УДК 512.57

О конструкции Мицухары для эндоморфов

А. П. Пожидаев[1]

Аннотация. *Рассматривается конструкция Мицухары для эндоморфов. Показывается, что данная конструкция даёт почти простые алгебры, используемые для построения новых примеров простых правосимметрических алгебр. Для исследования расширений Мицухары даётся описание дифференцирований эндоморфов, построенных на неунитальных алгебрах, что обобщает результат, полученный ранее в унитальном случае.*

Ключевые слова: *правосимметрическая алгебра, простая алгебра, прелиева алгебра, конструкция Мицухары, эндоморф, дифференцирование.*

1. Конструкция Мицухары

Алгебра $\mathcal{A}$ называется *правосимметрической*, если ассоциатор $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ на $\mathcal{A}$ является правосимметричным, т. е. он симметричен относительно двух последних элементов: $(x, y, z) = (x, z, y)$ для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$ (далее символ $:=$ означает равенство по определению). Аналогично определяются левосимметрические (прелиевы) алгебры, которые оказываются антиизоморфными правосимметрическим.

В работе [1] была введена конструкция одномерного расширения левосимметрической алгебры и построены различные примеры простых левосимметрических алгебр, в основном исходя из "вырожденных" алгебр. Случай, когда исходная алгебра является простой, остался в [1] неисследован. Изучение данного случая началось в работе [2], где рассматривалась конструкция Мицухары для матричной алгебры и алгебр Бурдэ. Также в [2] построены различные обобщения конструкции Мицухары и новые примеры простых прелиевых алгебр, полученных при помощи данной конструкции, в частности построен простой дубль Витта ассоциативной коммутативной унитальной алгебры. Из вышеуказанной работы видно, что конструкция Мицухары играет важную роль при построении и изучении простых прелиевых алгебр. В [4] было введено понятие эндоморфа произвольной неассоциативной алгебры, и, в частности, было показано, что эндоморфы право(лево)симметрических алгебр дают огромнейший класс простых право(лево)симметрических алгебр. В настоящей работе изучается конструкция Мицухары для эндоморфов произвольных неассоциативных алгебр.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

Зафиксируем произвольное основное поле F. В дальнейшем, $\langle\Upsilon\rangle := \langle\Upsilon\rangle_F$ — линейная оболочка множества Υ над F, где символ F опускается, если поле ясно из контекста. Для данной алгебры $\mathcal{A}$ через L_a и R_a обозначаются операторы левого и правого умножения на элемент $a \in \mathcal{A}$, т.е. $L_a(b) = ab = R_b(a)$ для любого $b \in \mathcal{A}$. Всюду далее через e_{ij} обозначаются обычные матричные единицы, $E := 1$ — единичная матрица (или тождественное преобразование); δ_{ij} — символ Кронекера; $\mathrm{tr}(A)$ — след A; $(x, y, z)_{rs} := (x, y, z) - (x, z, y)$; $[x, y] := xy - yx$ — коммутатор элементов x, y. Если V — векторное пространство над F, то через V^* обозначается дуальное пространство к V, а через $\mathrm{End}\,(V)$ — алгебра всех F-линейных операторов на V, образ элемента $x \in V$ под действием $\phi \in \mathrm{End}\,(V)$ часто обозначается $\phi_x := \phi(x)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F. Следуя [3], симметрическую билинейную форму $H(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{A}$ со значениями в F будем называть *Гессианом*, если

$$H(xy, z) - H(x, yz) \;\;=\;\; H(xz, y) - H(x, zy) \tag{1}$$

для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$.

Приведём конструкцию Мицухары [1] расширения алгебры $\mathcal{A}$ при помощи 2-нильпотента или идемпотента, т.е. такого элемента u, что $u^2 = \varepsilon u$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $u \notin \mathcal{A}$. Гессиан H и дифференцирование D на $\mathcal{A}$ назовём *ε-согласованными*, если

$$\varepsilon H(x, y) \;\;=\;\; H(D_x, y) + H(x, D_y) \tag{2}$$

для любых $x, y \in \mathcal{A}$ (при этом согласованные пары $(H, 0)$ и $(0, D)$ назовём *тривиальными*). Рассмотрим одномерное расширение $\mathcal{A}$ при помощи $\langle u\rangle$ и *ε-согласованной* пары (H, D), на котором произведение определяется правилами

$$\begin{aligned} u \cdot u &\;=\; \varepsilon u,\ u \cdot x = 0,\ x \cdot u = D_x, \\ x \cdot y &\;=\; xy + H(x, y)u \end{aligned} \tag{3}$$

для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Обозначим полученную алгебру через $\mathcal{A}(H, D)$. Алгебру $\mathcal{A}(H, D)$ будем называть *ε-расширением Мицухары* алгебры $\mathcal{A}$. Как следует из [1], $\mathcal{A}(H, D)$ является правосимметрической алгеброй, если такова исходная алгебра.

Обозначим через $M^\perp := \{x \in \mathcal{A} : H(x, m) = 0$ для любого $m \in M\}$ *ортогональное дополнение* к множеству M в алгебре $\mathcal{A}$ относительно Гессиана H алгебры $\mathcal{A}$.

Лемма 1.1. [1] *Подпространство $I = Fu \oplus J$ является идеалом в $\mathcal{A}(H, D)$ тогда и только тогда, когда J — такой идеал в $\mathcal{A}$, что $D(\mathcal{A}) \subseteq J$. Подпространство J из $\mathcal{A}$ является идеалом в $\mathcal{A}(H, D)$ тогда и только тогда, когда J — такой идеал в $\mathcal{A}$, что $D(J) \subseteq J$ и $J \subseteq \mathcal{A}^\perp$.*

Данная лемма не даёт описание всех идеалов в $\mathcal{A}(H, D)$ при $\varepsilon = 0$. В этом случае возможны также “неоднородные” идеалы, описываемые леммой 1.2 ниже, для формулировки которой удобно ввести следующее определение. Пусть (H, D) — 0-согласованная пара на алгебре $\mathcal{A}$. Правый D-инвариантный идеал I алгебры $\mathcal{A}$ назовём *(H, D)-идеалом с компаньоном $\alpha \in I^*$*, если

$$xa + \alpha_a D_x \in I,\ \alpha(ax) = \alpha(xa + \alpha_a D_x) = H(a, x),\ \alpha(D_a) = 0 \tag{4}$$

для всех $a \in I, x \in \mathcal{A}$. Следующая лемма была доказана в [2] для левосимметрического случая; правосимметрический случай абсолютно аналогичен, однако, так как данная лемма имеет принципиальное значение для данной работы, то мы приведём её доказательство.

