

СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА

В.А. ЛУКЬЯНЕНКО, Ю.А. ХАЗОВА 

Представлено Ю.А. ХАЗОВОЙ

Abstract: The mathematical model in the ring resonator, which consists of nonlinear partial differential equations is considered in the paper. For the mathematical model stationary solutions were obtained. The corresponding linearized initial-boundary value problems for the general area and for the circle were considered. The original model can be reduced to the nonlinear integral equation.

Keywords: nonlinear ring resonator, spatial mode, phase pattern.

1 Введение

В работе рассматривается математическая модель процесса формирования фазовых пространственных структур в поперечном сечении когерентного светового пучка в нелинейной оптической системе с пространственно распределенной обратной связью — нелинейном кольцевом резонаторе. Одновременный учет дифракции и нелинейности приводит к возникновению многообразия пространственных структур. Нелинейная волновая динамика пространственно распределенных оптических

LUKIANENKO, V.A., KHAZOVA, YU.A. STRUCTURE OF SOLUTIONS OF THE NONLINEAR EQUATIONS IN RING RESONATOR.

© 2023 Лукьяненко В.А., Хазова Ю.А..

This work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 075-02-2023-1799).

Поступила 05 октября 2023 г., опубликована .

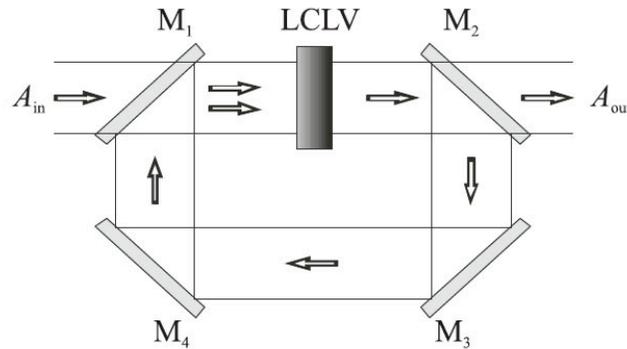


Рис. 1. Схема пассивного нелинейного кольцевого резонатора: M_1 – M_4 — зеркала, LCLV (liquid crystal light valve) — нелинейная среда, A_{in} и A_{out} — комплексные амплитуды входного и выходного полей соответственно. Зеркала M_3 и M_4 обладают 100%-м отражением, а зеркала M_1 и M_2 имеют коэффициент отражения R по интенсивности [1].

систем представлена следующими явлениями: пространственная бистабильность и мультистабильность, формирование регулярных пространственных дифракционных структур, образование оптических вихрей, солитонов, диссипативных структур и т.д. Модель кольцевого резонатора, содержащего слой нелинейной среды с кубической нелинейностью [1], основана на изучении двух связанных друг с другом уравнений: уравнения, описывающего временную динамику фазовой модуляции световой волны в нелинейной среде, и уравнения, описывающего временную динамику комплексной амплитуды светового поля внутри резонатора с учетом дифракции. Оптическая схема исследуемой системы показана на рисунке 1.

Данная модель учитывает локальные поперечные взаимодействия световой волны с нелинейной средой, вызванные как диффузией частиц нелинейной среды, так и дифракцией световой волны. Благодаря одновременному действию двух физических процессов в системе возникают пространственно-временные фазовые структуры.

В работах [2, 3, 4, 5, 6, 7] для исследования подобных оптических систем в качестве математической модели использовалось нелинейное параболическое уравнение с преобразованием пространственной переменной: для случая отражения в [2, 3, 4, 5] и поворота в [6, 7] пространственной переменной. Уравнения рассматривались на окружности и отрезке с условиями периодичности. Построение разложений периодических решений в такого рода задачах основывалось на методе центрального многообразия [2, 3], методе Галеркина [4, 5, 6] и методе сведения к нелинейному интегральному уравнению [7]. В [8, 9] рассматривались

нелинейные функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с обратной связью и преобразованием пространственных переменных (которое задаёт оператор инволюции). Свойство оператора инволюции (поворот, отражение) позволяет свести исходное уравнение к системе уравнений без преобразования пространственных переменных. Множество решений таких уравнений определяется двумя параметрами: малым — коэффициентом диффузии, и большим — коэффициентом интенсивности потока. Также рассматривались начально-краевые задачи для окружности, круга, кольца с оператором инволюции. В работах [11, 12] изучались ротационные и вращающиеся волны в параболических функционально-дифференциальных уравнениях с преобразованием поворота и запаздыванием. В [13] исследована смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения, интегральные представления решения функционально-дифференциального параболического уравнения изучены в [14].

В данной статье в первом разделе рассматривается математическая модель кольцевого резонатора, состоящая из системы линейных и нелинейных уравнений в частных производных. Анализируются стационарные решения и исследуются зоны устойчивости решений соответствующей линеаризованной задачи. Для случая тонкого кольца (окружности) задача сведена к решению нелинейного интегрального уравнения.

