно, решение задачи (1) является единственным, как и утверждается в формулировке теоремы. □

Приведем краевую задачу, которая, как будет доказано ниже, эквивалентна вариационному неравенству (2) на классе достаточно гладких решений. Указанная краевая задача формулируется следующим образом: найти функции

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $v$, заданные в $\Omega$, и функцию $w$, заданную на $S$, такие, что

$$-\operatorname{div} m(\varphi) + q(\varphi, v) = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} q(\varphi, v) = f \quad \text{в } \Omega_S, \tag{4}$$

$$[q_\nu(\varphi, v)] + (bw_{xx})_{xx} = g \quad \text{на } S, \tag{5}$$

$$[q_\nu(\varphi, v)](v - w) = 0 \quad \text{на } S, \tag{6}$$

$$[q_\nu(\varphi, v)] \geq 0, \quad v - w \geq 0 \quad \text{на } S, \tag{7}$$

$$[v] = 0, \quad [\varphi] = 0 \quad \text{на } S, \tag{8}$$

$$w = 0, \quad w_x = 0 \quad \text{на } \partial S, \tag{9}$$

$$v = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{10}$$

где

$$q_\nu(\varphi, v) = q(\varphi, v) \cdot \nu.$$

Скобки $[\,\cdot\,]$ обозначают скачок функции; в частности, $[v] = v^+ - v^-$, где $v^+$, $v^-$ – это следы функции $v$ на $S$, взятые в соответствии с положительным и отрицательным направлениями нормали $\nu$.

Соотношения (3), (4) представляют собой уравнения равновесия пластины Тимошенко. Соотношение (5) описывает скачок перерезывающей силы $q_\nu$ на множестве возможного контакта с упругим препятствием и одновременно служит уравнением равновесия для препятствия. Второе условие (7) обеспечивает взаимное непроникание пластины и препятствия. Согласно соотношениям (6) и (7) на множестве возможного контакта имеет место альтернатива: либо контакт пластины и препятствия происходит (тогда $v = w$), либо нет (тогда $v > w$). Если в некоторой точке контакт отсутствует, то из (6) следует, что $[q_\nu(\varphi, v)] = 0$ в указанной точке. С другой стороны, те точки, в которых $[q_\nu(\varphi, v)] > 0$, согласно (6) обязаны быть точками контакта. Множество точек контакта не является известным заранее и может быть найдено только после решения задачи. Оставшиеся соотношения (8)–(10) означают отсутствие в пластине трещин и изломов, а также закрепление внешнего края пластины и концов препятствия.

Докажем теорему, дающую связь между сформулированной краевой задачей и вариационными постановками.

**Теорема 2.** *Вариационное неравенство* (2) *и краевая задача* (3)–(10) *эквивалентны при условии достаточной гладкости решений.*

*Доказательство.* Так как при определении множества допустимых перемещений $\mathcal{K}$ никакие односторонние ограничения на функцию $\varphi$ не накладываются, то вариационное неравенство (2) можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$(\varphi, v, w) \in \mathcal{K}, \qquad \forall (\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w}) \in \mathcal{K}:$$

$$\int_\Omega m(\varphi) : \varepsilon(\overline{\varphi}) + \int_\Omega q(\varphi, v) \cdot \overline{\varphi} = 0, \tag{11}$$

$$-\int\limits_{\Omega} q(\varphi,v)\cdot(\nabla\overline{v}-\nabla v)-\int\limits_{\Omega} f(\overline{v}-v)$$
$$+\int\limits_{S} bw_{xx}(\overline{w}_{xx}-w_{xx})-\int\limits_{S} g(\overline{w}-w)\geq 0. \tag{12}$$

Для доказательства теоремы достаточно, во-первых, установить, что гладкие функции, удовлетворяющие краевой задаче (3)–(10), также удовлетворяет соотношениям (11), (12) и, во-вторых, получить из (11), (12) все дифференциальные уравнения и краевые условия (3)–(10).

