

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 338–363 (2020)

УДК 519.165

DOI 10.33048/semi.2020.17.022

MSC 05A17

О МАКСИМАЛЬНЫХ ГРАФИЧЕСКИХ РАЗБИЕНИЯХ, БЛИЖАЙШИХ К ЗАДАННОМУ ГРАФИЧЕСКОМУ РАЗБИЕНИЮ

В.А. БАРАНСКИЙ, Т.А. СЕНЬЧОНОК

ABSTRACT. A graphical partition is called *maximal* if it is maximal under domination among graphical partitions of a given weight. Let λ and μ be partitions such that $\mu \leq \lambda$. The *height of λ over μ* is the number of transformations in some shortest sequence of elementary transformations which transforms λ to μ , denoted by $\text{height}(\lambda, \mu)$. For a given graphical partition μ , a maximal graphical partition λ such that $\mu \leq \lambda$ and $\text{sum}(\mu) = \text{sum}(\lambda)$ is called the *h -nearest* to μ if it has the minimal height over μ among all maximal graphical partitions λ' such that $\mu \leq \lambda'$ and $\text{sum}(\mu) = \text{sum}(\lambda')$. The aim is to prove the following result:

Let μ be a graphical partition and λ be an h -nearest maximal graphical partition to μ . Then

- (1) either $r(\lambda) = r(\mu) - 1$, $l(\text{tl}(\mu)) < r(\mu)$ or $r(\lambda) = r(\mu)$,
- (2) $\text{height}(\lambda, \mu) = \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - \frac{1}{2}[\text{sum}(\text{tl}(\mu)) - \text{sum}(\text{hd}(\mu))] =$
 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r |\text{tl}(\mu)_i - \text{hd}(\mu)_i|,$

where $r = r(\mu)$ is the rank, $\text{hd}(\mu)$ is the head and $\text{tl}(\mu)$ is the tail of the partition μ , $l(\text{tl}(\mu))$ is the length of $\text{tl}(\mu)$.

We provide an algorithm that generates some h -nearest to μ maximal graphical partition λ such that $r(\lambda) = r(\mu)$. For the case $l(\text{tl}(\mu)) < r(\mu)$, we also provide an algorithm that generates some h -nearest to μ maximal graphical partition λ such that $r(\lambda) = r(\mu) - 1$.

In addition we present a new proof of the Kohnert's criterion for a partition to be graphical not using other criteria.

BARANSKY, V.A., SENCHONOK, T.A., ON MAXIMAL GRAPHICAL PARTITIONS THAT ARE THE NEAREST TO A GIVEN GRAPHICAL PARTITION.

© 2020 БАРАНСКИЙ В.А., СЕНЬЧОНОК Т.А.

Поступила 9 ноября 2019 г., опубликована 10 марта 2020 г.

Keywords: threshold graphs, lattice of integer partitions, graphical partition, maximal graphical partition, Ferrer's diagram.

ВВЕДЕНИЕ

Под графами мы будем понимать обыкновенные графы, т. е. графы без петель и кратных рёбер. Будем придерживаться для графов терминологии и обозначений из [1].

Разбиением [2] называется такая последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ целых неотрицательных чисел, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ и λ содержит лишь конечное число ненулевых компонент. Говорят, что λ является *разбиением числа* $m = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$, а m называют *весом* разбиения λ и обозначают $m = \text{sum}(\lambda)$. Будем рассматривать разбиения при $m \neq 0$. Натуральное число $l = l(\lambda)$ такое, что $\lambda_l > 0$ и $\lambda_{l+1} = \lambda_{l+2} = \dots = 0$, называют *длиной* разбиения λ . Для удобства разбиение λ часто будем записывать в виде конечной последовательности одного из типов:

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t),$$

где $t \geq l(\lambda)$, т. е. будем опускать нули, начиная с некоторой компоненты, но при этом будем помнить, что λ является бесконечной последовательностью.

