S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том , № , стр. – (2023) УДК ???.??
https://doi.org/.??? MSC ??X??

О СОГЛАСОВАНИИ МЕТРИКИ И ЛИНЕЙНОГО ПОРЯДКА

П. КЛИМОВ И Р. СЕНГУПТА

Abstract: In this paper, we study the relationship between the metric and linear order in metric spaces. We introduce several equivalent definitions of the agreement of a metric with a linear order and study their basic properties. For $\mathbb{R}^n$ and similar spaces in which there is a subspace isometric to an open ball in $\mathbb{R}^n$, we prove the impossibility of introducing an order that agrees with the metric. We also introduce a family of spaces called discrete curved lines and study their basic properties. For discrete curved lines, sufficient conditions are proved for the agreement of the metric with the order, both over the entire space globally and with respect to specific points. Using them, we construct spaces with non-trivial properties in which the order is in agreement with the metric.

Keywords: ordered metric spaces, metric spaces, linear order.

1 Введение

Метрические пространства являются одной из базовых математических структур, которая обобщает естественное понятие расстояния. Метрическая геометрия и метрический анализ имеют широкое приложение в различных областях математики и приложений математики [1, 2, 3, 4, 5].

Klimov, P, Sengupta R. On the agreement of metric and linear order.

Исследование второго автора поддержано грантом Российского научного фонда № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/.
Поступила г., опубликована г.

С другой стороны, другой базовой структурой явлется упорядоченное, или, более узко, линейно упорядоченное множество [6, 7, 8, 9].

Обе эти структуры естественным образом возникают на множестве действительных чисел. Более того, существует понятие топологии, порожденной порядком, которое связывает порядок с топологией, порожденной естественной метрикой на прямой [10]. Однако в исследованиях редко рассматриваются метрические пространства, которые каким-либо образом согласуются с порядком.

Мы вводим естественный способ связать метрику и порядок. В этом определении метрика и линейный порядок называются согласованными, если большая близость пары точек по метрике означает большую близость и по порядку в тех ситуациях, когда подобное сравнение по порядку возможно.

Оказывается, что это определение не сводится к связи исключительно топологии и порядка. Используя эту теорию, мы можем доказывать некоторые факты, например, отсутствие естественного с этой точки зрения порядка на плоскости.

В рамках этой статьи мы также строим ряд нетривиальных метрических пространств, согласованных с порядком, которые не изометричны подмножествам прямой.

2 Основные определения

Пусть $(X, d, \leq)$ является множеством с метрикой d и нестрогим линейным порядком $\leq$.

Дадим базовые определения согласованности метрики с порядком.

Определение 1. *Порядок $\leq$ на X мы будем называть согласованным с метрикой d слева, если $d(x,y) \leq d(x,z) \quad \forall x,y,z \in X : x \leq y \leq z$.*

Определение 2. *Порядок $\leq$ на X мы будем называть согласованным с метрикой d справа, если $d(y,z) \leq d(x,z) \quad \forall x,y,z \in X : x \leq y \leq z$.*

Определение 3. *Порядок $\leq$ на X мы будем называть согласованным с метрикой d, если он согласован с ней справа и слева.*

Замечание 4. *Далее мы будем говорить как "порядок согласован с метрикой", так и "метрика согласована с порядком". Иными словами, это свойство связывает обе эти структуры симметрично.*

В этой статье мы будем фокусироваться на изучении вопросов согласованности тех или иных метрик с порядком в смысле определения 3.

Определение 5. *Порядок $\leq$ на X мы будем называть согласованным с нормой $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$, если он согласован с метрикой $d(x,y) = ||x-y||$ порождаемой ею.*

Замечание 6. *Нетрудно видеть, что метрика d в пространстве X согласована с порядком $\leq$ тогда и только тогда, когда*

$$d(x,z) \geq \max\{d(y,z), d(x,y)\} \quad \forall x,y,z \in X : x \leq y \leq z.$$

Очевидно, что $\mathbb{R}$ является метрическим пространством, согласованным с порядком.

Кроме того, существуют другие примеры метрических пространств, согласованных с порядком. Тривиальным примером является дискретное метрическое пространство с произвольным линейным порядком.