1. Пусть $\varphi$, $v$, $w$ – гладкие функции, удовлетворяющие (3)–(10). Очевидно, что из последнего условия (7) и краевых условий (8)–(10) следует принадлежность элемента $(\varphi,v,w)$ множеству $\mathcal{K}$. Далее, фиксируем произвольный элемент $(\overline{\varphi},\overline{v},\overline{w})\in\mathcal{K}$ и рассмотрим величины

$$L_{\varphi}=\int\limits_{\Omega} m(\varphi):\varepsilon(\overline{\varphi})+\int\limits_{\Omega} q(\varphi,v)\cdot\overline{\varphi},$$

$$L_{v,w}=-\int\limits_{\Omega} q(\varphi,v)\cdot(\nabla\overline{v}-\nabla v)-\int\limits_{\Omega} f(\overline{v}-v)+\int\limits_{S} bw_{xx}(\overline{w}_{xx}-w_{xx})-\int\limits_{S} g(\overline{w}-w).$$

Интегрирование по частям первого слагаемого $L_{\varphi}$ с учетом уравнения (3) немедленно влечет $L_{\varphi}=0$. Теперь проинтегрируем по частям первое и третье слагаемые выражения $L_{v,w}$. С учетом (4) и (5) будем иметь

$$L_{v,w}=\int\limits_{S}[q_{\nu}(\varphi,v)](\overline{v}-v)-\int\limits_{S}[q_{\nu}(\varphi,v)](\overline{w}-w).$$

Отсюда, использовав (6), находим

$$L_{v,w}=\int\limits_{S}[q_{\nu}(\varphi,v)](\overline{v}-\overline{w}).$$

Принимая во внимание первое условие из (7) и неравенство $\overline{v}-\overline{w}\geq 0$ на $S$, получаем $L_{v,w}\geq 0$. Таким образом, доказано, что для элемента $(\varphi,v,w)$ одновременно выполняются $L_{\varphi}=0$ и $L_{v,w}\geq 0$, то есть справедливы равенство (11) и неравенство (12). Первый этап доказательства теоремы завершен.

2. Пусть, обратно, решение $(\varphi,v,w)$ задачи (11), (12) является достаточно гладким (требуемая гладкость будет уточнена ниже). Докажем, что для такого решения выполняются соотношения (3)–(10).

Для начала заметим, что последнее условие из (7) и краевые условия (8)–(10) справедливы благодаря принадлежности $(\varphi,v,w)\in\mathcal{K}$ и не нуждаются в доказательстве.

Докажем уравнения (3) и (4). Последовательно подставим в (11), (12) тестовые элементы $(\overline{\varphi},\overline{v},\overline{w})=\pm(\eta,0,0)$ и $(\overline{\varphi},\overline{v},\overline{w})=(\varphi,v,w)\pm(0,\chi,0)$, где функции $\eta\in C_0^{\infty}(\Omega)^2$ и $\chi\in C_0^{\infty}(\Omega_S)$ выбраны произвольно. В результате такой подстановки получаем равенства

$$\int\limits_{\Omega} m(\varphi):\varepsilon(\eta)+\int\limits_{\Omega} q(\varphi,v)\cdot\eta=0,\quad -\int\limits_{\Omega_S} q(\varphi,v)\cdot\nabla\chi=\int\limits_{\Omega_S} f\chi,$$

означающие, что уравнения (3) и (4) выполняются в смысле распределений.

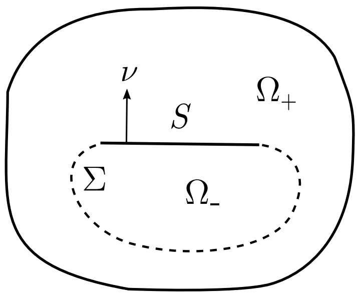


Рис. 2.

Остается доказать соотношения (5), (6) и первое соотношение (7). С этой целью дополнительно предположим, что $\operatorname{div} q(\varphi, v) \in L^2(\Omega_S)$. Также предположим, что множество $S$ может быть продолжено до гладкой замкнутой кривой $\Sigma$, разбивающей область $\Omega$ на две подобласти $\Omega_+$ и $\Omega_-$ с границами $\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cup \Sigma$ и $\partial\Omega_- = \Sigma$ (см. Рис. 2). В таком случае в каждой из подобластей выполняется формула Грина вида

$$\int\limits_{\Omega_\pm} q(\varphi, v) \cdot \nabla \hat{v} = -\int\limits_{\Omega_\pm} \operatorname{div} q(\varphi, v) \hat{v} \mp \langle q_\nu^\pm(\varphi, v), \hat{v} \rangle_{1/2,\Sigma}, \quad \hat{v} \in H_0^1(\Omega),$$

где $q_\nu^\pm(\varphi, v)$ принадлежат двойственным пространствам $H^{-1/2}(\Sigma)$, а скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2,\Sigma}$ обозначают двойственность между $H^{-1/2}(\Sigma)$ и $H^{1/2}(\Sigma)$. Складывая вместе приведенные формулы Грина, получаем

$$\int\limits_{\Omega_S} q(\varphi, v) \cdot \nabla \hat{v} = -\int\limits_{\Omega_S} \operatorname{div} q(\varphi, v) \hat{v} - \langle [q_\nu(\varphi, v)], \hat{v} \rangle_{1/2,\Sigma}, \quad \hat{v} \in H_0^1(\Omega).$$