Через NPL будем обозначать множество всех разбиений всех натуральных чисел, а через $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, — множество всех разбиений заданного натурального числа m . На множестве NPL , а также на множествах вида $NPL(m)$, будем рассматривать *отношение доминирования* \trianglelefteq , полагая $\mu \trianglelefteq \lambda$, если

$$\begin{aligned} \mu_1 &\leq \lambda_1, \\ \mu_1 + \mu_2 &\leq \lambda_1 + \lambda_2, \\ &\dots \\ \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i &\leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i, \\ &\dots \end{aligned}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$.

Разбиение будем изображать в виде диаграммы Ферре, состоящей из конечного набора квадратных *блоков* одинакового размера, составляющих “ступенчатую” фигуру (см. Рис. 1, на котором представлена диаграмма Ферре разбиения $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ длины 8 и веса 26).

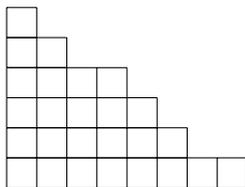


Рис. 1

Определим *элементарные преобразования* двух типов для разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ (см. [3]–[5]).

Пусть натуральные числа $i, j \in \{1, \dots, n\}$ таковы, что $i < j \leq l(\lambda) + 1 = n$ и выполняются условия:

- (1) $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$,
- (2) $\lambda_{j-1} \geq \lambda_j + 1$,
- (3) $\lambda_i \geq 2 + \lambda_j$.

Будем говорить, что разбиение $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_t)$ получено из разбиения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_t)$ элементарным преобразованием первого типа или перекидыванием блока (см. Рис. 2). Отметим, что μ отличается от λ только на двух компонентах с номерами i и j . Для диаграммы Ферре разбиения λ такое преобразование состоит в перемещении верхнего блока i -столбца вправо на верх j -столбца. Условия 1) и 2) гарантируют, что после такого перемещения снова получится разбиение. Очевидно, элементарные преобразования первого типа сохраняют вес разбиения.

Пусть для некоторого натурального числа i такого, что $1 \leq i \leq l(\lambda)$, выполняется $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$. Преобразование, заменяющее разбиение λ на разбиение $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots)$, будем называть элементарным преобразованием второго типа или удалением блока (см. Рис. 2). Очевидно, удаление блока уменьшает вес разбиения на 1. Преобразование, обратное к элементарному преобразованию второго типа, будем называть вставкой блока.

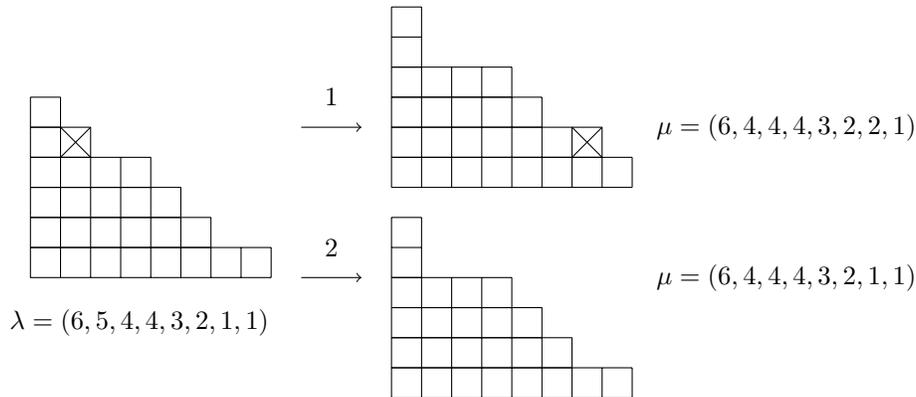


Рис. 2

Если разбиение μ получено из разбиения λ с помощью элементарного преобразования любого из типов, то кратко будем писать $\lambda \rightarrow \mu$.

На множестве NPL и на всех множествах $NPL(m)$ определим отношение \leq , полагая $\mu \leq \lambda$, если разбиение μ можно получить из λ с помощью последовательного применения конечного числа (возможно нулевого) элементарных преобразований указанных типов. Ясно, что в случае $NPL(m)$ можно использовать только элементарные преобразования первого типа, которые не меняют веса разбиения. В [4] и [5] показано, что отношение \leq на каждом из рассматриваемых множеств совпадает с отношением доминирования \triangleleft .