2 Математическая модель кольцевого резонатора с преобразованием координат

Динамика нелинейной фазовой модуляции $u(r, t)$ характеризует набег фазы световой волны в нелинейной среде. Предполагается, что поляризованность среды подчиняется релаксационному уравнению дебаевского типа, учитывающему конечность времени релаксации нелинейности и наличие в среде поперечных взаимодействий диффузионного характера

$$u_t + u = D\Delta u + K|A(r, z = 0, t)|^2. \quad (1)$$

Здесь $r = (x, y)$ — радиус-вектор в поперечном сечении светового поля; z — продольная координата; t — время; Δ — лапласиан, описывающий диффузионный процесс в нелинейной среде; D — нормированный коэффициент диффузии; K — коэффициент нелинейности среды, $|A(r, z = 0, t)|^2$ — интенсивность светового поля, попадающего в нелинейную среду; $A(r, z, t)$ — комплексная медленно меняющаяся амплитуда светового поля внутри резонатора, которая перед слоем нелинейной среды складывается из двух частей: комплексной амплитуды входного поля после прохождения зеркала M_1 и комплексной амплитуды поля после распространения в резонаторе.

Динамика комплексной амплитуды поля $A(r, z, t)$ непосредственно перед слоем нелинейной среды описывается следующим образом:

$$A(r, z, t + t_r) = (1 - R)^{\frac{1}{2}} A_{in}(r) + Re^{i\varphi_0} \exp \left(iL\Delta \{ A(r, z, t) e^{iu(r,t)} \} \right) \Big|_{z=0}. \quad (2)$$

Здесь R — коэффициент отражения зеркал по интенсивности; $A_{in}(r)$ — комплексная амплитуда входной световой волны; t_r — время распространения поля в резонаторе; φ_0 — постоянный фазовый сдвиг световой волны в резонаторе; L — длина резонатора, нормированная на дифракционную длину, которая определяется диаметром апертуры резонатора или входного пучка.

Процесс дифракционного распространения поля в резонаторе представлен в уравнении (2) оператором распространения $\exp(iL\Delta)$ и описывается обычным уравнением дифракции в приближении квазиоптики с граничным условием, которое определяется полем непосредственно после слоя нелинейной среды:

$$-2ik_0 \frac{\partial A(r, z, t)}{\partial z} = \Delta A(r, z, t), \quad A(r, z = 0, t) = A_0(r, t). \quad (3)$$

Сделаем несколько предположений, упрощающих модель. Во-первых, если толщина слоя нелинейной среды много меньше длины резонатора, т. е. $l \ll L$, то можно пренебречь поглощением света в нелинейной среде. Это значит, что нелинейная среда оказывает влияние только на фазу распространяющейся световой волны. Во-вторых, можно считать, что время распространения световой волны в резонаторе много меньше, чем время релаксации нелинейности, т. е. $t_r = L/c \ll \tau_0$. Таким образом, анализируется случай «медленной» нелинейности без учета эффектов, связанных с временным запаздыванием поля в резонаторе [1].

3 Стационарные решения

Рассмотрим область $\Omega = \{(r, \varphi) | 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Система уравнений (1)–(3) имеет пространственно-однородное стационарное решение. Обозначая u_s и A_s соответственно как стационарные значения фазы $u(r, \varphi, t)$ и амплитуды $A(r, \varphi, z, t)$ поля в нелинейной среде, найдем их структуры. Для этого подставим $u = u_s$, $A = A_s$ и $A_{in} = A_{ins}$ в уравнения (1) и (2). Уравнение (3) удовлетворяется автоматически. Получим

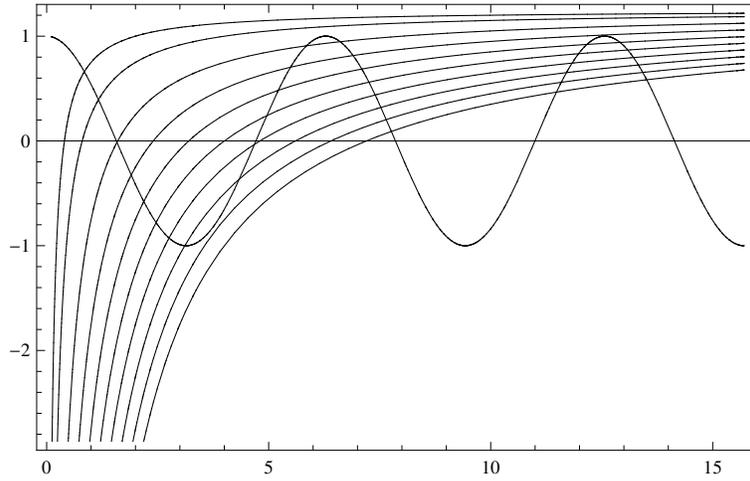
$$u_s = K |A_s|^2, \\ A_s = (1 - R)^{1/2} A_{ins} + Re^{i\varphi_0} \exp iL\Delta \{ A_s \exp iu_s \},$$

или

$$A_s = (1 - R)^{1/2} A_{ins} + Re^{i\varphi_0} A_s e^{iu_s}.$$

Откуда следует, что

$$A_s = \left(1 - Re^{i(u_s + \varphi_0)} \right)^{-1} \sqrt{1 - R} A_{ins}. \quad (4)$$