Применим полученную формулу к первому слагаемому неравенства (12). Принимая во внимание уравнение равновесия (4), находим

$$\langle [q_\nu(\varphi, v)], \overline{v} - v \rangle_{1/2,\Sigma} + \int\limits_S b w_{xx} (\overline{w}_{xx} - w_{xx}) - \int\limits_S g(\overline{w} - w) \geq 0.$$

Пусть далее скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,S}$ обозначают двойственность между пространством $H_0^2(S)$ и двойственным к нему $H^{-2}(S)$. Тогда найденное неравенство означает, что

$$\begin{gathered} \langle [q_\nu(\varphi, v)], \overline{v} - v \rangle_{1/2,\Sigma} + \langle (b w_{xx})_{xx} - g, \overline{w} - w \rangle_{2,S} \geq 0, \\ \forall (\overline{v}, \overline{w}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S) : \quad \overline{v} - \overline{w} \geq 0 \text{ на } S. \end{gathered} \tag{13}$$

Докажем справедливость оставшихся соотношений (5)–(7), поочередно выбирая в неравенстве (13) тестовые функции специального вида. Сначала подставим в (13) тестовый элемент $(\overline{v}, \overline{w}) = (v, w) + (\xi, 0)$, где $\xi \in H_0^1(\Omega)$ и $\xi \geq 0$ на $S$. Такая подстановка влечет

$$\langle [q_\nu(\varphi, v)], \xi \rangle_{1/2,\Sigma} \geq 0,$$

то есть, благодаря неотрицательности и произвольности $\xi$, выполняется первое условие (7). Следующим шагом выберем в (13) тестовые элементы $(\overline{v}, \overline{w}) =$

$(v, w) \pm (\psi, \rho)$, где $(\psi, \rho) \in H^1_0(\Omega) \times H^2_0(S)$: $\psi = \rho$ на $S$. Получаем выражение

$$\langle [q_\nu(\varphi, v)], \psi\rangle_{1/2,\Sigma} + \langle (bw_{xx})_{xx} - g, \rho\rangle_{2,S} = 0,$$

из которого следует уравнение (5). Наконец, последовательно подставим в (13) тестовые элементы $(\overline{v}, \overline{w}) = (0, 0)$ и $(\overline{v}, \overline{w}) = 2(v, w)$. Тогда находим

$$\langle [q_\nu(\varphi, v)], v\rangle_{1/2,\Sigma} + \langle (bw_{xx})_{xx} - g, w\rangle_{2,S} = 0,$$

что означает справедливость соотношения (6). Таким образом, доказано, что достаточно гладкое решение вариационной задачи (11), (12) удовлетворяет всем соотношениям (3)–(10). Теорема полностью доказана.

□

## 2. Предельные переходы по параметру сдвиговой жесткости

Рассмотрим семейство функционалов энергии

$$\mathcal{E}_\lambda(\varphi, v, w) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_\Omega q(\varphi, v)\cdot(\varphi - \nabla v) - \int\limits_\Omega fv + \frac{1}{2}\int\limits_S b(w_{xx})^2 - \int\limits_S gw,$$

где $\lambda$ – такое вещественное число, что $\lambda \geq const > 0$. Данное число характеризует жесткость пластины Тимошенко при деформациях сдвига, поэтому будем называть его параметром сдвиговой жесткости. По аналогии с теоремой 1 легко доказать, что для каждого фиксированного значения параметра $\lambda$ задача минимизации: найти $(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \in \mathcal{K}$ такой, что

$$\mathcal{E}_\lambda(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) = \min_{(\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w})\in\mathcal{K}} \mathcal{E}_\lambda(\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w}),$$

имеет единственное решение, которое также является решением вариационного неравенства

$$(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \in \mathcal{K}, \qquad \forall(\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w}) \in \mathcal{K}:$$

$$\int\limits_\Omega m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\overline{\varphi} - \varphi^\lambda) + \lambda\int\limits_\Omega q(\varphi^\lambda, v^\lambda)\cdot(\overline{\varphi} - \nabla\overline{v}) - \lambda\int\limits_\Omega q(\varphi^\lambda, v^\lambda)\cdot(\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) - \int\limits_\Omega f(\overline{v} - v^\lambda) + \int\limits_S bw^\lambda_{xx}(\overline{w}_{xx} - w^\lambda_{xx}) - \int\limits_S g(\overline{w} - w^\lambda) \geq 0. \tag{14}$$

Наша ближайшая цель – исследовать сходимость семейства решений $(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$, когда параметр $\lambda$ стремится к различным значениям.