Лемма 1.2. *Пусть J — подпространство в 0-расширении Мицухары $\mathcal{A}(H,D)$ алгебры $\mathcal{A}$ такое, что $J \nsubseteq \mathcal{A}$, $u \notin J$. Тогда J является идеалом в $\mathcal{A}(H,D)$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{A}$ существует (H,D)-идеал I с компаньоном α такой, что*

$$J = \langle a + \alpha_a u : a \in I \rangle .$$

Доказательство. Пусть J — идеал в $\mathcal{A}(H,D)$, $J \nsubseteq \mathcal{A}$, $u \notin J$. Тогда $c + u \in J$ для некоторого ненулевого $c \in \mathcal{A}$. Пусть $I = \{x \in \mathcal{A} : x + \alpha_x u \in J$ для некоторого $\alpha_x \in F\}$. Заметим, что I — подпространство в $\mathcal{A}$ и α_x определён единственным образом для любого $x \in \mathcal{A}$. Таким образом, естественно определяется $\alpha \in I^*$. Если $a + \alpha_a u \in J$, то $(a + \alpha_a u) \cdot u = D_a \in J$, т. е. $D_I \subseteq I$, $\alpha(D_I) = 0$. Далее, обозначим $(a,x) := H(a,x)$, тогда

$$(a + \alpha_a u) \cdot x = ax + (a,x)u \in J, \quad x \cdot (a + \alpha_a u) = xa + (a,x)u + \alpha_a D_x \in J,$$

откуда

$$ax \in I,\ xa + \alpha_a D_x \in I,\ \alpha(ax) = \alpha(xa + \alpha_a D_x) = (a,x)$$

для любых $a \in I, x \in \mathcal{A}$.

Обратно, если I — D-инвариантный (H,D)-идеал в $\mathcal{A}$ с компаньоном α, то $J = \langle a + \alpha_a u : a \in I \rangle$ — идеал алгебры $\mathcal{A}(H,D)$. Действительно, $(a + \alpha_a u) \cdot u = D_a \in J$, $u \cdot (a + \alpha_a u) = 0$, $(a + \alpha_a u) \cdot x = ax + (a,x)u \in J$, $x \cdot (a + \alpha_a u) = xa + (a,x)u + \alpha_a D_x \in J$, что и требовалось. □

Зафиксируем $\varepsilon \in \{0,1\}$. Пусть $\mathcal{A}_i(H_i, D_i)$ — ε-расширения Мицухары алгебр $\mathcal{A}_i, i = 1,2$. Рассмотрим прямую сумму $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ (как идеалов). Обозначим через $\mathcal{D}$ (соответственно, H) дифференцирование (Гессиан) алгебры $\mathcal{A}$, определённые правилами:

$$\mathcal{D}_{|\mathcal{A}_i} = D_i,\ H_{|\mathcal{A}_i} = H_i,\ H(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0,\ i = 1,2.$$

Как следует из [1], $(H, \mathcal{D})$ является согласованной парой на $\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}(H,D)$ называется прямым *расширением Мицухары* алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *разложимой*, если существуют нетривиальные алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ такие, что $\mathcal{A}$ является прямым расширением Мицухары алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. В противном случае $\mathcal{A}$ называется *неразложимой*. Важность ε-расширения Мицухары объясняет следующее

Предложение 1.1. [1] *Пусть $\mathcal{A}$ является прямым расширением Мицухары левосимметрических алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ просты, то и $\mathcal{A}$ является простой левосимметрической алгеброй.*

Алгебру $\mathcal{A}(H,D)$ назовём *почти простой*, если она либо проста, либо любой её собственный идеал не совпадает с $\mathcal{A}$, имеет коразмерность 1 и не содержит элемента u. Предложение 1.1 было усилено в [2] следующим образом.

Теорема 1.1. [2] *Пусть $\mathcal{A}_1(H_1, D_1)$ и $\mathcal{A}_2(H_2, D_2)$ — расширения Мицухары алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, и пусть $\mathcal{A}$ — прямое расширение Мицухары алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Алгебра $\mathcal{A}$ является простой тогда и только тогда, когда одна из алгебр $\mathcal{A}_1(H_1, D_1)$, $\mathcal{A}_2(H_2, D_2)$ проста, а другая почти проста.*

Если $\mathcal{A}$ — алгебра, то $\mathcal{A}^{(-)} := \langle [x,y] : x, y \in \mathcal{A} \rangle$.

Лемма 1.3. *Пусть $\mathcal{A}$ — правосимметрическая алгебра с 1, $H := (\,,\,)$ — Гессиан на $\mathcal{A}$, и $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(-)} \oplus \mathcal{B}$ для некоторого подпространства $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$. Тогда H полностью* *определяется своими значениями на* 1 *и базисе подпространства* $\mathcal{B}$, *при этом* $\mathcal{A}^{(-)} \subseteq F^{\perp}$ *и* $(x,y) = (1, xy)$ *для любых* $x, y \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Полагая $x = 1$ в (1), получаем $(1, yz) = (1, zy)$ для любых $y, z \in \mathcal{A}$. Полагая $y = 1$ в (1), получаем $(xz, 1) = (x, z)$ для любых $x, z \in \mathcal{A}$.

Обратно, пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(-)} \oplus \mathcal{B}$ и $\{b_i : i \in I\}$ — базис $\mathcal{B}$. Определим $(1, b_i) = (b_i, 1) = \beta_i \in F$ для всех $i \in I$, $(1, a) = (a, 1) = 0$ при $a \in \mathcal{A}^{(-)}$, и $(x, y) = (1, xy)$ для любых $x, y \in \mathcal{A}$. Тогда форма $(\ ,\ )$ является Гессианом на $\mathcal{A}$. Действительно, $(\ ,\ )$ симметрична на $\mathcal{A}$ и

$$(xy, z) - (x, yz) = (1, xy \cdot z - x \cdot yz) = (1, xz \cdot y) - (1, x \cdot zy) = (xz, y) - (x, zy)$$

для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$, что следует из правосимметричности $\mathcal{A}$. □

2. Дифференцирования эндоморфов неунитальных алгебр

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F. Рассмотрим прямую сумму (как векторных пространств) алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$: $E(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \oplus \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Наделим $E(\mathcal{A})$ произведением по правилу

$$A \cdot a \ = \ aA + [A, R_a] \tag{5}$$

для всех $a \in \mathcal{A}$, $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, где по определению $\mathcal{A}$ и $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ являются подалгебрами в $E(\mathcal{A})$, а $\mathcal{A}$ — это стандартный правый модуль над $\mathrm{End}\,(\mathcal{A}) : a \cdot A = aA$. Построенная алгебра называется *эндоморфом* алгебры $\mathcal{A}$ [4].