Рис. 2. Графическое построение решений u_s при увеличении k

С учетом (1) можем записать (2) следующим образом

$$\begin{aligned} |A_s|^2 = A_s \bar{A}_s &= \frac{\sqrt{1-R} A_{ins} \bar{A}_{ins} \sqrt{1-R}}{(1 - Re^{i(u_s + \varphi_0)})(1 - Re^{-i(u_s + \varphi_0)})} = \\ &= \frac{(1-R) |A_{ins}|^2}{1 - 2R \cos(u_s + \varphi_0) + R^2}, \end{aligned}$$

$$K |A_s|^2 = \frac{(1-R) K I_0}{1 - 2R \cos(u_s + \varphi_0) + R^2} = u_s.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{(1-R)k}{1 - 2R \cos(u_s + \varphi_0) + R^2}, \\ u_s &= K |A_s|^2, \quad k = K I_0, \quad I_0 = |A_{ins}|^2. \end{aligned} \quad (5)$$

В зависимости от изменения параметров k , R , φ_0 уравнение (5) может иметь разные значения корней u_s , а следовательно и A_s (4). На рис. 2 решения уравнения (5) представлены в виде пересечения графиков $\cos(u_s + \varphi_0)$ и $\frac{1+R^2}{2R} - \frac{1-R}{2R} \frac{k}{u_s}$, для значений параметров $\varphi_0 = 0$, $R = 0.5$.

С ростом $k \rightarrow \infty$ количество корней u_s постоянно меняется: возникают новые состояния равновесия и исчезают старые. Такое состояние системы говорит о наличии большого количества пространственно-неоднородных структур.

4 Линеаризация системы уравнений

Линеаризуем уравнения (1)–(3) в окрестности стационарных решений u_s, A_s, A_{ins} . Здесь оператор Лапласа определяется следующим образом:
 $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{\varphi\varphi}$.

Пусть $A_{in}(r) = A_{ins} + f(r)$, $A_{ins} = const$, $f(r) = 0$, тогда

$$\begin{aligned} u &= u_s + v(r, t), \\ A &= A_s + B(r, z, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим (6) в (1)

$$\begin{aligned} v_t + v + u_s &= D\Delta v + K|A_s + B(r, z = 0, t)|^2, \\ v_t + v + u_s - K|A_s|^2 &= D\Delta v + K(\bar{A}_s B + A_s \bar{B} + |B|^2). \end{aligned}$$

С учетом (5) и

$$|A_s + B|^2 = (A_s + B)(\bar{A}_s + \bar{B}) = |A_s|^2 + \bar{A}_s B + A_s \bar{B} + |B|^2$$

линеаризованное уравнение имеет вид

$$v_t + v = D\Delta v + K(\bar{A}_s B + A_s \bar{B}). \quad (7)$$

Заметим также, что

$$\bar{A}_s B + A_s \bar{B} = \text{Re}(\bar{A}_s B + A_s \bar{B}).$$

Линеризуем теперь уравнение (2). Операторная экспонента представима в виде

$$\exp(iL\Delta) \approx 1 + iL\Delta + \frac{(iL)^2}{2}\Delta^2 + \dots$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \exp(iL\Delta\{Ae^{iu}\}) &= e^{iu_s} [(A_s + iA_s v + B) + iL(iA_s \Delta v + \Delta B) + \dots] = \\ &= e^{iu_s} [A_s + iA_s(v + iL\Delta v) + (B + iL\Delta B)] + \dots = \\ &= A_s e^{iu_s} + iA_s e^{iu_s}(v + iL\Delta v) + e^{iu_s}(B + iL\Delta B) + \dots \end{aligned}$$

Здесь учтено

$$\begin{aligned} Ae^{iu} &= (A_s + B)e^{i(u_s+v)} = (A_s + B)e^{iu_s} e^{iv} = \\ &= e^{iu_s}(A_s + B)\left(1 + iv + \frac{(iv)^2}{2} + \dots\right) = e^{iu_s}(A_s + iA_s v + B + iBv + \dots). \end{aligned}$$

В результате из (2) получим:

$$\begin{aligned} A_s + B &= (1-R)^{1/2} A_{in} + \text{Re}^{i\varphi_0} \{A_s + iA_s(v + iL\Delta v) + (B + iL\Delta B)\} e^{iu_s} + \dots, \\ A_s - \text{Re}^{i(u_s+\varphi_0)} A_s - (1-R)^{1/2} A_{in} + B &= \text{Re}^{i(u_s+\varphi_0)} \{iA_s(v + iL\Delta v) + B + iL\Delta B\}, \\ A_s(1 - \text{Re}^{i(u_s+\varphi_0)}) - (1-R)^{1/2} A_{in} + B &= \text{Re}^{i(u_s+\varphi_0)} \{iA_s(v + iL\Delta v) + B + iL\Delta B\}, \\ (1 - \text{Re}^{i(u_s+\varphi_0)}) A_s &= (1-R)^{1/2} A_{in} + \text{Re}^{i(u_s+\varphi_0)} \{iA_s(v + iL\Delta v) + B + iL\Delta B\} - B, \\ -B + \text{Re}^{i(u_s+\varphi_0)} \{iA_s(v + iL\Delta v) + B + iL\Delta B\} &+ (1-R)^{1/2} f(r) = 0. \end{aligned}$$