**2.1. Параметр $\lambda$ стремится к заданному положительному числу.** Пусть $\lambda_0$ представляет собой такое число, что $\lambda_0 \geq const > 0$. В данном параграфе изучается сходимость семейства решений вариационного неравенства (14) при $\lambda \to \lambda_0$.

Установим сначала, что решения $(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$ являются ограниченными равномерно по параметру $\lambda$. Действительно, подставляя в (14) тестовые элементы $(\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w}) = (0,0,0)$ и $(\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w}) = 2(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$, получаем

$$\int\limits_\Omega m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \lambda \int\limits_\Omega q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) + \int\limits_S b(w^\lambda_{xx})^2 = \int\limits_\Omega f v^\lambda + \int\limits_S g w^\lambda. \tag{15}$$

Отсюда, используя лемму 1 и неравенство Коши–Буняковского, легко находим оценки

$$\|\varphi^\lambda\|_{H^1_0(\Omega)^2} \le c_3, \ \|v^\lambda\|_{H^1_0(\Omega)} \le c_3, \ \|w^\lambda\|_{H^2_0(S)} \le c_3, \quad c_3 = const \ge 0, \tag{16}$$

которые справедливы при каждом $\lambda \ge const > 0$.

Оценки (16) позволяют выбрать подпоследовательность (сохраним для нее прежнее обозначение) такую, что

$$(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \to (\varphi, v, w) \text{ слабо в } H^1_0(\Omega)^2 \times H^1_0(\Omega) \times H^2_0(S) \tag{17}$$

при $\lambda \to \lambda_0$. Выясним природу предельного в (17) элемента. Заметим, что из слабой замкнутости множества $\mathcal{K}$ следует принадлежность предельного элемента этому множеству. В то же время, опираясь на сходимость (17), возможно перейти к верхнему пределу при $\lambda \to \lambda_0$ в левой части вариационного неравенства (14). В результате указанного предельного перехода получаем

$$(\varphi, v, w) \in \mathcal{K}, \qquad \forall (\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w}) \in \mathcal{K} :$$

$$\int\limits_\Omega m(\varphi) : \varepsilon(\overline{\varphi} - \varphi) + \lambda_0 \int\limits_\Omega q(\varphi, v) \cdot (\overline{\varphi} - \nabla \overline{v}) - \lambda_0 \int\limits_\Omega q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \nabla v) - \int\limits_\Omega f(\overline{v} - v) + \int\limits_S b w_{xx}(\overline{w}_{xx} - w_{xx}) - \int\limits_S g(\overline{w} - w) \ge 0. \tag{18}$$

Таким образом, нами получена вариационная задача, решением которой является предельный в (17) элемент. Отметим, что полученная предельная задача представляет не что иное, как вариационное неравенство вида (14), в котором параметр жесткости $\lambda$ принимает значение $\lambda_0$. В указанном смысле зависимость решения задачи (14) от параметра $\lambda$ является непрерывной.

На самом деле сходимость вида (17) более сильная:

$$(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \to (\varphi, v, w) \text{ сильно в } H^1_0(\Omega)^2 \times H^1_0(\Omega) \times H^2_0(S) \tag{19}$$

при $\lambda \to \lambda_0$. Действительно, с учетом (17) из (15), (18) несложно получить сходимость

$$\int\limits_\Omega m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \lambda \int\limits_\Omega q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) + \int\limits_S b(w^\lambda_{xx})^2 = \int\limits_\Omega f v^\lambda + \int\limits_S g w^\lambda$$

$$\to \int\limits_\Omega f v + \int\limits_S g w = \int\limits_\Omega m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \lambda_0 \int\limits_\Omega q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \nabla v) + \int\limits_S b(w_{xx})^2$$

при $\lambda \to \lambda_0$. Благодаря лемме 1 полученная сходимость влечет сходимость норм

$$\|\varphi^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)^2} \to \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)^2}, \quad \|v^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \to \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \|w^\lambda\|_{H_0^2(S)} \to \|w\|_{H_0^2(S)}$$

при $\lambda \to \lambda_0$, которая вместе с (17) дает сильную сходимость (19).