В [4] было доказано, что эндоморф правосимметрической алгебры является правосимметрической алгеброй и были описаны дифференцирования алгебры $E(\mathcal{A})$ в случае, когда алгебра $\mathcal{A}$ унитальна. В следующей теореме мы снимаем ограничение на унитальность алгебры.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}^{\sharp}$, полученную из $\mathcal{A}$ присоединением единицы 1. Очевидно, любое дифференцирование на $\mathcal{A}^{\sharp}$ имеет вид $D + \mu$, где $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, $\mu \in \mathcal{A}^*$, продолженные на $\mathcal{A}^{\sharp}$ правилом $(D + \mu)(1) = 0$. Легко заметить, что при этом $\mu(\mathcal{A}^2) = 0$ и

$$(ab)D \ = \ aD \cdot b + a \cdot bD + \mu_a b + \mu_b a \tag{6}$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}^2 := \langle \sum_{i=1}^{n} x_i y_i : x_i y_i \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \rangle$ — *квадрат* алгебры $\mathcal{A}$.

Определим *индуцированное* дифференцирование $\mathcal{D}$ эндоморфа $E(\mathcal{A})$ правилом $a\mathcal{D} = aD + a^D$, $A\mathcal{D} = [A, D]$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, при этом действие a^D определяется единственным образом из соотношения $xa^D = \mu_x a$. Будем говорить, что дифференцирование $\mathcal{D}$ *индуцируется* дифференцированием $D + \mu$ алгебры $\mathcal{A}^{\sharp}$. Как легко проверить, в этом случае $(xA)^D = x^D A$ для любых $x \in \mathcal{A}$, $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Далее также будем использовать более удобное обозначение $I_{\mu}^{a} := a^D$ для данного отображения и будем обозначать через I_{μ} отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ такое, что $I_{\mu}(a) = I_{\mu}^{a}$. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{D}$ является дифференцированием алгебры $E(\mathcal{A})$, а именно, это будет сделано в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— алгебра над полем* F. *Отображение* $\mathcal{D}$ *является дифференцированием* $E(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{D}$ *индуцируется дифференцированием алгебры* $\mathcal{A}^{\sharp}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ — дифференцирование алгебры $E(\mathcal{A})$. Обозначим $a\mathcal{D} := a_{\mathcal{D}} + a^{\mathcal{D}}$, где $a \in E(\mathcal{A})$, $a_{\mathcal{D}} \in \mathcal{A}$, $a^{\mathcal{D}} \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Докажем, что $A_{\mathcal{D}} = 0$ для всех $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Для всех $A, B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ имеем

$$(AB)\mathcal{D} = (A_{\mathcal{D}} + A^{\mathcal{D}})B + A(B_{\mathcal{D}} + B^{\mathcal{D}}), \tag{7}$$
$$(AB)_{\mathcal{D}} = A_{\mathcal{D}}B + B_{\mathcal{D}}A. \tag{8}$$

Из (8) следует, что $[A, B]_{\mathcal{D}} = 0$ для любых $A, B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Так как $\mathrm{End}\,(\mathcal{A}) = [\mathrm{End}\,(\mathcal{A}), \mathrm{End}\,(\mathcal{A})] + \langle E\rangle$, а $E\mathcal{D} = 0$ по (7)–(8), то $A_{\mathcal{D}} = 0$ для всех $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Значит, $\mathcal{D}$ действует инвариантно на $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и его ограничение D на $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ является дифференцированием $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ по (7). Следовательно, D является внутренним (см., например, [5]) и мы также обозначим через D отображение из $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, для которого $A^{\mathcal{D}} = [A, D]$.

Если $\dim \mathcal{A} = 1$, то либо $\mathcal{A} \cong F$, либо $\mathcal{A}^2 = 0$. По доказанному выше $A_{\mathcal{D}} = 0$ и $A^{\mathcal{D}} = 0$ для любой $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, поэтому $(a + A)\mathcal{D} = aD + I^a_\mu$ для любых $a \in \mathcal{A}, A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и некоторых $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}), \mu \in \mathcal{A}^*$, и непосредственная проверка показывает справедливость теоремы в данном случае.

Далее, пусть $x \in \mathcal{A}$ произвольный, а $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ выберем так, что $\mathrm{Ker}\,(A) = \langle x\rangle$. Тогда $0 = (xA)_{\mathcal{D}} = x_{\mathcal{D}}A + x[A, D]$, откуда $x_{\mathcal{D}}A = xDA$ и $x_{\mathcal{D}} = xD + \alpha_x x$ для некоторого $\alpha \in \mathcal{A}^*$. Аналогично, для любого $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ имеем $(xA)_{\mathcal{D}} = (xD + \alpha_x x)A + x[A, D] = xAD + \alpha_{xA}xA$, откуда $\alpha_{xA}xA = \alpha_x xA$ и $\alpha_x = \alpha$ для некоторого $\alpha \in F$ и любого $x \in \mathcal{A}$. Тогда $x_{\mathcal{D}} = x(D+\alpha E)$. Рассматривая вместо D отображение $D+\alpha E$, можно изначально считать, что $x_{\mathcal{D}} = xD$.

Из равенств

$$(xA)\mathcal{D} = (xD + x^{\mathcal{D}})A + x[A, D] = xAD + x^{\mathcal{D}}A,$$
$$(xA)\mathcal{D} = (xA)_{\mathcal{D}} + (xA)^{\mathcal{D}} = xAD + (xA)^{\mathcal{D}},$$

получаем $(xA)^{\mathcal{D}} = x^{\mathcal{D}}A$. Из равенств

$$(Ax)\mathcal{D} = [A, D]x + A(xD + x^{\mathcal{D}}) = x[A, D] + [[A, D], R_x] + xDA + [A, R_{xD}] + Ax^{\mathcal{D}},$$
$$(Ax)\mathcal{D} = (xA + [A, R_x])\mathcal{D} = xAD + x^{\mathcal{D}}A + [[A, R_x], D]$$

следует $[A, [D, R_x] + R_{xD} + x^{\mathcal{D}}] = 0$, откуда $[D, R_x] + R_{xD} + x^{\mathcal{D}} + \mu_x E = 0$ для некоторого $\mu \in \mathcal{A}^*$. Действуя последним равенством на произвольный $y \in \mathcal{A}$, выводим

$$yD \cdot x - (yx)D + y \cdot xD + yx^{\mathcal{D}} + \mu_x y = 0. \tag{9}$$

Далее,

$$(yx)\mathcal{D} = (yD + y^{\mathcal{D}})x + y(xD + x^{\mathcal{D}}) = yD \cdot x + xy^{\mathcal{D}} + [y^{\mathcal{D}}, R_x] + y \cdot xD + yx^{\mathcal{D}},$$
$$(yx)\mathcal{D} = (yx)D + (yR_x)^{\mathcal{D}} = (yx)D + y^{\mathcal{D}}R_x,$$

откуда $R_x y^{\mathcal{D}} = 0$ и $(yx)D = yD \cdot x + y \cdot xD + xy^{\mathcal{D}} + yx^{\mathcal{D}}$. Принимая во внимание (9), получаем $xy^{\mathcal{D}} = \mu_x y$ для любых $x, y \in \mathcal{A}$. Соотношение $R_x y^{\mathcal{D}} = 0$ даёт $\mu_x = 0$ для любого $x \in \mathcal{A}^2$. Продолжим D и μ на $\mathcal{A}^\sharp$ так, что $(D + \mu)(1) = 0$. Тогда полученное соотношение на D говорит о том, что отображение $D+\mu$ является дифференцированием на $\mathcal{A}^\sharp$.