Убедимся, что если $v = 0$, $B = 0$, $f = 0$, то получим формулы (5)

$$A_s(1 - Re^{i(u_s + \varphi_0)}) - (1 - R)^{1/2}A_{ins} = 0, \quad (8)$$

$$A_s = \frac{(1 - R)^{1/2}A_{ins}}{1 - Re^{i(u_s + \varphi_0)}}, \quad \bar{A}_s = \frac{(1 - R)^{1/2}\bar{A}_{ins}}{1 - Re^{-i(u_s + \varphi_0)}},$$

$$|A_s|^2 = \frac{(1 - R)|A_{ins}|^2}{1 - 2R \cos(u_s + \varphi_0) + R^2},$$

Из (5) в случае $\cos(u_s + \varphi_0) = 0$ следует

$$|A_s|^2 = \frac{(1 - R)|A_{ins}|^2}{1 + R^2}, \quad K|A_s|^2 = u_s = \frac{(1 - R)K|A_{ins}|^2}{1 + R^2}.$$

В итоге начально-краевая задача для линеаризованных уравнений примет вид

$$B - Re^{i(u_s + \varphi_0)}(iA_s(v + iL\Delta v) + B + iL\Delta B) = (1 - R)^{1/2}f(r), \quad (9)$$

$$-2ik_0 \frac{\partial B(r, \varphi, z, t)}{dz} = \Delta B(r, \varphi, z, t), \quad (10)$$

$$v_t + v = D\Delta v + K(\bar{A}_s B + A_s \bar{B}), \quad (11)$$

$$v(r, \varphi, z, 0) = v_0(r, z), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0.$$

В (9)–(11) обозначено $B(r, \varphi, z = 0, t) \equiv B$.

5 Линеаризованная задача на окружности в классе периодических функций

Будем рассматривать линеаризованную задачу (9)–(11) с условиями на окружности (аналог задачи для тонкого кольца). Построим периодические решения этой задачи.

Лемма 1. *Для линеаризованной задачи в окрестности стационарного решения u_s и A_s : $u = u_s + v$, $A = A_s + B$ в случае окружности с радиусом r_0 справедливо следующее представление:*

$$B - Re^{i(u_s + \varphi_0)}[iA_s(v + i\rho v_{\theta\theta}) + B + i\rho B_{\theta\theta}] = (1 - R)^{1/2}f(\theta), \quad (12)$$

$$A_{in}(\theta) = A_{ins} + f(\theta), \quad A_{ins} = const, \quad \rho = \frac{1}{r_0^2},$$

$$-2ik_0 \frac{\partial B(\theta, z, t)}{dz} = \Delta B(\theta, z, t), \quad (13)$$

$$v_t + v = \mu^2 v_{\theta\theta} + K(\bar{A}_s B + A_s \bar{B}), \quad \mu^2 = \frac{D}{r_0^2}, \quad (14)$$

$$v = v(\theta, t), \quad B = B(\theta, z = 0, t) \equiv B(\theta, t),$$

$$v(\theta + 2\pi, t) = v(\theta), \quad B(\theta + 2\pi, z, t) = B(\theta, z, t).$$

При этом $\bar{A}_s B + A_s \bar{B} = Re(\bar{A}_s B + A_s \bar{B})$ – действительная функция.

Доказательство. Утверждение следует из (9)–(11) и представления оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ в случае зависимости функций v и B от (θ, t) и линеаризации оператора $\exp iL\Delta\{(A_s + B(\theta, t)) \exp[i(u_s + v(\theta, t))]\}$ в окрестности (u_s, A_s) . \square

Лемма 2. *Приближенные решения, функции v и B , задачи (12)–(14) представимы в виде ряда по собственным функциям $X(\theta) = e^{in\theta}$ задачи Штурма-Лиувилля*

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(\theta + 2\pi) = X(\theta). \quad (15)$$

Доказательство. Разделяя переменные в (13)

$$\begin{aligned} -2ik_0 X(\theta) T(t) Z'(z) &= X''(\theta) T(t) Z(z), \quad T(t) \neq 0, \\ -2ik_0 \frac{Z'(z)}{Z(z)} &= \frac{X''(\theta)}{X(\theta)} = -\lambda, \quad X(\theta + 2\pi) = X(\theta), \end{aligned}$$

приходим к задаче Штурма-Лиувилля для $X(\theta)$:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(\theta + 2\pi) = X(\theta),$$

решением которой является

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(\theta) = e^{in\theta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (16)$$

или в вещественной форме

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для функции $Z(z)$ получаем, что

$$Z'(z) - \frac{in^2}{2k_0} Z(z) = 0,$$

откуда следует

$$Z(z) = Z_0 \exp \left[-\frac{in^2}{2k_0} z \right]. \quad (17)$$

Так как дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для B по переменной z , то функция $T(t)$ произвольна. Выберем ее в виде $T(t) = e^{\omega t}$. Таким образом, каждый член ряда для функций v и $B(\theta, t)$ представим в виде $(B_0 = B_0(n), v_0 = v_0(n), \omega = \omega(n))$:

$$B = B_0 e^{in\theta} e^{\omega t}, \quad v = v_0 e^{in\theta} e^{\omega t}. \quad (18)$$

Подставим (18) в (14)

$$v_0(1 + \omega + \mu^2 n^2) e^{in\theta} = K(\bar{A}_s B_0 e^{in\theta} + A_s \bar{B}_0 e^{-in\theta}).$$

Так как выражение $\bar{A}_s B_0 e^{in\theta} + A_s \bar{B}_0 e^{-in\theta}$ вещественно, то приходим к соотношениям:

$$\begin{cases} (1 + \omega + \mu^2 n^2) \cos n\theta = 2K(\bar{A}_s \lambda + A_s \bar{\lambda}) \cos n\theta, \\ (1 + \omega + \mu^2 n^2) \sin n\theta = 0, \end{cases} \quad (19)$$

где $\lambda = \lambda_n = \frac{B_0(n)}{v_0(n)}$.