Из определения согласованности также вытекает следующая лемма:

Лемма 7. *Пусть в метрическом пространстве (X, d) метрика d согласована с порядком $\leq$. Тогда индуцированная метрика на любом подмножестве X будет согласована с индуцированным порядком.*

Напомним, что на линейно упорядоченном множестве $(X, <)$ мы можем определять топологию порядка как топологию с предбазой «открытых лучей» $\{x \mid a < x\},\ \{x \mid x < b\},\ a, b \in X$.

Мы могли бы предположить, что определение согласованности метрических пространств и линейных порядков сводится к топологии порядка. Покажем, что это не так.

Замечание 8. *Метризуемые топологии порядка и метрические пространства, в которых метрика согласована с порядком, не сводятся "естественным"образом друг к другу. Нетрудно видеть, что мы можем однозначно получить топологию порядка по порядку и порядок по топологии порядка. В отличие от определения топологии порядка, порядок может быть согласован с разными метриками, в том числе с точки зрения порождаемой топологии, и данная метрика может быть согласована с разными порядками. Например, дискретная метрика и евклидова метрика на прямой согласованы со стандартным линейным порядком на прямой, но порождают разные топологии. Далее, дискретная метрика на любом множестве согласована с любым порядком на этом множестве.*

3 Несогласованность с порядком естественных многомерных пространств

В этом параграфе мы построим конструкции метрических пространств, в которых невозможно ввести какой либо линейный порядок, согласованный с метрикой. Используя этот подход, мы докажем для широкого класса многомерных нормированных пространств невозможность введения какого-либо линейного порядка, который будет согласован с их нормой.

Начнем со следующего очевидного утверждения.

Предложение 9. *Для любого метрического пространства не более чем из 3 точек можно ввести порядок, который согласован с метрикой.*

Оказывается, для четырех точек это уже не всегда верно.

Теорема 10. *Пусть в метрическом пространстве $\mathcal{M}$ существуют четрые различные точки X, Y, Z, T такие, что*

$$\min\{d(X,Z), d(Y,T)\} \geq \max\{d(Y,Z), d(X,Y), d(X,T), d(T,Z)\}.$$

Тогда не существует порядка, согласованного с метрикой.

Доказательство. Предположим противное, что в $\mathcal{M}$ можно ввести порядок, согласованный с метрикой. Так как $d(X,Z) \geq \max\{d(Y,Z), d(X,Y)\}$ по определению согласованности, имеем $X \leq Y \leq Z$ либо $Z \leq Y \leq X$. Без ограничения общности будем считать, что $X \leq Y \leq Z$. Следовательно, так как $d(X,Z) \geq \max\{d(X,T), d(T,Z)\}$, имеем что $X \leq T \leq Z$. Так как $d(Y,T) \geq \max\{d(Y,X), d(T,X)\}$, имеем $T \leq X \leq Y$ либо $Y \leq X \leq T$. Из этого следует, что $X = T$ либо $X = Y$. Следовательно, получили противоречие. □

Данную конструкцию возможно применить дальше. Для этого нам потребуются следующие определения:

Определение 11. *Пусть даны вещественные числа r, x и $y, r > 0$. Будем называть $(r,x,y)_1$-системой набор из точек на плоскости $\{X,Y,Z,T\}$, $X = (r+x, r+y)$, $Y = (-r+x, r+y)$, $Z = (-r+x, -r+y)$, $X = (r+x, -r+y)$.*

Будем называть $(r,x,y)_\infty$-системой набор из точек на плоскости $\{X,Y,Z,T\}$, $X = (r+x, y)$, $Y = (x, r+y)$, $Z = (-r+x, y)$, $T = (x, -r+y)$.