Обратно, пусть отображение $\mathcal{D} \in \mathrm{End}\,(E(\mathcal{A}))$ индуцируется дифференцированием $D+\mu$ алгебры $\mathcal{A}^\sharp$. Заметим, что (6) и равенство $\mu(A^2)=0$ влекут следующие операторные равенства на $\mathcal{A}$:

$$[R_x, D] \;=\; R_{xD} + I_\mu^x + \mu_x E, \quad R_x I_\mu^y = 0 \tag{10}$$

для любых $x, y \in \mathcal{A}$. Имеем

$$\begin{aligned}
(a+A)(b+B)\mathcal{D} &= (ab + aB + bA + [A, R_b] + AB)\mathcal{D} = \\
&= abD + aBD + bAD + I_\mu^{ab+aB+bA} + [[A, R_b], D] + [AB, D]; \\
(a+A)\mathcal{D}\cdot(b+B) &= (aD + I_\mu^a + [A, D])\cdot(b+B) = aD\cdot b + aDB + \\
&\quad +bI_\mu^a + [I_\mu^a, R_b] + I_\mu^a B + b[A, D] + [[A, D], R_b] + [A, D]B; \\
(a+A)\cdot(b+B)\mathcal{D} &= (a+A)\cdot(bD + I_\mu^b + [B, D]) = a\cdot bD + a[B, D] + \\
&\quad +aI_\mu^b + bDA + [A, R_{bD}] + AI_\mu^b + A[B, D].
\end{aligned}$$

Используя (6), (10) и тождество Якоби, получаем следующее условие, при котором $\mathcal{D}$ является дифференцированием:

$$I_\mu^{ab+aB+bA} \;=\; I_\mu^a R_b + I_\mu^a B + I_\mu^b A.$$

Очевидно, что последнее равенство выполняется всегда, что и доказывает теорему. □

3. О конструкции Мицухары для эндоморфов

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра. Предположим, что существует $\lambda \in \mathcal{A}^*$ такой, что $ab = \lambda_b a$ (или $ab = \lambda_a b$) для всех $a, b \in \mathcal{A}$. В этом случае обозначаем $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}_\lambda$ и говорим, что $\mathcal{A}_\lambda$ — это *алгебра скалярного умножения.*

В [4] было показано, что эндоморф правосимметрической алгебры $\mathcal{A}$ является простой алгеброй, если $\mathcal{A}$ не является алгеброй скалярного умножения. Рассмотрим расширения Мицухары для алгебр $E(\mathcal{A}_\lambda)$. При этом рассмотрим отдельно самый вырожденный случай алгебр с нулевым умножением $\mathcal{A}_0$, когда $\lambda = 0$, в частности, из-за того, что результаты в этом случае отличаются от результатов случая алгебры ненулевого умножения. Отметим, что алгебра $E(\mathcal{A}_0)$ имеет следующее умножение:

$$a\cdot b = 0, a\cdot A = A\cdot a = aA, A\cdot B = AB$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}, A, B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$; при этом алгебра $E(\mathcal{A}_0)$ неассоциативна: $(A, B, a) = a[A, B] \neq 0$ в общем случае.

Далее обозначаем через $\mathrm{End}_0(\mathcal{A})$ подалгебру всех линейных преобразований в $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ со следом 0.

Легко видеть, что $E(\mathcal{A}_0)$ имеет единственный собственный идеал, совпадающий с $\mathcal{A}_0$. Действительно, пусть J — идеал отличный от $\mathcal{A}_0$. Если $0 \neq A \in \mathrm{End}(\mathcal{A}_0) \cap J$, то $\mathrm{End}(\mathcal{A}_0) \subseteq J$, а потому $J = E(\mathcal{A}_0)$. Значит, если $K = \langle A \in \mathrm{End}(\mathcal{A}_0) : a + A \in J \text{ для некоторого } a \in \mathcal{A}_0\rangle$, то K — ненулевой двухсторонний идеал в $\mathrm{End}(\mathcal{A}_0)$, откуда вновь получаем $J = E(\mathcal{A}_0)$.

Из теоремы 2.1 легко получается, что любое дифференцирование алгебры $E(\mathcal{A}_0)$ над полем характеристики не 2 имеет вид $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D]$ для некоторого $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$: в этом случае получаем соотношение $a\mu_b + b\mu_a = 0$, откуда $\mu = 0$. Идеал $\mathcal{A}_0$ инвариантен относительно любого дифференцирования алгебры $\mathcal{A}_0$ и он даёт идеал в $E(\mathcal{A}_0)(H, \mathcal{D})$, если $\mathcal{A}_0 \subseteq F^{\perp}$. Если $D \in \langle E \rangle$, то $\langle u \rangle \oplus \mathcal{A}_0$ — идеал в $E(\mathcal{A}_0)(H, \mathcal{D})$. Поэтому далее считаем, что $\mathcal{A}_0 \not\subseteq F^{\perp}$ и $D \notin \langle E \rangle$. Так как любая матрица C сравнима по модулю коммутатора с $\mathrm{tr}(C)\Gamma$ для некоторой фиксированной матрицы Γ, то по лемме 1.3 любой Гессиан H на $E(\mathcal{A}_0)$ задаётся условиями

$$H(E, a) = \alpha_a, \; H(A, B) = \gamma \mathrm{tr}(AB)$$

для некоторых фиксированных $\alpha \in \mathcal{A}_0^*, \gamma \in F$ и для всех $a \in \mathcal{A}_0, A, B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$.