Из уравнения (12) (после подстановки (18)) получим

$$G_n(v_0, B_0) \equiv B_0 - Re^{i(u_s + \varphi_0)} [iA_s(1 - i\rho n^2)v_0 + (1 - i\rho n^2)B_0] = (1 - R)^{1/2} f_n. \quad (20)$$

Параметр $\lambda = \lambda_n$ определим из однородного уравнения $G_n(v_0, B_0) = 0$:

$$\lambda - Re^{i(u_s + \varphi_0)} [iA_s(1 - i\rho n^2) + (1 - i\rho n^2)\lambda] = 0.$$

Откуда следует, что

$$\lambda \equiv \lambda_n = \frac{iA_s R(1 - i\rho n^2)e^{i(u_s + \varphi_0)}}{1 - R(1 - i\rho n^2)e^{i(u_s + \varphi_0)}},$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_s \lambda + A_s \bar{\lambda} &= \frac{i|A_s|^2 R(1 - i\rho n^2)e^{i(u_s + \varphi_0)}}{1 - R(1 - i\rho n^2)e^{i(u_s + \varphi_0)}} + \frac{-i|A_s|^2 R(1 + i\rho n^2)e^{-i(u_s + \varphi_0)}}{1 - R(1 + i\rho n^2)e^{-i(u_s + \varphi_0)}} = \\ &= \frac{i|A_s|^2 (2iR(\rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0) - \sin(u_s + \varphi_0)))}{1 - 2R(1 + \rho n^2) \cos(u_s + \varphi_0) + R^2} = \\ &= \frac{2R|A_s|^2 (\sin(u_s + \varphi_0) - \rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0))}{1 - 2R(1 + \rho n^2) \cos(u_s + \varphi_0) + R^2}. \end{aligned}$$

□

Множитель $e^{\omega t}$ определяет устойчивость решения задачи.

При $\cos n\theta$:

$$\omega = \omega_c(n) = -1 - \mu^2 n^2 + \frac{4RK|A_s|^2 (\sin(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0))}{1 - 2R(1 + \rho n^2) \cos(u_s + \varphi_0) + R^2}.$$

При $\sin n\theta$:

$$\omega = \omega_s(n) = -1 - \mu^2 n^2 < 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Исследуем, как зависит знак

$$\omega_c(n) = -1 - \mu^2 n^2 + \frac{4Ru_s (\sin(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0))}{1 - 2R(1 + \rho n^2) \cos(u_s + \varphi_0) + R^2}$$

от параметров R , $\mu^2 = \frac{D}{r_0^2}$, A_s , φ_0 ($u_s = K|A_s|^2$).

Для этого рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть

$$\omega_c(0) = -1 + \frac{4Ru_s^2 \sin(u_s + \varphi_0)}{(1 - R)KI_0}$$

и

$$\cos(u_s + \varphi_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad u_s + \varphi_0 = \frac{2n + 1}{2} \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\sin(u_s + \varphi_0) = \sin\left(\frac{2n + 1}{2} \pi\right) = (-1)^n,$$

$$\omega_c(n) = -1 - \mu^2 n^2 + (-1)^n \frac{4R(1 - R)k}{(1 + R^2)^2}.$$

Если

$$\sin(u_s + \varphi_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad u_s + \varphi_0 = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

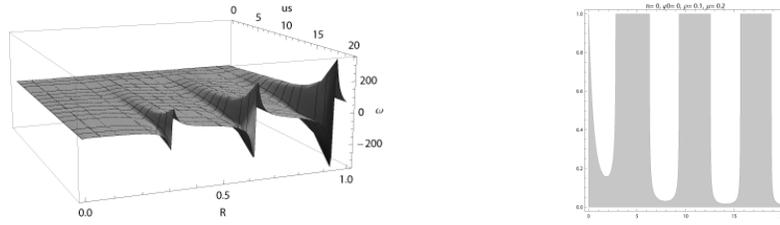


Рис. 3. Значения и зоны устойчивости $\omega_c(n)$ при фиксированных $n = 0$, $\rho = 0.1$, $\varphi_0 = 0$, $\mu = 0.2$ и изменяющихся R и u_s

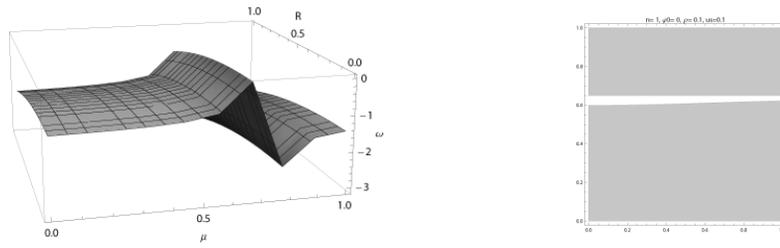


Рис. 4. Значения и зоны устойчивости $\omega_c(n)$ при фиксированных $n = 1$, $\rho = 0.1$, $\varphi_0 = 0$, $u_s = 0.1$ и изменяющихся R и μ