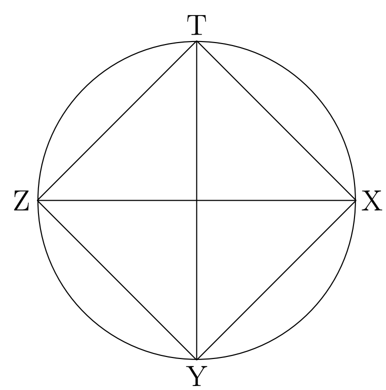

Рис. 1. Пример $(r,0,0)_\infty$-системы $S = \{X,Y,Z,T\}$ на плоскости вокруг начала координат. Нетрудно видеть, что диаметры получившегося ромба с вершинами из S по 2-норме больше, чем стороны, что показывает верность условия теоремы 10.

Лемма 12. *На $(r,x,y)_k$-системе нельзя ввести порядок, согласованный с индуцированной с p-нормы на плоскости метрики, для*

1) $k = 1$ и $1 \leq p < \infty$.

2) $k = \infty$ и $1 < p \leq \infty$.

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из проверки условия теоремы 10. □

Определение и лемма выше позволяют получить следующую полезную лемму, которая может быть использована для доказательства несогласованности метрики с порядком для целого ряда пространств:

Лемма 13. *На открытом шаре $B_r(x, y)$ из $\mathbb{R}^2$ для любого $1 < p \leq \infty$ нельзя ввести порядок, согласованный с метрикой, индуцированной с p-нормы.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что для любых $x, y \in \mathbb{R}, r > 0, 1 \leq p \leq \infty$ верно $(\frac{r}{3}, x, y)_1 \subset B_r(x, y)$ и $(\frac{r}{2}, x, y)_\infty \subset B_r(x, y)$. □

Теорема 14. *Не существует порядка, согласованного с метрикой, для любого метрического пространства, которое содержит подмножество, изометричное открытому шару на плоскости с p-нормой, $1 \leq p \leq \infty$.*

В частности, не существует указанного порядка в следующих пространствах:

(1) $\mathbb{R}^n$ *с p-нормой при* $n > 1, 1 \leq p \leq \infty$;
(2) ℓ_p *при* $1 \leq p \leq \infty$;
(3) $L_p[a, b]$ *при* $[a, b] \subset \mathbb{R},\ 1 \leq p \leq \infty$;
(4) $L_p(A)$, *где A измеримое пространство с мерой, в котором содержатся два непересекающихся подмножества A_1 и A_2 с конечной ненулевой мерой,* $1 \leq p \leq \infty$;
(5) *Открытый шар в любом из перечисленных выше пространств.*

Доказательство. Из утверждения пункта (5) следуют утверждения пунктов (1)-(4) по лемме 7. Докажем пункт (5) для каждого из этих пространств. Для этого изометрически вложим открытый шар из $\mathbb{R}^2$ в соответствующее пространство и воспользуемся леммой 13.

1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Мы можем изометрически вложить $B_r(0,0)$ по p-норме в $B_r(x)$ по p-норме:

$f((y_1, y_2)) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3, \ldots, x_n)$.

2. Пусть $x \in \ell_p$. Мы можем изометрически вложить $B_r(0, 0)$ по p-норме в $B_r(x)$ по ℓ_p норме:

$f(y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3, \ldots)$.

3. Мы можем изометрически вложить $\mathbb{R}^2$ по p-норме в $L_p[a, b]$:

$f(y_1, y_2) = \frac{y_1}{\sqrt[p]{\frac{b-a}{2}}} I_{[a, a+\frac{(b-a)}{2}]} + \frac{y_2}{\sqrt[p]{\frac{b-a}{2}}} I_{[a+\frac{(b-a)}{2}, b]}$. Покажем изометричность f. Для (y_1, y_2) и (y_1', y_2') :

$$d((y_1,y_2),(y_1',y_2')) = \sqrt[p]{|y_1-y_1'|^p+|y_2-y_2'|^p} =$$
$$= \sqrt[p]{\int_a^b \frac{2}{b-a}\left(|y_1-y_1'|^p I_{[a,a+\frac{(b-a)}{2}]} + |y_2-y_2'|^p I_{[a+\frac{(b-a)}{2},b]}\right)(z)dz} =$$
$$= d(f((y_1,y_2)), f((y_1',y_2'))).$$

и f инъективно.