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 3.** *Пусть параметр сдвиговой жесткости $\lambda$ стремится к заданному числу $\lambda_0$, такому что $\lambda_0 \geq const > 0$. Тогда для решений вариационного неравенства* (14) *справедлива сходимость* (19), *в которой предельный элемент является решением вариационного неравенства* (18).

2.2. **Параметр $\lambda$ стремится к бесконечности.** В данном параграфе изучается предельный переход $\lambda \to \infty$ в вариационном неравенстве (14).

Для начала, используя такие же как выше рассуждения, для всех фиксированных значений параметра $\lambda$ получаем тождество

$$\int\limits_\Omega m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \lambda \int\limits_\Omega q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) + \int\limits_S b(w^\lambda_{xx})^2 = \int\limits_\Omega f v^\lambda + \int\limits_S g w^\lambda, \tag{20}$$

из которого следуют априорные оценки

$$\|\varphi^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)^2} \leq c_4, \ \|v^\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_4, \ \|w^\lambda\|_{H_0^2(S)} \leq c_4, \quad c_4 = const \geq 0. \tag{21}$$

Более того, тождество (20) также влечет неравенство

$$\int\limits_\Omega q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) \leq \frac{c_5}{\lambda}, \qquad c_5 = const \geq 0, \tag{22}$$

и, следовательно, дает дополнительную оценку

$$\|\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \frac{c_6}{\sqrt{\lambda}}, \qquad c_6 = const \geq 0. \tag{23}$$

Оценки (21) позволяют считать, что

$$(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \to (\varphi, v, w) \text{ слабо в } H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S), \tag{24}$$

при $\lambda \to \infty$, а дополнительная оценка (23) влечет равенство

$$\varphi = \nabla v \text{ на } \Omega. \tag{25}$$

С одной стороны, так как при фиксированных значениях $\lambda$ элементы $(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$ принадлежат слабо замкнутому множеству $\mathcal{K}$, из сходимости (24) следует, что выполняется принадлежность $(\varphi, v, w) \in \mathcal{K}$. С другой стороны, равенство (25) обеспечивает дополнительную гладкость функции $v$. Из сказанного вытекает, что элемент $(v, w)$ принадлежит новому множеству допустимых перемещений

$$\mathcal{L} = \big\{(v, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(S) : \ v - w \geq 0 \text{ на } S\big\}.$$

Теперь осуществим предельный переход при $\lambda \to \infty$ в исходном вариационном неравенстве (14), используя (24) и (25). Для этого выберем произвольно

$(\overline{v}, \overline{w}) \in \mathcal{L}$ и подставим в (14) пробный элемент $(\nabla \overline{v}, \overline{v}, \overline{w})$. В результате такой подстановки будем иметь

$$\int\limits_\Omega m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\nabla \overline{v}) - \int\limits_\Omega f(\overline{v} - v^\lambda) + \int\limits_S b w^\lambda_{xx} \overline{w}_{xx} - \int\limits_S g(\overline{w} - w^\lambda)$$
$$\geq \int\limits_\Omega m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \lambda \int\limits_\Omega q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) + \int\limits_S b(w^\lambda_{xx})^2.$$

Переходя к пределу в левой части указанного неравенства и к нижнему пределу в правой части, с учетом (25) получаем

$$(v, w) \in \mathcal{L}, \qquad \forall (\overline{v}, \overline{w}) \in \mathcal{L}:$$
$$\int\limits_\Omega m(\nabla v) : \varepsilon(\nabla \overline{v} - \nabla v) - \int\limits_\Omega f(\overline{v} - v) \tag{26}$$
$$+ \int\limits_S b w_{xx}(\overline{w}_{xx} - w_{xx}) - \int\limits_S g(\overline{w} - w) \geq 0.$$

Полученное вариационное неравенство представляет задачу, решением которой является предельный в (24) элемент. Смысл задачи равновесия, соответствующей полученному вариационному неравенству, будет объяснен позже. А сейчас усилим полученный результат о сходимости, доказав, что

$$(\varphi^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \to (\nabla v, v, w) \text{ сильно в } H^1_0(\Omega)^2 \times H^1_0(\Omega) \times H^2_0(S) \tag{27}$$

при $\lambda \to \infty$. С этой целью заметим, что в дополнение к (24) и (25) выполняется сходимость норм

$$\|\varphi^\lambda\|_{H^1_0(\Omega)^2} \to \|\varphi\|_{H^1_0(\Omega)^2}, \ \|v^\lambda\|_{H^1_0(\Omega)} \to \|v\|_{H^1_0(\Omega)}, \ \|w^\lambda\|_{H^2_0(S)} \to \|w\|_{H^2_0(S)} \tag{28}$$