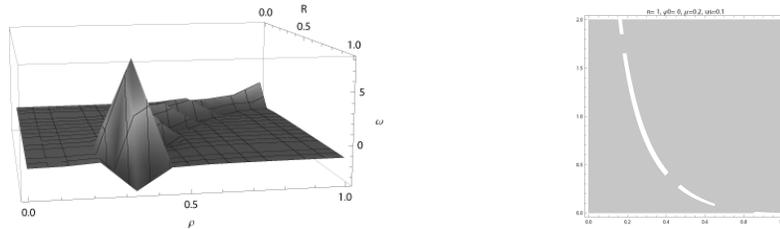


Рис. 5. Значения и зоны устойчивости $\omega_c(n)$ при фиксированных $n = 1$, $\mu = 0.2$, $\varphi_0 = 0$, $u_s = 0.1$ и изменяющихся ρ и R

то

$$\cos(u_s + \varphi_0) = \cos(n\pi) = (-1)^n,$$

$$\omega_c(n) = -1 - \mu^2 n^2 + \frac{4R u_s \rho n^2 (-1)^n}{1 - 2R(1 + \rho n^2)(-1)^2 + R^2}, \quad u_s = \frac{(1 - R)k}{1 - 2R(-1)^2 + R^2}.$$

Указанные случаи возможны только при четном n .

5.1. Численное исследование спектра задачи. Согласно с выражением для стационарных решений (5), исследуем выражение для $\omega_c(n)$. Найдем зоны устойчивости $\omega_c(n)$ при различных значениях параметров.

На рисунках 3–5 показаны изменения значений $\omega_c(n)$ при различных R и ρ и приведены области устойчивости с отрицательными $\omega_c(n)$.

6 Представление задачи в виде нелинейного интегрального уравнения

Решение линейного неоднородного уравнения (12) состоит из общего решения однородного $v(\theta, t)$, $B(\theta, t)$ и частного решения неоднородного $v(\theta)$, $B(\theta)$, зависящего от одной переменной θ .

Лемма 3. *Общее решение соответствующего однородного уравнения (12)*

$$B - Re^{i(u_s + \varphi_0)}[iA_s(v + i\rho\Delta v) + B + i\rho\Delta B] = 0$$

представимо в виде

$$B(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta} e^{\omega(n)t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n v_n e^{in\theta} e^{\omega(n)t}, \quad (21)$$

$$v(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\theta} e^{\omega(n)t}, \quad b_n = \lambda_n v_n,$$

$$\lambda_n = \frac{iA_s R(1 - i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}}{1 - R(1 - i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}}. \quad (22)$$

Доказательство. Действительно, подставляя (21) в уравнение (3), для каждого члена ряда получим

$$b_n = Re^{i(u_s + \varphi_0)}[iA_s(1 - i\rho n^2)v_n + (1 - i\rho n^2)b_n]$$

или с учетом $b_n = \lambda_n v_n$

$$\lambda_n = Re^{i(u_s + \varphi_0)}[iA_s(1 - i\rho n^2) + (1 - i\rho n^2)\lambda].$$

Откуда и следует выражение (22) для λ_n . Преобразуем (22), выделяя $Re\lambda_n$ и $Im\lambda_n$:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{iA_s R(1 - i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)} [1 - R(1 + i\rho n^2) e^{-i(u_s + \varphi_0)}]}{[1 - R(1 - i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}] [1 - R(1 + i\rho n^2) e^{-i(u_s + \varphi_0)}]} = \\ &= \frac{iA_s [R(1 - i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)} - R^2(1 + i\rho^2 n^4)]}{1 - 2R[\cos(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \sin(u_s + \varphi_0)] + R^2(1 + i\rho^2 n^4)} = \\ &= \frac{iA_s (R[\cos(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \sin(u_s + \varphi_0)] + i(\sin(u_s + \varphi_0) - \rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0)))}{1 - 2R[\cos(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \sin(u_s + \varphi_0)] + R^2(1 + \rho^2 n^4)}. \end{aligned}$$

□

Лемма 4. *Частное решение неоднородного уравнения (20)*

$$B - Re^{i(u_s + \varphi_0)}[iA_s(v + i\rho\Delta v) + B + i\rho\Delta B] = (1 - R)^{1/2} f(\theta) \equiv g(\theta) \quad (23)$$

$A_{in}(\theta) = A_{ins} + f(\theta)$ зависит только от θ и представимо в виде

$$v(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\theta}, \quad B(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}, \quad (24)$$

где $v_n = f_n$, $b_n = \alpha_n v_n$,

$$\alpha_n = \frac{(1-R)^{1/2} + iA_s R(1-\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}}{1-R(1-i\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}} \rightarrow -iA_s \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Доказательство. Действительно, подставляя частное решение $v(\theta)$, $B(\theta)$ в неоднородное уравнение (23), с учетом

$$v(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\theta}, \quad B(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}, \quad f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}, \quad (26)$$