Для любого $B_r(x) \subset L_p[a,b]$ мы можем сузить f на какой-нибудь открытый шар, лежащий в $f^{-1}(B_r(x))$, построив таким образом изометрическое вложение открытого шара из $\mathbb{R}^2$ в $B_r(x)$.

4. Достаточно повторить рассуждения пункта 3 для $f(y_1,y_2) = \frac{y_1}{\sqrt[p]{\mu(A_1)}} I_{A_1} + \frac{y_2}{\sqrt[p]{\mu(A_2)}} I_{A_2}$.

□

4 Конструкции согласованных с порядком метрических пространств

В предыдущей главе мы дали множество примеров пространств, которые не были согласованы с каким-либо линейным порядком. Большая часть таких пространств была получена путем естественного изометрического вложения в них каких-то подобластей $\mathbb{R}^n$, иными словами, речь шла о пространствах, локально "многомерных"и "естественно-схожих"с многомерным вещественным пространством.

При этом из пространств, которые подходили под условия согласованности с каким-то порядком, приводились только вырожденные конечные метрические пространства (не более чем из 3 точек), дискретная метрика и $\mathbb{R}$.

Построим пример более нетривиального пространства с такими свойствами, полученного путем некой деформации счетного подмножества точек на прямой.

Для начала напомним определение равномерно дискретного множества [11].

Определение 15. *Если (M,d) — метрическое пространство, а $A \subset M$, то радиус покрытия r множества A определяется как:*

$$r = \frac{1}{2}\inf_{x,y\in A} d(x,y).$$

Определение 16. *Множество называется равномерно дискретным, если оно имеет ненулевой радиус покрытия.*

Теперь введем определение дискретной искривленной прямой, которая будет является модельным примером множества для многих конструкций в этой главе.

Определение 17. *Пусть (M, d) метрическое пространство. Пусть D счетное равномерно дискретное подмножество $\mathbb{R}$ с радиусом покрытия r. Обозначим через X образ изометрического вложения D в M.*

Пусть для любого $x \in X$ выбран $u_x \in M$ так, что существует $C > 0$, такой что для всех $x \in X$ верно что $d(x, u_x) \leq C$. Пусть $\varepsilon = \inf\{C | \ \forall x \in X \ d(x, u_x) \leq \delta\}$.

Будем называть множество $\{u_x\}_{x \in X}$ с индуцированной метрикой из M и индуцированным с X порядком (то есть $u_{x_1} \leq u_{x_2}$, если $x_1 < x_2$) дискретной искривленной прямой или, если мы хотим подчеркнуть параметры, то $(r, \varepsilon)-$дискретной искривленной прямой.

Попробуем рассмотреть мотивацию подобного определения.