при $\lambda \to \infty$. Действительно, из (20) несложно получить соотношение

$$\int\limits_\Omega m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \int\limits_S b(w^\lambda_{xx})^2 \leq \int\limits_\Omega f v^\lambda + \int\limits_S g w^\lambda, \tag{29}$$

а из (26) несложной прийти к выражению

$$\int\limits_\Omega f v + \int\limits_S g w = \int\limits_\Omega m(\nabla v) : \varepsilon(\nabla v) + \int\limits_S b(w_{xx})^2. \tag{30}$$

Переходя к верхнему пределу в соотношении (29) с учетом сходимости (24) и выражения (30), находим

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \Big( \int\limits_\Omega m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \int\limits_S b(w^\lambda_{xx})^2 \Big) \leq \int\limits_\Omega m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \int\limits_S b(w_{xx})^2.$$

В дополнение к найденной аналогичная оценка с обратным знаком справедлива для нижнего предела, следовательно

$$\int\limits_\Omega m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \int\limits_S b(w^\lambda_{xx})^2 \to \int\limits_\Omega m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \int\limits_S b(w_{xx})^2$$

при $\lambda \to \infty$. Отсюда, принимая во внимание (22) и (25), получаем

$$\int\limits_{\Omega} m(\varphi^\lambda) : \varepsilon(\varphi^\lambda) + \int\limits_{\Omega} q(\varphi^\lambda, v^\lambda) \cdot (\varphi^\lambda - \nabla v^\lambda) + \int\limits_{S} b(w^\lambda_{xx})^2$$
$$\to \int\limits_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) + \int\limits_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \nabla v) + \int\limits_{S} b(w_{xx})^2$$

при $\lambda \to \infty$. Полученная сходимость в силу леммы 1 влечет сходимость норм (28), которая вместе с (24), (25) дает требуемую сильную сходимость (27).

Найденное в результате предельного переходя вариационное неравенство (26) можно переформулировать, используя обозначение $\nabla^2 v$ для матрицы Гессе функции $v$:

$$(v, w) \in \mathcal{L}, \qquad \forall (\overline{v}, \overline{w}) \in \mathcal{L} :$$
$$\int\limits_{\Omega} B\nabla^2 v : (\nabla^2 \overline{v} - \nabla^2 v) - \int\limits_{\Omega} f(\overline{v} - v) + \int\limits_{S} b w_{xx}(\overline{w}_{xx} - w_{xx}) - \int\limits_{S} g(\overline{w} - w) \geq 0. \tag{31}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть параметр сдвиговой жесткости* $\lambda$ *стремится к бесконечности. Тогда решения вариационного неравенства* (14) *сходятся к решению вариационного неравенства* (31) *в смысле сходимости* (27).

Вариационное неравенство (31) представляет собой слабую постановку задачи о равновесии пластины и тонкого упругого препятствия, в которой пластина описывается в рамках теории Кирхгофа – Лява, а препятствие – в рамках теории Бернулли – Эйлера. Задача равновесия в указанной постановке изучалась в недавних работах [15, 22]. В этих работах для вариационного неравенства (31) была доказана теорема существования и было установлено, что оно при достаточно гладких решениях эквивалентно следующей краевой задаче: найти функцию $v$, заданную в $\Omega$, и функцию $w$, заданную на $S$, такие, что

$$\operatorname{div}\operatorname{div}\big(B\nabla^2 v\big) = f \quad \text{в } \Omega_S, \tag{32}$$
$$[m_\nu(v)] = 0 \quad \text{на } S, \tag{33}$$
$$[t_\nu(v)] + (b w_{xx})_{xx} = g \quad \text{на } S, \tag{34}$$
$$[t_\nu(v)](v - w) = 0 \quad \text{на } S, \tag{35}$$
$$[t_\nu(v)] \geq 0, \quad v - w \geq 0 \quad \text{на } S, \tag{36}$$
$$[v] = 0, \quad [v_\nu] = 0 \quad \text{на } S, \tag{37}$$
$$w = 0, \quad w_x = 0 \quad \text{на } \partial S, \tag{38}$$
$$v = 0, \quad v_n = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{39}$$

Здесь

$$m_\nu(v) = (B\nabla^2 v)\nu \cdot \nu, \quad t_\nu(v) = \big(\operatorname{div}(B\nabla^2 v)\big)\cdot \nu + \frac{\partial}{\partial \tau}\big((B\nabla^2 v)\nu \cdot \tau\big),$$

а $\tau$ – ортогональный к $\nu$ единичный вектор. Дифференциальное уравнение (32) служит уравнением равновесия пластины, а дифференциальное уравнение (34) – уравнением равновесия препятствия. Соотношения (33)–(36) характеризуют скачки изгибающего момента $m_\nu$ и перерезывающей силы $t_\nu$ на множестве возможного контакта пластины с препятствием. Соотношения (37)–(39) обеспечивают отсутствие трещин и изломов в пластине, а также закрепление края пластины и концов препятствия.