Описание нетривиальных согласованных пар на эндоморфах даёт следующая

Лемма 3.1. *Пусть $(H, \mathcal{D})$ — нетривиальная ε-согласованная пара на $E(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра над полем F. Тогда* $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D} - \varepsilon E) \subseteq F^{\perp}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\varepsilon = 1$. Заметим, что (2) можно переписать в следующем виде $H(xy(E - \mathcal{D}), 1) = 0$ для любых $x, y \in E(\mathcal{A})$, так как любой эндоморф является унитальной алгеброй. Так как $E(\mathcal{A})^2 = E(\mathcal{A})$, то $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D} - E) \subseteq F^{\perp}$. При $\varepsilon = 0$ соотношение (2) записывается в виде $H(xy(\mathcal{D}), 1) = 0$, откуда $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D}) \subseteq F^{\perp}$. □

Теорема 3.1. *0-Расширение Мицухары $E(\mathcal{A}_0)(H, \mathcal{D})$ над полем характеристики не 2 является простой алгеброй тогда и только тогда, когда $D(\mathcal{A}_0) \subseteq F^{\perp}$ и* $H(\mathcal{A}_0, E(\mathcal{A}_0)) \neq 0$.

Доказательство. По лемме 1.1 для доказательства простоты 0-расширения Мицухары алгебры $E(\mathcal{A}_0)$ достаточно проверить отсутствие $(H, \mathcal{D})$-идеалов в $E(\mathcal{A}_0)$. Пусть I — $(H, \mathcal{D})$-идеал в $E(\mathcal{A}_0)$. Легко видеть, что любой правый идеал в $E(\mathcal{A}_0)$ имеет вид $\mathcal{A}_0 \oplus J$ для некоторого правого идеала J в $\mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$. Пусть $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D]$ для некоторого $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0), D \notin \langle E \rangle$. Условие $xa + \alpha_a \mathcal{D}_x \in I$ для всех $a \in I, x \in E(\mathcal{A}_0)$ даёт

$$aA + \alpha_a [A, D] \in I \tag{11}$$

при $x = A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$ и $a \in \mathcal{A}_0$ таком, что $\alpha_a \neq 0$ (заметим, что $\alpha_a = H(a, 1)$ для любого $a \in I$). Пусть $K := \langle A \in \mathrm{End}(\mathcal{A}_0) : a + A \in I$ для некоторого $a \in \mathcal{A}_0 \rangle$. Так как $D \notin \langle E \rangle$ и $H(\mathcal{A}_0, E(\mathcal{A}_0)) \neq 0$, то из (11) следует, что K — это ненулевой двухсторонний идеал в $\mathrm{End}(\mathcal{A}_0)$. Таким образом, $K = \mathrm{End}(\mathcal{A}_0)$. В итоге, $I = E(\mathcal{A}_0)$. □

В частности, если $0 \neq D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$ не является обратимым, то на $E(\mathcal{A}_0)$ определяется Гессиан H так, что пара $(H, \mathcal{D}), \mathcal{D} := D + [\,\cdot, D]$, является 0-согласованной. Действительно, достаточно записать $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B} \oplus D(\mathcal{A}_0)$ и определить $H(E, \mathcal{B})$ ненулевым. Таким образом, справедливо

Следствие 3.1. *Если D — ненулевое вырожденное отображение на $\mathcal{A}_0$, то существует Гессиан H на $E(\mathcal{A}_0)$ такой, что 0-расширение Мицухары $E(\mathcal{A}_0)(H, \mathcal{D})$ является простой алгеброй, где* $\mathcal{D} := D + [\,\cdot, D]$.

Комбинируя леммы 1.1 и 3.1, получаем, что справедлива

Теорема 3.2. *Пусть $(H, \mathcal{D})$ — нетривиальная 1-согласованная пара на $E(\mathcal{A}_0)$. Тогда 1-расширение Мицухары алгебры $E(\mathcal{A}_0)$ является простой правосимметрической алгеброй.*

Доказательство. Достаточно заметить, что из условия нетривиальности и 1-согласованности пары $(H, \mathcal{D})$ следует $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D} - E) \subseteq F^{\perp}$ и $H(\mathcal{A}_0, E(\mathcal{A}_0)) \neq 0$. В частности,

$D \notin \langle E\rangle$, $\mathcal{A}_0 \nsubseteq F^{\perp}$ и $H(A,B)=0$ для любых $A,B\in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_0)$. Так как единственный собственный идеал в $E(\mathcal{A}_0)$ — это $\mathcal{A}_0$, то 1-расширение Мицухары алгебры $E(\mathcal{A}_0)$ по лемме 1.1 является простой правосимметрической алгеброй, поскольку $\mathcal{D}(E(\mathcal{A}_0)) \nsubseteq \mathcal{A}_0$ и $H(\mathcal{A}_0, E(\mathcal{A}_0)) \neq 0$. □

Далее рассматриваем только конечномерные алгебры скалярного умножения $\mathcal{A}_\lambda$, а также считаем, что $\lambda \neq 0$ и $\dim(\mathcal{A}_\lambda) := n > 1$, так как иначе $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}_\lambda)=0$. Также предполагаем, что умножение в $\mathcal{A}_\lambda$ задаётся правилом $xy=\lambda_y x$, $\lambda \in \mathcal{A}_\lambda^*$.

Пусть $\mathrm{Ann}_r(\mathcal{A}) := \{x\in\mathcal{A} : \mathcal{A}x=0\}$ — правый аннулятор алгебры $\mathcal{A}$.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_\lambda;\cdot)$ — алгебра со скалярным ненулевым умножением. Отображение $\mathcal{D}$ является дифференцированием $\mathcal{A}^\sharp$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Ann}_r(\mathcal{A})$, $\mathcal{D}(1)=0$.*

Доказательство. Заметим, что $x\in \mathrm{Ann}_r(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \lambda_x=0$. Как в § 2 имеем $\mathcal{D}=D+\mu$, где $D\in\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, $\mu\in\mathcal{A}^*$. Для любых $x,y\in\mathcal{A}$ по (6) справедливо

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\in \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}^\sharp) \;&\Leftrightarrow\; (x\cdot y)\mathcal{D} = x\mathcal{D}\cdot y + x\cdot y\mathcal{D} + \mu_y x + \mu_x y\\
&\Leftrightarrow\; \lambda_y x\mathcal{D} = \lambda_y x\mathcal{D} + \lambda_{y\mathcal{D}} x + \mu_y x + \mu_x y\\
&\Leftrightarrow\; \lambda_{y\mathcal{D}} x + \mu_y x + \mu_x y = 0 \Leftrightarrow \mu = 0,\ y\mathcal{D}\in \mathrm{Ann}_r(\mathcal{A}),
\end{aligned}$$