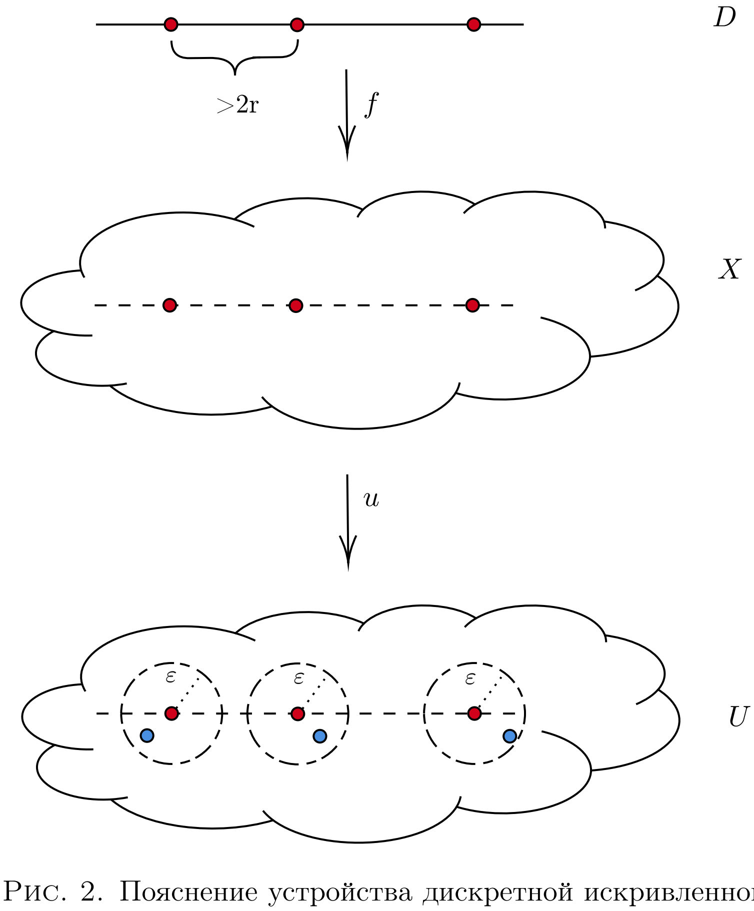

Рис. 2. Пояснение устройства дискретной искривленной прямой: мы выбираем некоторое равномерно дискретное подмножество $D \subset \mathbb{R}$ с радиусом покрытия r (то есть с точками на расстоянии друг от друга не менее $2r$), изометрически некой f вкладываем его в новое метрическое пространство, обозначая образ как X, а потом строим подмножество U, смещая не более чем на ε элементы X.

Она сводится к двум простым идеям.

1) Мы берем некое счетное подмножество точек прямой (которая вложена в другое метрическое пространство) на достаточно большом расстоянии друг от друга (например $\mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}$, где все точки не менее чем на 1 отдалены друг от друга).

2) Делаем некий небольшой (относительно расстояния между точками) сдвиг каждой точки.

За счет того, что сдвиг невелик, мы можем рассчитывать, что для тройки упорядоченных точек $x \leq y \leq z$ для результатов сдвига $x' \leq y' \leq z'$ расстояние $d(x', z')$ останется больше, чем $d(x', y')$, и $d(y', z')$, так как все попарные расстояния изменятся слабо относительно большой разницы, которая существовала между $d(x, z)$ и расстояниями $d(x, y)$ и $d(y, z)$.

Дискретная искривленная прямая в общем виде позволяет делать произвольные сдвиги относительно изначального расположения точек с точки зрения геометрии пространства, в которое происходит вложение.

Теперь докажем общую теорему о достаточных условиях на согласованность метрики с порядком для дискретных искривленных прямых.

Теорема 18. (Достаточное условие на согласованность метрики с порядком для дискретной искривленной прямой)

Пусть U - (r, ε)-дискретная искривленная прямая в метрическом пространстве (M, d). Тогда, если $\varepsilon \leq \frac{r}{2}$, то метрика на U согласована с порядком на U.

Доказательство. По Определению 17 для U найдется X, который является изометрическим образом равномерно дискретного подмножесва $\mathbb{R}$ с радиусом покрытия r и $U = \{u_x\}_{x \in X}$, где $d(x, u_x) < \varepsilon$.

Расмотрим 3 точки $u_{x_1} \leq u_{x_2} \leq u_{x_3}$ (что означает, что $x_1 \leq x_2 \leq x_3$).

Тогда $d(u_{x_1}, u_{x_2}) \leq d(x_1, x_2) + d(u_{x_1}, x_1) + d(u_{x_2}, x_2) \leq 2r + 2\varepsilon$, что следует из неравенства треугольника и определения равномерно дискретной прямой.

Нетрудно видеть, что на X (так как X изометричен подмножеству прямой с радиусом покрытия r) $d(x_1, x_3) = d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \geq 4r$.

Аналогично рассуждению выше $d(x_1, x_3) \leq d(u_{x_1}, u_{x_3}) + d(u_{x_1}, x_1) + d(u_{x_3}, x_3) \leq d(u_{x_1}, u_{x_3}) + 2\varepsilon$, из чего следует, что $d(u_{x_1}, u_{x_3}) \geq d(x_1, x_3) - 2\varepsilon \geq 4r - 2\varepsilon$.

Нетрудно видеть, что если $\varepsilon \leq \frac{r}{2}$, то $d(u_{x_1}, u_{x_2}) \leq 2r + 2\varepsilon \leq 4r - 2\varepsilon \leq d(u_{x_1}, u_{x_3})$.