## 3. Задача оптимального управления

Предметом изучения в данном параграфе является задача оптимального управления, в которой отысканию подлежит значение параметра сдвиговой жесткости пластины, доставляющее минимум определенному функционалу качества. Функционал качества при этом характеризует отклонение точек пластины и препятствия от заданных функций. Нашей целью является продемонстрировать, что подобная постановка задачи оптимального управления корректна и доказать для нее теорему о существовании решения.

Пусть промежуток $[\lambda_0, \infty]$, где $\lambda_0 = const > 0$, представляет собой множество допустимых управлений. Пусть функции $\varphi_\star \in H_0^1(\Omega)^2$, $v_\star \in H_0^1(\Omega)$, $w_\star \in H_0^2(S)$ известны. Для каждого значения $\lambda$ определим функционал качества по формуле

$$G(\lambda) = \|\varphi^\lambda - \varphi_\star\|_{H_0^1(\Omega)^2} + \|v^\lambda - v_\star\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w^\lambda - w_\star\|_{H_0^2(S)}. \tag{40}$$

Здесь и далее будем считать, что при $\lambda < \infty$ функции $\varphi^\lambda$, $v^\lambda$, $w^\lambda$ задаются непосредственно решением вариационного неравенства (14), функции $v^\infty$, $w^\infty$ задаются решением вариационного неравенства (31), а функция $\varphi^\infty$ определяется равенством $\varphi^\infty = \nabla v^\infty$ в $\Omega$.

Отметим, что при определении функционала (40) конечным значениям управляющего параметра и значению бесконечность соответствуют решения различных задач равновесия. В то же время, функционал качества (40) определен корректно и однозначно, поскольку для вариационных задач (14) и (31) справедливы теоремы о существовании и единственности решений.

Задача оптимального управления состоит в следующем: найти такое $\lambda \in [\lambda_0, \infty]$, что

$$G(\lambda) = \min_{\overline{\lambda} \in [\lambda_0, \infty]} G(\overline{\lambda}). \tag{41}$$

Сформулируем и докажем для этой задачи теорему существования.

**Теорема 5.** *Задача оптимального управления* (41) *имеет решение.*

*Доказательство.* Рассмотрим минимизирующую последовательность $\lambda_n$ такую, что

$$\lambda_n \in [\lambda_0, \infty], \quad G(\lambda_n) \to \min_{\overline{\lambda} \in [\lambda_0, \infty]} G(\overline{\lambda}). \tag{42}$$

Без ограничения общности можно полагать, что последовательность $\lambda_n$ является сходящейся. Возможны только три случая:

1. $\lambda_n < \infty$ для $n \geq n_0$ и $\lambda_n \to \lambda_*$, где $\lambda_* < \infty$;
2. $\lambda_n < \infty$ для $n \geq n_0$ и $\lambda_n \to \infty$;
3. $\lambda_n = \infty$ для $n \geq n_0$.

Существование решения задачи (41) в последнем случае очевидно, и мы не будем его анализировать. Рассмотрим первый и второй случаи. Опираясь на результаты предыдущего параграфа, по теоремам 3 и 4 находим, что выполняется либо сходимость

$$(\varphi^{\lambda_n}, v^{\lambda_n}, w^{\lambda_n}) \to (\varphi^{\lambda_*}, v^{\lambda_*}, w^{\lambda_*}) \text{ сильно в } H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S),$$

либо сходимость

$$(\varphi^{\lambda_n}, v^{\lambda_n}, w^{\lambda_n}) \to (\varphi^{\infty}, v^{\infty}, w^{\infty}) \text{ сильно в } H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S),$$

в зависимости от того, какой именно из первых двух случаев реализуется. Из указанных сходимостей следует либо сходимость $G(\lambda_n) \to G(\lambda_*)$, либо сходимость $G(\lambda_n) \to G(\infty)$. Отсюда в силу определения (42) минимизирующей последовательности вытекает, что $\lambda_*$ и $\infty$ являются точками минимума функционала $G$ в первом и во втором случае соответственно. Таким образом, доказано, что для всех возможных случаев решение задачи оптимального управления (41) существует.