Отметим, что $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, (см. [6]) и NPL (см. [3]–[5]) являются решётками относительно \leq . В [5] показано, что решётка NPL является дизъюнктивным объединением решёток $NPL(m)$, где m пробегает \mathbb{N} , отвечающим некоторой естественной транзитивной системе вложений. В [4] и [5] указаны алгоритмы вычисления пересечения \wedge и объединения \vee в этих решётках.

Для каждого разбиения λ рассмотрим *сопряжённое разбиение* λ^* такое, что для любого $i \in \mathbb{N}$ его i -компонента равна числу блоков в i -строке диаграммы Ферре разбиения λ . Диаграмму Ферре разбиения λ^* можно получить из диаграммы Ферре разбиения λ с помощью зеркальной симметрии относительно главной диагонали.

Например, для разбиения $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$, представленного на Рис. 1, имеем $\lambda^* = (8, 6, 5, 4, 2, 1)$.

В [4] показано, что для любого $m \in \mathbb{N}$ отображение $\lambda \rightarrow \lambda^*$ ($\lambda \in NPL(m)$) является решёточным антиавтоморфизмом решётки $NPL(m)$ таким, что $(\lambda^*)^* = \lambda$ и условие $\mu \leq \lambda$ эквивалентно условию $\lambda^* \leq \mu^*$ для любых $\lambda, \mu \in NPL(m)$.

Для $n \in \mathbb{N}$ конечную последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ целых неотрицательных чисел такую, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, будем называть n -последовательностью; n -последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ называется *графической*, если существует (обыкновенный) граф $G = (V, E)$ на n вершинах, для которого $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $\deg(v_1) = \lambda_1, \deg(v_2) = \lambda_2, \dots, \deg(v_n) = \lambda_n$. Такой граф G называют *реализацией* n -последовательности λ и говорят, что λ реализуется графом G .

Разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ называется *графическим*, если графической является l -последовательность $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, где $l = l(\lambda)$. Очевидно, разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ является графическим тогда и только тогда, когда графической является любая n -последовательность $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, для которой $n \geq l(\lambda)$.

Отметим, что в [7] нами указан алгоритм порождения всех графических n -последовательностей для заданного n , который при своей работе не использует неграфических n -последовательностей и который, начиная с n -последовательности $(n-1, n-1, \dots, n-1)$, последовательно порождает все графические n -последовательности с помощью пар специальных элементарных преобразований второго типа.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ — произвольное разбиение. Определим *ранг Дёрфи* $r(\lambda)$ (или просто *ранг*) разбиения λ , полагая $r(\lambda) = \max\{i | \lambda_i \geq i\}$. Очевидно, ранг $r = r(\lambda)$ равен числу блоков на главной диагонали диаграммы Ферре разбиения λ (см. Рис. 3). Максимальный квадрат, составленный из блоков и симметричный относительно главной диагонали, называют *квадратом Дёрфи* разбиения λ .

Головой $\text{hd}(\lambda)$ разбиения λ назовём разбиение, которое получается из λ уменьшением первых r компонент на одно и то же число $r-1$ и обнуление всех остальных компонент с номерами $r+1, r+2, \dots$. *Хвостом* $\text{tl}(\lambda)$ разбиения λ назовём разбиение, для которого диаграмма Ферре сопряжённого разбиения $\text{tl}(\lambda)^*$ получается из диаграммы Ферре разбиения λ удалением первых r столбцов, т.е. диаграмма Ферре разбиения $\text{tl}(\lambda)^*$ расположена справа от квадрата Дёрфи (см. Рис. 3, на этом рисунке выделены голова и хвост, а стрелки указывают направления, в которых считаются компоненты разбиений $\text{hd}(\lambda)$ и $\text{tl}(\lambda)$).