Аналогично и для случая $d(u_{x_2}, u_{x_3}) \leq d(u_{x_1}, u_{x_3})$, таким образом метрика оказывается согласованной с порядком.

□

Как мы видим, дискретная искривленная прямая при достаточно маленьких ε согласована по своей метрике со своим порядком и является примером нетривиального метрического пространства, которое согласовано с неким порядком.

С другой стороны, при увеличении ε относительно r свойство согласованности с порядком может нарушаться.

Пример 19. (Сдвиг влево точки растянутых натуральных чисел) *Рассмотрим растянутое на $2r$ множество натуральных чисел как подмножество $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой, $X = 2r\mathbb{N}$. Сдвинем точку $4r$ на $\varepsilon > 2r$ влево. Тогда $U = \{u_x\}_{x\in X}$, где*

$$u_x = \begin{cases} 4r - \varepsilon & \text{если } x = 4r \\ x & \text{иначе} \end{cases}$$

будет (r, ε)-дисретной искривленной прямой, где порядок не согласован с метрикой.

В целом, конструируя разные примеры дискретных искривленных прямых, мы можем заметить, что увеличение параметра ε относительно r ведет к увеличению числа примеров, где метрика не согласована с порядком. Было бы естественно предположить, что при больших ε метрика гарантировано перестанет быть согласованной с порядком. Однако продемонстрируем контрпример.

Пример 20. (Сдвинутое вверх и растянутое множество натуральных чисел)

Пусть $U = 2r\mathbb{N}e_1 + \varepsilon e_2 = \{(2rn, \varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$. Нетрудно видеть, что это множество является (r, ε)-дискретной искривленной прямой. Однако порядок здесь согласован с метрикой, какое большое ε мы не взяли бы (так как все метрические свойства и свойства порядка не меняются относительно этого изометрического сдвига).

Таким образом, мы наблюдаем следующую картину относительно (r, ε)-дискретной искривленной прямой:

1) При небольших ε относительно r (достаточно $\varepsilon \leq \frac{r}{2}$ по теореме 18) верно, что метрика согласована с порядком.

2) Если же мы перейдем некий порог (достаточно $\varepsilon > 2r$ по примеру 19), то появляются дискретные искривленные прямые, в которых метрика не согласована с порядком, однако, при сколь угодно больших ε найдутся и обратные примеры, такие как пример 20, когда метрика согласована с порядком.

Встает открытый вопрос о том, каково максимальное значение ε, при котором порядок был бы гарантированно согласован с метрикой.

Проблема 21. *Чему равна минимальное $m(r)$ такое, чтобы любая (r, ε)-дискретная искривленная прямая при $\varepsilon \leq m(r)$ гарантированно имела согласование своей метрики относительно порядка? По теореме 18 и Примеру 19 верно что $\frac{r}{2} \leq m(r) \leq 2r$.*

Разумеется, конкретные условия на ε относительно r для согласования метрики с порядком могут меняться, если мы рассматриваем какие-то конкретные метрические пространства, их классы или непосредственно способы осуществлять изометрическое вложение и выбирать новые точки.

Может сложиться впечатление, что всевозможные согласованные с порядком дискретные искривленные прямые в точности похожи на обычную прямую по своим метрическим и общим характеристикам, так как получаются просто некими сдвигами каких-то точек на этой прямой.

Вместе с тем мы можем выбирать дискретные искривленные прямые, которые по определенным свойствам могут сильно отличаться от прямой и давать нам нетривиальные примеры пространств с метрикой, согласованной с порядком.

Лемма 22. *Для любого бесконечного нормированного пространства V над $\mathbb{R}$ существует согласованное с неким порядком счетное подмножество U, которое не лежит не в каком конечномерном подпространстве (то есть $\dim span(U) = \infty$).*

Доказательство. Возьмем какое-то счетное подмножество базисных векторов $\{e_1, \dots\}$. Рассмотрим $(r, \frac{r}{2})$-дискретную искривленную прямую $U \subset V$, $U = \{u_n = 2nre_1 + \frac{r}{2}e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где e_i - i-ый базисный вектор. Нетрудно видеть, что U является $(r, \frac{r}{2})$-дискретной искривленной прямой (получаемой сдвигом вверх по n-ой координате вложения растянутых на $2r$ натуральных чисел, вложенных на первую координатную ось), по теореме 18 метрика в ней согласована с порядком и векторы в U линейно независимы, так как в разных u_i есть уникальные e_i в разложении по базису.