получим

$$\alpha_n v_n - R e^{i(u_s+\varphi_0)} [iA_s(1-i\rho n^2)v_n + \alpha_n v_n(1-i\rho n^2)] = (1-R)^{1/2} f_n$$

или

$$v_n [\alpha_n [1-R(1-i\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}] - iA_s R(1-i\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}] = (1-R)^{1/2} f_n.$$

Выбирая α_n в таком виде, что выражение в квадратных скобках равно $(1-R)^{1/2}$, приходим к наиболее простому соотношению для $v_n = f_n$. \square

Преобразуем выражение для α_n

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{(1-R)^{1/2} - iA_s[-1+1-R(1-\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}]}{1-R(1-i\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}} = \\ &= \frac{(1-R)^{1/2} + iA_s}{1-R(1-i\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}} - iA_s = \frac{(1-R)^{1/2}}{1-R(1-i\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}} + \lambda_n. \end{aligned} \quad (27)$$

Общее решение $v = v(\theta, t) + v(\theta)$, $B = B(\theta, t) + B(\theta)$, где $v(\theta, t)$, $B(\theta, t)$ определяются формулами (21), (22), а частные решения $v(\theta)$, $B(\theta)$ формулами (24)–(25).

Для полученных решений запишем интегральные представления. Используем дискретное преобразование Фурье W [10]

$$B(\theta, z=0, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n v_n e^{\omega(n)t} + \alpha_n f_n) e^{in\theta}, \quad (28)$$

$$v(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_n e^{\omega(n)t} + f_n) e^{in\theta} = f(\theta) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{\omega(n)t + in\theta}, \quad (29)$$

$$(W\alpha_n f_n)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n f_n e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta-\xi) f(\xi) d\xi, \quad \text{где } a(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\theta}. \quad (30)$$

Здесь v_n — произвольные последовательности (такие, чтобы ряды сходились). Если обозначить

$$\lambda_n e^{\omega(n)t} = k_n(t) = \lambda_n e_n(t), \quad e_n(t) = e^{\omega(n)t},$$

$$(Wk_n v_n)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{\omega(n)t} v_n e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\theta-\xi, t) v(\xi) d\xi,$$

$$(Wk_n(t)) = k(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n(t)e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{\omega(n)t} e^{in\theta},$$

$$(Wv_n)(\xi) = v(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\xi}$$

ИЛИ

$$W\{\lambda_n e^{\omega(n)t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{\omega(n)t} e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\theta - \varphi) E(\varphi, t) d\varphi,$$

$$(W\lambda_n)(\theta) = \Lambda(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{in\theta},$$

$$E(\varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(t) e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\omega(n)t} e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\omega(n)t + in\varphi},$$

ТО

$$B(\theta, t) = B(\theta, z=0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\theta - \xi, t) v(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta - \xi) f(\xi) d\xi,$$

$$v(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\xi, t) v(\xi) d\xi + f(\theta).$$

Теорема 1. *Решение задачи (9)-(11) представимо в виде*

$$v(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_n e^{\omega(n)t} + f_n) e^{in\theta} = f(\theta) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{\omega(n)t + in\theta},$$

$$B(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n v_n e^{\omega(n)t} + \alpha_n f_n) e^{in\theta}$$

или в виде интегрального представления

$$v(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\theta - \xi, t) v(\xi) d\xi + f(\theta),$$

$$B(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\theta - \xi, t) v(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta - \xi) f(\xi) d\xi,$$

где

$$k(\theta, t) = W\{\lambda_n e^{\omega(n)t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n(t) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{\omega(n)t} e^{in\theta},$$

$$k(\theta, t) = W\{\lambda_n e^{\omega(n)t}\}(\theta, t) \equiv W\{\lambda_n e_n(t)\}(\theta, t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\theta - \varphi) E(\varphi, t) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E(\theta - \xi) \Lambda(\xi) d\xi,$$

$$\Lambda(\theta) = (W\lambda_n)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{in\theta},$$

$$E(\varphi, t) = W\{e_n(t)\}(\varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(t)e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\omega(n)t+in\varphi},$$

$$\alpha_n = \frac{(1-R)^{1/2} + iA_s R(1-i\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}}{1-R(1-i\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}},$$

$$\lambda_n = \frac{iA_s R(1-\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}}{1-R(1-i\rho n^2)e^{i(u_s+\varphi_0)}},$$

$\omega(n) = \{\omega_c(n), \omega_s(n)\}$, $e^{\omega_c(n)}$ – множитель при $\cos n\theta$, $e^{\omega_s(n)}$ – множитель при $\sin n\theta$

$$\omega_c(n) = -1 - \mu^2 n^2 + \frac{4RK|A_s|^2(\sin(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0))}{1 - 2R(1 + \rho n^2) \cos(u_s + \varphi_0) + R^2},$$

$$\omega_s(n) = -1 - \mu^2 n^2 < 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \mu^2 = \frac{D}{r_0^2}.$$