Отметим, что верхняя строка квадрата Дёрфи всегда входит в качестве первой строки в диаграмму Ферре головы $\text{hd}(\lambda)$, разбиение $\text{hd}(\lambda)$ “считывается” по столбцам слева направо и его длина равна r . Разбиение же $\text{tl}(\lambda)$ “считывается” по строкам снизу вверх и длина разбиения $\text{tl}(\lambda)$ равна λ_{r+1} и не превосходит r , а длина разбиения $\text{tl}(\lambda)^*$ равна $l(\lambda) - r(\lambda)$.

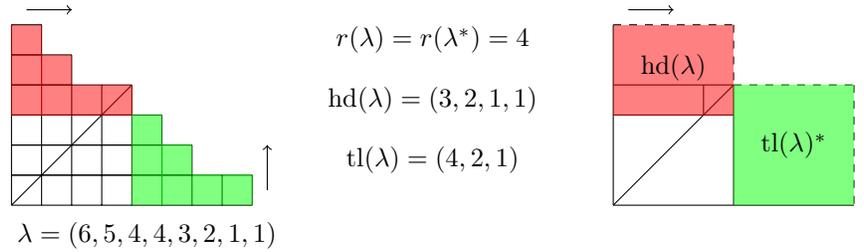


Рис. 3

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный ненулевой граф, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $\deg(v_1) = \lambda_1 \geq \deg(v_2) = \lambda_2 \geq \dots \geq \deg(v_n) = \lambda_n$. Разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)$ будем называть *графическим разбиением, отвечающим графу G* и обозначать через $\text{grt}(G)$.

Ясно, что разбиение является графическим тогда и только тогда, когда оно есть графическое разбиение, отвечающее некоторому графу G . Добавление к графу G или удаление из него изолированных вершин не меняет отвечающего ему разбиения. В силу известной леммы о рукопожатиях графическое разбиение имеет чётный вес, равный удвоенному числу рёбер графа G .

Справедлив следующий критерий графичности разбиения (см. в [8] это утверждение для случая n -последовательностей; мы приводим его в нашей терминологии):

Разбиение λ чётного веса является графическим тогда и только тогда, когда $hd(\lambda) \leq tl(\lambda)$.

Нетрудно показать, что данный критерий Кохнерта графичности разбиения эквивалентен известному критерию Эрдёша-Галлаи графичности n -последовательности [9].

Пусть (x, v, y) — тройка различных вершин графа $G = (V, E)$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$. Такую тройку назовём

- (1) *повышающей*, если $\deg(x) \leq \deg(y)$;
- (2) *понижающей*, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$;
- (3) *сохраняющей*, если $\deg(x) = 1 + \deg(y)$.

Рассмотрим преобразование φ графа G такое, что $\varphi(G) = G - xv + vy$, т.е. из G сначала удаляется ребро xv , а затем добавляется ребро vy (см. Рис. 4).



Рис. 4

Преобразование φ будем называть *вращением ребра* (в графе G вокруг вершины v), отвечающим тройке (x, v, y) . Вращение ребра в графе $\varphi(G)$, отвечающее тройке (y, v, x) будем называть *обратным вращением ребра* для вращения φ .

Вращение ребра в графе G , отвечающее тройке (x, v, y) , называется

- (1) *повышающим*, если $\deg(x) \leq \deg(y)$;
- (2) *понижающим*, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$;
- (3) *сохраняющим*, если $\deg(x) = 1 + \deg(y)$.

Отметим, что случаи, когда $\deg(x) = 1$ или $\deg(y) = 0$ будем считать допустимыми (т. е. может возникнуть изолированная вершина или вращение ребра произойдёт в графе G с добавленной новой изолированной вершиной; в числе троек вида (x, v, y) мы допускаем рассмотрение троек, для которых $y \notin V$ и y — изолированная вершина в графе $G + y$).

Очевидно, вращение ребра в графе G является понижающим тогда и только тогда, когда обратное к нему вращение ребра является повышающим.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)$ — графическое разбиение, $i < j$ и разбиение $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_n)$ получено из λ с помощью одного элементарного преобразования первого типа.