что и доказывает лемму. □

Легко видеть, что в любой алгебре $\mathcal{A} := \mathcal{A}_\lambda$ размерности $n\in\mathbb{N}$ можно выбрать *стандартный базис* $e_1,\dots,e_n$ так, что все ненулевые произведения являются следующими $e_ie_n=e_i, i=1,\dots,n$. Действительно, так как $\lambda\in\mathcal{A}^*$, то можно положить $\mathrm{Ker}\,\lambda = \langle e_i : i=1,\dots,n-1\rangle$ и выбрать e_n так, что $\lambda(e_n)=1$. Любой Гессиан на $E(\mathcal{A})$ задаётся условиями $H(e_n,E)=\alpha, H(e_i,E)=0, H(A,B)=\beta \mathrm{tr}(AB)$ для некоторых $\alpha,\beta\in F$ и для любого $i\neq n$. Поэтому далее считаем $\alpha\neq 0$, так как иначе $\mathcal{A}$ будет идеалом в $E(\mathcal{A})(H,\mathcal{D})$. По лемме 3.2 $\mathcal{D}=D+[\,\cdot\,,D]$ для некоторого $D\in\mathrm{End}\,(\mathcal{A},\mathrm{Ann}_r(\mathcal{A}))$. Теперь легко видеть, что $H(x\mathcal{D},y)+H(x,y\mathcal{D})=0$ для любых $x,y\in E(\mathcal{A})$.

Покажем, что любой ненулевой $(H,\mathcal{D})$-идеал I, для нетривиальной согласованной пары $(H,\mathcal{D})$, совпадает с $E(\mathcal{A})$. Пусть $0\neq x=a+B_0\in I, 0\neq a\in\mathcal{A}, B_0\in\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Домножая x справа на e_{ji} можно получить, что $e_i+B_i\in I$ для всех $i=1,\dots,n$ и некоторых $B_i\in\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Если $B_0\in I$, то, домножая B_0 справа на e_i, $i=1,\dots,n$, приходим к случаю выше. Таким образом, $I=\mathcal{A}+J$ для некоторого правого идеала $J\subseteq\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Покажем, что $\mathcal{A}\subseteq I$. Легко видеть, что если $e_n+A\in I$ при $A\in\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, то можно считать $A=-e_{nn}$ (рассматривая $(e_n+A)e_j\in I$ при $j=1,\dots,n-1$). Но тогда $(e_n-e_{nn})e_{ni}=e_i-e_{ni}\in I$ для любого i, и из (4) получаем $e_n(e_i-e_{ni})=-e_i\in I$, так как $\alpha_{e_i-e_{ni}}=0$, т. е. $\mathcal{A}\subseteq I$. Таким образом, $I=\mathcal{A}\oplus J$. Используя (4) при произвольном $x=B\in\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и $a\in\mathcal{A}$ таком, что $\alpha_a\neq 0$, получаем $Ba+\alpha_a[B,D]\in I$, т. е. $[\mathrm{End}\,(\mathcal{A}),D]\subseteq I$. Снова применяя (4) при произвольных $x=B\in\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и $a=y+A\in I, y\in\mathcal{A}, A\in\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, выводим, что J — это левый идеал в $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, откуда $I=E(\mathcal{A})$. Таким образом, справедлива

Теорема 3.3. *0-Расширение Мицухары алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$ является простой алгеброй тогда и только тогда, когда $H(\mathcal{A}_\lambda,\mathcal{A}_\lambda)\neq 0$ и $\mathcal{D}=D+[\,\cdot\,,D]$ для некоторого ненулевого $D\in\mathrm{End}\,(\mathcal{A}_\lambda,\mathrm{Ann}_r(\mathcal{A}_\lambda))$.*

Лемма 3.3. *В любом 1-расширении Мицухары алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$ подалгебра $\mathcal{A}_\lambda$ является идеалом.*

Доказательство. Пусть $(H, \mathcal{D})$ — 1-согласованная пара на $U := E(\mathcal{A}_\lambda)$ и $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D]$ для некоторого $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}_\lambda, \mathrm{Ann}_r(\mathcal{A}_\lambda))$. Покажем тривиальность H, что, совместно с леммой 1.1, и докажет лемму. По лемме 3.1 $\mathrm{Im}\,(\mathcal{D} - E) \subseteq F^\perp$. Так как $\mathrm{Im}\,(D) \subseteq F^\perp$, то $E(\mathcal{A}_\lambda) \subseteq F^\perp$ и $H = 0$. □

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное векторное пространство над полем F, $\mathcal{B}$ — подпространство в $\mathcal{A}$ коразмерности 1 и $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, a \rangle$ для некоторого $a \in \mathcal{A}$. Возьмём $D \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\alpha \in F$, и определим на $\mathcal{A}$ произведение правилом

$$x \cdot a \;=\; \alpha x - xD, \quad x \cdot y = 0$$

для всех $x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}$. Обозначим полученную алгебру через $\mathcal{B}_{\alpha,D}$ и назовём *одномерным расширением абелевой алгебры* при помощи дифференцирования.

Лемма 3.4. *Алгебра $\mathcal{B}_{\alpha,D}$ является правосимметрической, при этом $D \in \mathrm{Der}\,(\mathcal{B}_{\alpha,D})$.*

Доказательство. Пусть $X = x+\delta a, Y = y+\beta a, Z = z+\gamma a$ — произвольные элементы из $\mathcal{B}_{\alpha,D}$, где $x, y, x \in \mathcal{B}, \delta, \beta, \gamma \in F$. Покажем, что $(X, Y, Z)_{rs} = 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
(XY)Z &= (\beta(\alpha x - D_x) + \beta\delta(\alpha a - D_a))(z + \gamma a) = \\
&= \alpha\beta\gamma(\alpha x - D_x) - \beta\gamma(\alpha D_x - xD^2) + \alpha\beta\gamma\delta(\alpha a - D_a) - \beta\gamma\delta(\alpha D_a - aD^2); \\
X(YZ) &= (x + \delta a)(\gamma(\alpha y - D_y) + \beta\gamma(\alpha a - D_a)) = \alpha\beta\gamma(\alpha x - D_x) + \alpha\beta\gamma\delta(\alpha a - D_a); \\
(X, Y, Z) &= \beta\gamma(xD^2 - \alpha D_x) + \beta\gamma(\delta a D^2 - \alpha\delta D_a),
\end{aligned}$$

откуда получаем $(X, Y, Z)_{rs} = 0$.