$\square$

Теорема 18 дает достаточные условия для того, чтобы дискретная искривленная прямая была согласована с порядком. Вместе с тем часто нам удается строить примеры пространств, в которых метрика согласована с порядком, путем каких-то конкретных направленных деформаций отдельных точек определенным образом. Иногда мы можем воспользоваться достаточными условиями на всю прямую, но хочется иметь более конкретный способ оценить допустимые изменения в конкретной точке.

Теорема 23. (Поточечное достаточное условие на согласованность метрики с порядком для дискретной искривленной прямой) *Пусть у нас есть дискретная искривленная прямая U, получаемая по множеству X. Пронумеруем элементы X в соотвествии с порядком на $\mathbb{R}$ целыми числами (если есть ограничение сверху или снизу, то можно брать положительные или отрицательные целые числа). Пусть $d(u_{x_i}, x_i) = \varepsilon_i$. Тогда U согласована метрикой с порядком, если для всех i верно, что*

$$\varepsilon_i \le \min_{j<i,\ k>i} \max\left(2r(k-i) - 2\varepsilon_j - \varepsilon_k, 2r(i-j) - 2\varepsilon_k - \varepsilon_j\right)$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку x_i и рассмотрим произвольные точки x_j, x_k, $x_j \le x_i \le x_k$.

Тогда $d(u_{x_i}, u_{x_j}) \le d(x_i, x_j) + d(u_{x_i}, x_i) + d(u_{x_j}, x_j) \le 2(i-j)r + \varepsilon_i + \varepsilon_j$ (так как на прямой между x_i и x_j в точности $j-i$ по $2r$).

Аналогично, $d(u_{x_j}, u_{x_k}) \le 2(k-i)r + \varepsilon_i + \varepsilon_k$.

Рассмотрим аналогично выше $d(x_j, x_k) \le d(u_{x_j}, u_{x_k}) + d(u_{x_j}, x_j) + d(u_{x_k}, x_k) \le d(u_{x_j}, u_{x_k}) + \varepsilon_j + \varepsilon_k$, из чего следует, что $d(u_{x_j}, u_{x_k}) \ge d(x_j, x_k) - \varepsilon_j - \varepsilon_k \ge (k-j)2r - \varepsilon_j - \varepsilon_k$.

Тогда при $(k-j)2r - \varepsilon_j - \varepsilon_k \ge \max(2(i-j)r + \varepsilon_i + \varepsilon_j, 2(k-i)r + \varepsilon_i + \varepsilon_k)$, то есть при $\varepsilon_i \le \max(2r(k-i) - 2\varepsilon_j - \varepsilon_k, 2r(i-j) - 2\varepsilon_k - \varepsilon_j)$ у нас будет выполняться согласованность метрики с порядком для тройки $u_{x_j}, u_{x_i}, u_{x_k}$. Если мы будем здесь выбирать произвольный i и к нему произвольные $j < i, k > i$, учитывая ограниченность сверху ε_i, получаем условия леммы.

□

Все вышеперечисленные примеры согласованных своей метрикой с порядком дискретных искривленных прямых в нормированных пространствах, как правило, обладали тем свойством, что их проекция на координатную ось, проведенную через изначальные точки X, обладала тем же порядком, что и был на самой дискретной искривленной прямой. Иными словами, точки оказывались упорядоченными просто по координате изначальной прямой друг относительно друга.

