Рецензия на статью
«Searching for groups related to pseudo-composition algebras»

Работа посвящена изучению конечных погрупп в группе автоморфзимов так называемых псевдо-композиционных алгебр. В тексте явным образом не сформулировано, что является основным результатом, в частности нет ни одной доказанной теоремы. Как один из вариантов – предлагаю сформулировать, что получены вспомогательные утверждения, которые могут быть применены для изучения группы Миямото любой конечно порождённой аксиальной псевдо-композицонной алгебры (в частности, предложение 1, утверждение 2). Стоит также отметить, что данная работа существенно опирается на препринт неопубликованной работы arXiv:2309.05237.

К тексту есть ряд замечаний. Считаю, что работа требует существенной доработки.

Замечания. Далее идет список замечаний по ходу текста.

1. В аннотации и во введении упоминается, что класс псевдо-композционных алгебр является подклассом аксиальных алгебр, но это неверно, корректнее писать – псевдо-композционные алгебры, порожденные идемпотентами.

2. В определении псевдо-композиционной алгебры нужно дополнительно требовать, что форма является ненулевой, иначе для каждого идемпотента $x^2 = x$ будет выполняться равенство $x = x^3 = 0x$ (см. также определение этих алгебр в цитируемой работе Meyberg, Osborn, 1993).

3. Алгебры Мацуо не просто тесно связаны с группами 3-транспозиций, а это их определение – взять группу 3-транспозиций и построить по ней алгебру.

4. Можно уточнить, что через $\mathbb{R}$ обозначается поле действительных чисел.

5. В определении группы Миямото не понятно, порождается ли она всеми инволюциями для всех осей или только инволюциями для порождающего множества?

6. Перед тем как выписывать матрицу линейного оператора, нужно уточнить с какой стороны автор рассматривает действие операторов на векторных пространствах на протяжении статьи.

7. В 2-порожденном случае предполагается, что базис – это a, b, ab. Заметим, что это верно для универсальной алгебры. Если вычислять параметры, при которых порядок конечен, то рассматривать универсальную алгебру недостаточно. В основной работе arXiv:2309.05237, на которую опирается данная работа, в Следствии 1 отмечено, что 2-порожденная алгебра бывает двумерной в двух случаях: $\alpha = 1$ и $\alpha = -\frac{1}{2}$. При этом, несложно убедиться, что для $\alpha = -\frac{1}{2}$ Миямото инволюция имеет порядок 2. В статье же этот случай считается невозможным, поскольку в универсальной алгебре порядок будет равен ∞.

8. Похоже, что предложение 1 можно доказать без привлечения платных математических программ. Более того, его можно сформулировать в более общем случае: например, если поле имеет характеристику 0, то $\tau^{2l} = I \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$, для случая же квадратных корней достаточно, чтобы они существовали в данном поле.

8. В разделе 3 фиксируется универсальная алгебра. Вообще говоря, таких алгебр много, а именно универсальная алгебра фиксирована, как только зафиксированы 4 параметра фробениусовой формы на порождающих идемпотентах.

9. Матрица Грама пишется с заглавной буквы и в английском языке.

10. В Statement 1 не сказано, что такое j.

11. Не совсем понятно как можно применять Statement 1 в следующей ситуации: порядок $\tau_a\tau_b$ в универсальной алгебре равен ∞, а в факторе этот порядок конечен (как раз такая ситуация возникает в 2-порожденной алгебре для $\alpha = \frac{-1}{2}$).

12. В доказательстве предложения 3 $\alpha = \frac{1}{4}$ не является корнем многочлена f_1 (похоже, что нужно брать $f_1(\alpha) - 1$).

13. В предложении 4 правильнее формулировать заключение, что G – фактор-группа группы $k^2 \rtimes D_6$.

14. Утверждение Statement 2 можно усилить на случай конечно порождённых алгебр: поскольку порядок $\tau_a\tau_b$ зависит только от параметра α и всякая аксиальная псевдо-композиционная алгебра имеет базис из идемпотентов, то, например, для $\alpha = -\frac{1}{8}$ имеем $(\tau_a\tau_b)^3$ фиксирует любой идемпотент c, поэтому – это тождественный оператор на всей алгебре.

15. Не совсем понятно в итоге как доказывается Предложение 5 – если группа A_5, порождаётся τ_a, τ_b, τ_c, то почему эти инволюции должны удовлетворять конкретным соотношениям из какого-то копредставления A_5?