Проверим включение $D \in \mathrm{Der}\,(\mathcal{B}_{\alpha,D})$. Имеем

$$\begin{aligned}
(X \cdot Y)D &= \beta(\alpha D_x - xD^2) + \beta\delta(\alpha D_a - aD^2), \; X \cdot YD = 0, \\
XD \cdot Y &= (D_x + \delta D_a)(y + \beta a) = \beta(\alpha D_x - xD^2) + \beta\delta(\alpha D_a - aD^2),
\end{aligned}$$

что и доказывает лемму. □

Пусть $(H, \mathcal{D})$ — нетривиальная 0-согласованная пара на эндоморфе $E(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F, $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D] + I_\mu, D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}), \mu \in \mathcal{A}^*$. Предположим, что существует невырожденный гомоморфизм правых $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$-модулей $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ такой, что $I_\mu^a = Da^\phi,\; R_a + a^\phi + \alpha_a D = \gamma\alpha_a E,\; \alpha_a I_\mu^b = \gamma\alpha_a b^\phi$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$ и для некоторого ненулевого $\gamma \in F$, где $\alpha_a = H(a + a^\phi, 1)$, $\alpha(aD) = 0$ для всех $a \in \mathcal{A}$. В этом случае $\mathcal{A}$ назовём *модульной алгеброй пары* $(H, \mathcal{D})$.

Лемма 3.5. *Пусть $(H, \mathcal{D})$ — нетривиальная 0-согласованная пара на $E(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F, $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D] + I_\mu, D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}), \mu \in \mathcal{A}^*$.*

1. *Если $J = \langle x + H(x, 1)u : x \in \mathcal{A} \rangle$ является идеалом алгебры $E(\mathcal{A})(H, \mathcal{D})$, то либо $\mathcal{A}$ — это алгебра скалярного умножения, либо $\mathcal{A}$ — одномерное расширение абелевой алгебры при помощи дифференцирования.*

2. *Если $K = \left\langle x + x^\phi + \alpha_x u : x \in \mathcal{A} \right\rangle$ является идеалом алгебры $E(\mathcal{A})(H, \mathcal{D})$ для некоторого ненулевого линейного отображения $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и некоторого $\alpha \in \mathcal{A}^*$, то $\mathcal{A}$ — это модульная алгебра пары $(H, \mathcal{D})$.*

Доказательство. 1. Для любого $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ имеем

$$A \cdot (x + H(x, 1)u) = xA + [A, R_x] + H(A, x)u + H(x, 1)[A, D] \in J,$$

откуда $[A, R_x + H(x,1)D] = 0$ для любого $x \in \mathcal{A}$. Если $\mathcal{A} \subseteq F^{\perp}$, то $\mathcal{A}$ — алгебра скалярного умножения. Пусть $\mathcal{A} \not\subseteq F^{\perp}$. Представим $\mathcal{A}$ в виде $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \langle a \rangle$, где $H(a,1) = 1, H(b,1) = 0$ для любого $b \in \mathcal{B}$. Тогда $[A, R_b] = 0$ для любых $b \in \mathcal{B}$ и $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, т. е. $R_b = \gamma_b E$ для некоторого $\gamma \in \mathcal{B}^*$. Имеем $R_a + D = \alpha E$ для некоторого $\alpha \in F$. Так как $a + u \in J$, то $(a+u) \cdot u \in J$, откуда $aD \in \mathcal{B}$ и $I_\mu^a = 0$. Если $x \in \mathcal{B}$, то $x \in J$ и $x \cdot u = x\mathcal{D} = xD + I_\mu^x \in J$, откуда $I_\mu = 0, \mathcal{B}D \subseteq \mathcal{B}$. Так как $xa = \alpha x - xD$ для любого $x \in \mathcal{B}$, то $xa \in \mathcal{B}$. Тогда

$$0 = H(xa, 1) = H(x, a) = H(a, x) = H(ax, 1) = \gamma(x)$$

для любого $x \in \mathcal{B}$, т. е. $\gamma = 0$. Таким образом, получили, что $\mathcal{A}$ — одномерное расширение абелевой алгебры при помощи дифференцирования.

2. Пусть $K = \left\langle a + a^\phi + \alpha_a u : a \in \mathcal{A} \right\rangle$, $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, $\alpha \in \mathcal{A}^*$. Тогда

$$(a + a^\phi + \alpha_a u) \cdot A = aA + a^\phi A + H(a + a^\phi, A)u \in K$$

для любых $a \in \mathcal{A}$, $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, откуда $\alpha_a = H(a + a^\phi, 1)$, $(aA)^\phi = a^\phi A$. Таким образом, ϕ — это гомоморфизм правых $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$-модулей. Так как $\phi \neq 0$, то ϕ, как легко видеть, является невырожденным. С другой стороны,

$$A \cdot (a + a^\phi + \alpha_a u) = aA + [A, R_a] + Aa^\phi + H(a + a^\phi, A)u + \alpha_a [A, D] \in K$$

для любых $a \in \mathcal{A}$, $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, откуда $R_a + a^\phi + \alpha_a D = \beta_a E$ для некоторого $\beta \in \mathcal{A}^*$. Также имеем $(a + a^\phi + \alpha_a u) \cdot u = aD + I_\mu^a + [a^\phi, D] \in K$, откуда $\alpha(aD) = 0$, $(aD)^\phi = I_\mu^a + [a^\phi, D]$ и $I_\mu^a = Da^\phi$. Более того,

$$(a + a^\phi + \alpha_a u) \cdot b = ab + a^\phi b + H(a + a^\phi, b)u = ab + ba^\phi + [a^\phi, R_b] + H(a + a^\phi, b)u \in K,$$

откуда $(ab + ba^\phi)^\phi = [a^\phi, R_b]$ и $b^\phi a^\phi + R_b a^\phi = 0$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Домножая равенство $R_a + a^\phi + \alpha_a D = \beta_a E$ справа на b^ϕ, из полученных равенств выводим $\alpha_a I_\mu^b = \beta_a b^\phi$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$, откуда $\beta = \gamma\alpha$ для некоторого ненулевого $\gamma \in F$. Таким образом, $\mathcal{A}$ является модульной алгеброй пары $(H, \mathcal{D})$. □

При доказательстве теоремы 3.4 нам понадобится следующий простой результат из линейной алгебры.