Доказательство. В полученном представлении для $v(\theta, t)$ и $B(\theta, t)$ вектор v_n , $n = 0, \pm 1, \dots$ может быть выбран через начальные условия для функции $v(\theta, t)$:

$$v(\theta, t) = v_0(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{0n} e^{in\theta}$$

$$v_{0n} = v_n + f_n, \quad v_n = v_{0n} - f_n.$$

Откуда

$$v(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(v_{0n} - f_n)e^{\omega(n)t} + f_n] e^{in\theta}.$$

В свою очередь, если заданы начальные условия для $B(\theta, t)$:

$$B(\theta, 0) = v_0(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{0n} e^{in\theta},$$

тогда

$$b_{0n} = \lambda_n v_n + \alpha_n f_n, \quad v_n = \frac{b_{0n} - \alpha_n f_n}{\lambda_n}.$$

С другой стороны b_{0n} и v_{0n} связаны между собой следующим образом:

$$b_{0n} = \lambda_n (v_{0n} - f_n) + \alpha_n f_n, \quad b_{0n} = \lambda_n v_{0n} + (\alpha_n - \lambda_n) f_n.$$

Так как $b_n = \lambda_n v_n$ выбиралось ранее, то

$$\begin{aligned} B(\theta, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\lambda_n \frac{b_{0n} - \alpha_n f_n}{\lambda_n} e^{\omega(n)t} + \alpha_n f_n \right] e^{in\theta} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(b_{0n} - \alpha_n f_n) e^{\omega(n)t} + \alpha_n f_n] e^{in\theta}. \end{aligned}$$

□

Аналогичная теорема справедлива для круга, но с более громоздкими выражениями. Интегральное представление задачи позволяет строить приближенные решения на базе итерационных алгоритмов (метод последовательных приближений и т. п.).

Заключение

В работе для нелинейных уравнений кольцевого резонатора сформулирована начально-краевая задача для общей области $\Omega \subset R^2$ и конкретизирована для круга и окружности. Исследована соответствующая линейризованная задача. Численно найдены зоны устойчивости. Построены интегральные представления решений исходной нелинейной системы, доказана соответствующая теорема. Планируются дальнейшие исследования асимптотики решений в областях вида тонкого кольца и круга.

References

- [1] V.Yu. Ivanov, I.B. Ivanova, *Phase patterns in a nonlinear ring resonator*, Moscow University Physics Bulletin, **71**:3 (2016), 266–271.
- [2] Yu.A. Khazova, *Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle*, Dinamicheskie Sistemy, **32**:1-2 (2014), 43–57.
- [3] Yu.A. Khazova, *Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a segment*, Dinamicheskie Sistemy, **32**:3-4 (2014), 245–257.
- [4] Yu.A. Khazova, *Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable*, Tavricheskiy vestnik matematiki i informatiki, **28** (2015), 82–95.
- [5] Yu.A. Khazova, *Metastable structures in a parabolic problem with reflection of a spatial variable on an interval*, Dinamicheskie Sistemy, **35**:2 (2017), 119–129.
- [6] Yu.A. Khazova, *Traveling waves in a parabolic problem with a rotation on the circle*, Computer research and modeling, **9**:5 (2017), 705–716.
- [7] V.A. Lukianenko, Yu.A. Khazova *Application of integral methods for the study of the parabolic problem*, Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, **27**:4 (2019), 85–98.
- [8] V.A. Lukianenko, A.A. Kornuta *Functional differential equations of parabolic type with the involution operator*, Dinamicheskie Sistemy, **37**:4 (2019), 390–409.
- [9] V.A. Lukianenko, A.A. Kornuta *Stable Structures of Nonlinear Parabolic Equations with Transformation of Spatial Variables*, Lobachevskii J Math., **42** (2021), 911–930.
- [10] F.D. Gahov, Ju.I. ?erski?, *Equations of convolution type*, Nauka, Moscow, 1978.
- [11] E.M. Varfolomeev, *On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics*, Sovrem. Mat. Fundam. Napravl., **21** (2007), 5–36.
- [12] A.V. Razgulin, T.E. Romanenko, *Rotating waves in a parabolic functional differential equation with rotation of the spatial argument and delay*, Comput. Math. Math. Phys., **53**:11 (2013), 1626–1643.
- [13] A.L. Skubachevskii, R.V. Shamin, *First mixed problem for a parabolic difference-differential equation*, Mathematical Notes, **66**:1 (1999), 113–119.
- [14] A.B. Muravnik, *Functional-differential parabolic equations: Integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem*, J. Math. Sci. (N.Y.), **216** (2016), 345–496.

VLADIMIR ANDREEVICH LUKIANENKO
PHYSICS AND TECHNOLOGY INSTITUTE, V.I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY,
4 VERNADSKOGO PROSPEKT,
295007, SIMFEROPOL, RUSSIA
Email address: art-inf@yandex.ru

YULIYA ALEKSANDROVNA KHAZOVA
PHYSICS AND TECHNOLOGY INSTITUTE, V.I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY,
4 VERNADSKOGO PROSPEKT,
295007, SIMFEROPOL, RUSSIA
Email address: hazova.yuliya@hotmail.com

YULIYA ALEKSANDROVNA KHAZOVA
SBEIHE RC CEPY NAMED AFTER FEVZI YAKUBOV,
8 UCHEBNY LANE,
295015, SIMFEROPOL, RUSSIA
Email address: hazova.yuliya@hotmail.com