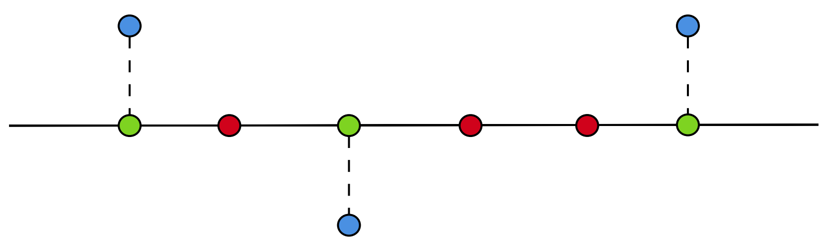

Рис. 3. Пример дискретной искривленной прямой у которой метрика согласована с порядком. Так как мы делаем небольший сдвиг, то проекция сохраняет порядок, который наблюдался на изначальном множестве.

Продемонстрируем, что это бывает верно не всегда.

Пример 24. *Рассмотрим множество натуральных чисел $X = \mathbb{N}e_1$, вложенное в плоскость с евклидовой метрикой. Тогда множество $U = \{u_x\}_{x \in X}$, где*

$$u_x = \begin{cases} (0.5, 1.5) & \text{если } x = (2,\ 0) \\ x & \text{иначе} \end{cases}$$

будет дискретной искривленной прямой с метрикой, согласованной с порядком, но проекция U на ось x (на которой лежит X) имеет порядок, не совпадающий с порядком на этой оси как на прямой.

Доказательство. Для проверки согласованности с порядком отметим, что единственной измененной точкой является $u_{(2,0)}$. Нетрудно видеть, что если мы возьмем точки $u_{x_1} = (1, 0)$, $u_{x_2} = (0.5, 1.5)$, $u_{x_3} = (3, 0)$ согласованность будет выполняться (проверяется вычислением расстояний). Остальные случаи следуют из теоремы 23 и того, что $\varepsilon_i = 0\ \forall i \neq 2$. □

Замечание 25. *Нетрудно видеть, что если взять в примере 24 точки $u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}$ из доказательства выше, то неравенство треугольника для них не обращается в равенство в каком либо порядке, из чего следует, что это метрическое пространство неизометрично подмножеству прямой. Таким образом, дискретная искривленная прямая позволяет строить неизометричные подмножеству прямой метрические пространства, где метрика согласована с порядком. Впрочем, нетрудно видеть, что это выполнено для ряда примеров дискретной искривленной прямой выше. Большинство нетривиальных дискретных искривленных прямых будут обладать такой неизометричностью.*

References

[1] M. Maurice Fréchet. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22(1):1–72, December 1906.

[2] Mikhail Gromov. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. 01 2007.

[3] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov. A course in metric geometry. *Graduate Studies in Math.*, 33, 01 2001.

[4] Leo Liberti and Carlile Lavor. Six mathematical gems from the history of distance geometry. *International Transactions in Operational Research*, 23(5):897–920, April 2015.

[5] John C. Bowers and Philip L. Bowers. A menger redux: Embedding metric spaces isometrically in euclidean space. *The American Mathematical Monthly*, 124(7):621, 2017.

[6] Laszlo Fuchs. *Partially ordered algebraic systems*, volume 28. Courier Corporation, 2011.

[7] Matatyahu Rubin. Theories of linear order. *Israel Journal of Mathematics*, 17(4):392–443, March 1974.

[8] E. Zermelo. Untersuchungen ber die grundlagen der mengenlehre. i. *Mathematische Annalen*, 65(2):261–281, June 1908.

[9] A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, and S.E. Zhukovskiy. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications*, 201:330–343, 2016. 2014 International Conference on Topology and its Applications, Nafpaktos, Greece.

[10] J.L. Kelley. *General Topology*. Ishi Press International, 2008.

[11] Peter A. B. Pleasants. Designer quasicrystals: Cut-and-project sets with pre-assigned properties. In *Directions in mathematical quasicrystals*, pages 95–141. Providence, RI: AMS, American Mathematical Society, 2000.

Petr Klimov
Email address: peterklimov@yandex.ru

Richik Sengupta
Skolkovo Institute of Science and Technology,
30 Bolshoy Boulevard, Territory of the Skolkovo Innovation Center
121205, Moscow, Russian Federation
Derzhavin Tambov State University,
33 International St.,
392036, Tambov, Russian Federation
Email address: r.sengupta@skoltech.ru