Лемма 3.6. *Пусть $A \in M_n(F), n \geq 2, A \neq 0$. Тогда существует $B \in M_n(F)$ со следом 0 такая, что $AB \neq 0$, а $\mathrm{tr}(AB) = 0$.*

Теорема 3.4. *Пусть $(H, \mathcal{D})$ — нетривиальная ε-согласованная пара на эндоморфе $E(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — алгебра над полем F, не являющаяся алгеброй скалярного умножения, одномерным расширением абелевой алгебры при помощи дифференцирования или модульной алгеброй пары $(H, \mathcal{D})$. Тогда расширение Мицухары алгебры $E(\mathcal{A})$ является почти простой неразложимой алгеброй, которая проста при $\varepsilon = 1$ и локальна при $\varepsilon = 0$ с единственным собственным идеалом $I_u = \langle a + H(a,1)u : a \in E(\mathcal{A}) \rangle$ коразмерности 1. При этом I_u — это простая неразложимая правосимметрическая алгебра.*

Доказательство. Из [4] следует, что $E(\mathcal{A})$ является простой алгеброй. Теперь при $\varepsilon = 1$ утверждение следует из нетривиальности пары и леммы 1.1. Пусть $\varepsilon = 0$, I — собственный идеал в $E(\mathcal{A})(H, \mathcal{D})$ и $\mathcal{D} = D + [\,\cdot, D] + I_\mu$ для некоторых $D \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A}), \mu \in A^*$.

Заметим, что если $u \in I$, то $\mathcal{D}(E(\mathcal{A})) \subseteq I$ и $I = E(\mathcal{A})(H, \mathcal{D})$.

Предположим, что ненулевая матрица C лежит в I. Если $C \in \langle E \rangle$, то $E \cdot B = B + tr\,(B)u \in I$ для любой матрицы B, откуда, в частности, получаем $\mathrm{End}_0(\mathcal{A}) \subseteq I$. Включение $E \cdot E = E + H(E, E)u \in I$ даёт $\langle E + H(E, E)u \rangle \oplus \mathrm{End}_0(\mathcal{A}) \subseteq I$. Если $C \notin \langle E \rangle$, то легко видеть, что лиев идеал, порождённый C, лежит в I. Тогда $\mathrm{End}_0(\mathcal{A}) \subseteq I$, и для любых $i \neq j$ получаем $e_{ij} \cdot e_{ji} = e_{ii} + H(e_{ii}, E)u \in I$, откуда $\langle E + H(E, E)u \rangle \oplus \mathrm{End}_0(\mathcal{A}) \subseteq I$. Тогда $(a + H(a, E)u) \cdot A = aA + H(a, A)u \in I$ для любых $a \in \mathcal{A}$ и $A \in \mathrm{End}_0(\mathcal{A})$, т. е. $I = I_u$.

Если $A + u \in I$ для некоторой ненулевой $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, то, так как $\dim(\mathcal{A}) > 1$, по лемме 3.6 существует $B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ такая, что $AB \neq 0$ и $\mathrm{tr}(AB) = 0$, откуда $AB \in I$, и мы приходим к случаю выше. Если I содержит только элементы вида $a + \gamma u, \gamma \in F$, то I совпадает с J из леммы 3.5, а это невозможно по условиям теоремы.

Возьмём ненулевой $u + a + A \in I$, $0 \neq a \in \mathcal{A}, A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Тогда для любых $b \in \mathcal{A}, B \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ имеем

$$(b + B) \cdot (u + a + A) = (b + B)(a + A) + H(b + B, a + A)u + D(b) + I^b_\mu + [B, D] \in I. \quad (12)$$

Полагая $b = 0$, получаем, что $x + x^\phi + \alpha_x u \in I$ для любого $x \in \mathcal{A}$, некоторого $\alpha \in \mathcal{A}^*$ и некоторого линейного отображения $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. Легко видеть, что в этом случае I совпадает с K из леммы 3.5, что невозможно по условиям теоремы.

Докажем простоту алгебры I_u. Пусть I — ненулевой идеал в I_u. Если $C \in I \cap \mathrm{End}_0(\mathcal{A})$, то, как и ранее, $\mathrm{End}_0(\mathcal{A}) \subseteq I$. Выбирая обратимую $A \in \mathrm{End}_0(\mathcal{A})$ получаем $(A^{-1} + H(A^{-1}, 1)u) \cdot A = E + H(E, 1)u \in I$ и, аналогично предыдущему, $I = I_u$.

Если $A + u \in I$ для некоторой ненулевой $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$, то, так как $\dim(\mathcal{A}) > 1$, по лемме 3.6 существует $B \in \mathrm{End}_0(\mathcal{A})$ такая, что $AB \neq 0$ и $\mathrm{tr}(AB) = 0$, откуда $AB \in I$, и мы приходим к случаю выше.

Предположим, что $a + H(a, E)u \in I$ для некоторого ненулевого $a \in \mathcal{A}$. Тогда $(a + H(a, E)u) \cdot A = aA + H(aA, E)u \in I$ для любого $A \in \mathrm{End}_0(\mathcal{A})$. Таким образом, можно считать, что $a \in \mathcal{A}$ произвольный. По лемме 3.5 $J = \langle x + H(x, 1)u : x \in \mathcal{A} \rangle$ не является собственным идеалом алгебры $E(\mathcal{A})(H, \mathcal{D})$, поэтому можно предполагать, что $a + A + H(a + A, E)u \in I$ для некоторых ненулевых $a \in \mathcal{A}$, $A \in \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$. По доказанному выше, мы можем считать, что $I = \left\langle a + a^\phi + \alpha_a u : a \in \mathcal{A} \right\rangle$ для некоторого линейного отображения $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ и некоторого $\alpha \in \mathcal{A}^*$. Опять приходим к случаю $I = K$ из леммы 3.5, что невозможно.

Так как $\mathcal{A}$ не является алгеброй скалярного умножения, то $n = \dim(A) > 1$. Легко видеть, что в $E(\mathcal{A})$ нет ненулевых элементов, у которых размерность правого аннулятора равна $\dim(E(\mathcal{A})) - 1 = n + n^2 - 1$. Действительно, если $a + A$ — произвольный ненулевой элемент из $E(\mathcal{A})$, $a \neq 0$ и $b \notin \langle a \rangle$, то $(a + A)E \neq 0$ и $(a + A)B \neq 0$, где B такое, что $B(a) = b$; если же $a = 0$, то это утверждение очевидно. Отсюда легко следуют все утверждения про неразложимость полученных алгебр. □

Автор благодарен рецензенту за ряд ценных замечаний, позволивших улучшить изложение данной статьи.

Литература

[1] A. Mizuhara, *On simple left symmetric algebras over a solvable Lie algebra*, Sci. Math. Jpn. **57**:2 (2003), 325–337.

[2] A.P. Pozhidaev, *On generalized Mizuhara's construction*, submitted to Sib. Math. J. (2023).

[3] H. Shima, *Homogenous Hessian manifold*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **30** (1980), 91–128.

[4] A.P. Pozhidaev, *On endomorphs of right-symmetric algebras*, Sib. Math. J. **61**:5 (2020), 859–866.

[5] R. Słowik, *Derivations of rings of infinite matrices*, Comm. in Algebra **43**:8 (2015), 3433–3441.

Пожидаев Александр Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090.
app@math.nsc.ru