$\square$

## References


[1] H. Lewy, *On a variational problem with inequalities on the boundary*, J. Math. Mech., **17**:9 (1968), 861–884. Zbl 0153.43303

[2] H. Lewy, *On the coincidence set in variational inequalities*, J. of Differ. Geom., **6** (1972), 497–501. Zbl 0255.31002

[3] J. Frehse, *On Signorini's problem and variational problems with thin obstacles*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. **4** (1977), 343–362. Zbl 0353.49020

[4] L.A. Caffarelli, *Further regularity for the Signorini problem*, Commun. Partial Differ. Equations, **4**:9 (1979), 1067–1075. Zbl 0427.35019

[5] I. Athanasopoulos, L.A. Caffarelli, *Optimal regularity of lower-dimensional obstacle problems*, J. Math. Sci., **132**:3 (2006), 274–284. Zbl 1108.35038

[6] I. Athanasopoulos, L.A. Caffarelli, S. Salsa, *The structure of the free boundary for lower dimensional obstacle problems*, Am. J. Math., **130**:2 (2008), 485–498. Zbl 1185.35339

[7] A. Petrosyan, H. Shahgholian, N.N. Ural'tseva, *Regularity of free boundaries in obstacle-type problems*, American Mathematical Society, Providence, 2012. Zbl 1254.35001

[8] B. Schild, *A regularity result for polyharmonic variational inequalities with thin obstacles*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci., IV, **11**:1 (1984), 87–122. Zbl 0554.49003

[9] B. Schild, *On the coincidence set in biharmonic variational inequalities with thin obstacles*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci., IV, **13**:4 (1986), 559–616. Zbl 0704.35055

[10] N.N. Ural'tseva, *Regularity of solutions of variational inequalities*, Russi. Math. Surv., **42**:6 (1987), 191–219. Zbl 0696.49022

[11] N.N. Ural'tseva, *An estimate of the derivatives of the solutions of variational inequalities on the boundary of the domain*, J. Sov. Math., **45**:3 (1989), 1181–1191. Zbl 0718.35039

[12] N. Guillen, *Optimal regularity for the Signorini problem*, Calc. Var. Partial Differ Equ., **36**:4 (2009), 533–546. Zbl 1180.35579

[13] N. Garofalo, M.S.V. Garcia, *New monotonicity formulas and the optimal regularity in the Signorini problem with variable coefficients*, Adv. Math., **262** (2014), 682–750. Zbl 1295.35155

[14] H. Koch, A. Rüland, W. Shi, *The variable coefficient thin obstacle problem: Carleman inequalities*, Adv. Math., **301** (2016), 820–866. Zbl 1346.35240

[15] A.M. Khludnev, K.H. Hoffmann, N.D. Botkin, *The variational contact problem for elastic objects of different dimensions*, Sib. Math. J., **47**:3 (2006), 584–593. Zbl 1115.74038

[16] A.I. Furtsev, *Differentiation of energy functional with respect to delamination's length in problem of contact between plate and beam*, Sib. Electron. Mat. Izv., **15** (2018), 935–949. Zbl 1406.35394

[17] A. Khludnev, G. Leugering, *Unilateral contact problems for two perpendicular elastic structures*, Z. Anal. Anwend., **27**:2 (2008), 157–177. Zbl 1147.35047

[18] A. Khludnev, A. Tani, *Unilateral contact problem for two inclined elastic bodies*, Eur. J. Mech. A, Solids, **27**:3 (2008), 365–377. Zbl 1154.74372

[19] T.A. Rotanova, *Unilateral contact problem for two plates with a rigid inclusion in the lower plate*, J. Math. Sci., **188**:4 (2013), 452–462. Zbl 1261.14025

[20] N.V. Neustroeva, *A rigid inclusion in the contact problem for elastic plates*, J. Appl. Ind. Math., **4**:4 (2010), 526–538. Zbl 1230.74114

[21] A.I. Furtsev, *On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion*, J. Math. Sci., **237**:7 (2019), 530–545. Zbl 07099432

[22] A.I. Furtsev, *A contact problem for a plate and a beam in the presence of adhesion*, J. Appl. Ind. Math., **13**:2 (2019), 208–218. Zbl 07139117

Alexey Igorevich Furtsev
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
15, Lavrent'ev ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
*E-mail address*: `al.furtsev@mail.ru, furtsev@hydro.nsc.ru`