Нетрудно заметить, что разбиение μ также является графическим. Действительно, пусть $G = (V, E)$ — реализация разбиения λ , $\deg(x) = \lambda_i$ и $\deg(y) = \lambda_j$, где $x, y \in V$. Поскольку $\lambda_i > \lambda_j$, существует вершина $v \in V$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$. Пусть φ — понижающее вращение ребра, отвечающее тройке (x, v, y) в графе G . Тогда очевидно $\mu = \text{gpt}(\varphi(G))$. Следовательно, μ также является графическим разбиением.

Теперь ясно, что множество всех графических разбиений фиксированного веса $2m$, где $m \in \mathbb{N}$, образует порядковый идеал в решётке $NPL(2m)$, т. е. оно замкнуто относительно взятия меньших разбиений. Максимальные элементы этого порядкового идеала будем называть *максимальными графическими разбиениями* (веса $2m$).

Пусть $\text{gpt}(G)$ — графическое разбиение, отвечающее графу $G = (V, E)$, и φ — вращение ребра в графе G , отвечающее тройке (x, v, y) , где $xv \in E$ и $vy \notin E$. Нетрудно убедиться в справедливости следующих трёх утверждений.

- (1) Если φ — повышающее вращение ребра, то $\text{gpt}(G) < \text{gpt}(\varphi(G))$, причём $\text{gpt}(G)$ получается из $\text{gpt}(\varphi(G))$ с помощью одного элементарного преобразования первого типа, а G получается из $\varphi(G)$ с помощью обратного (понижающего) вращения ребра.
- (2) Если φ — понижающее вращение ребра, то $\text{gpt}(G) > \text{gpt}(\varphi(G))$, причём $\text{gpt}(\varphi(G))$ получается из $\text{gpt}(G)$ с помощью одного элементарного преобразования первого типа, а G получается из $\varphi(G)$ с помощью обратного (повышающего) вращения ребра.
- (3) Если φ — сохраняющее вращение ребра, то $\text{gpt}(G) = \text{gpt}(\varphi(G))$, причём G получается из $\varphi(G)$ с помощью обратного (сохраняющего) вращения ребра.

Напомним, что граф $G = (V, E)$ называется *пороговым*, если V представимо в виде дизъюнктного объединения клики V_1 и антиклики V_2 (т. е. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) и множество окрестностей вершин из V_2 образует цепь относительно теоретико-множественного включения (другие определения и многочисленные свойства пороговых графов см. в монографии [10]). Отметим, что случаи $V_1 = \emptyset$ или $V_2 = \emptyset$ допускаются, т. е. полные и нулевые графы являются пороговыми. Очевидно, добавление или удаление изолированных вершин не меняет свойство графа быть пороговым.

В [11] нами установлено, что

Граф является пороговым тогда и только тогда, когда он не содержит повышающих троек вершин.

Из этого критерия пороговости графа вытекает [11], что для произвольного разбиения λ чётного веса следующие условия эквивалентны:

- λ является максимальным графическим разбиением,
- $\lambda = \text{gpt}(G)$ для некоторого порогового графа G ,
- $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$.

Отметим, что в [11] для доказательства критерия пороговости графа и указанного следствия мы не используем какого-либо критерия графичности разбиения. Используется лишь результат работы [12], в силу которого разбиение $\text{gpt}(G)$ для порогового графа G является униграфическим, т. е. оно имеет единственную реализацию с точностью до изоморфизма и изолированных вершин (см. также [13], глава VIII).

Пусть μ — произвольное графическое разбиение и H — некоторая его реализация. Совершая последовательно повышающие вращения рёбер до тех пор пока это возможно, мы преобразуем граф H в некоторый пороговый граф G . Граф G находится по H , вообще говоря, неоднозначно. Положим $\text{gpt}(G) = \lambda$. Ясно, что граф H можно получить из графа G с помощью обратных (понижающих) вращений рёбер, производимых в обратном порядке, поэтому $\lambda \geq \mu$ и $\text{sum}(\lambda) = \text{sum}(\mu)$.

Пусть λ и μ — два произвольных разбиения и $\lambda \geq \mu$. *Высотой* $\text{height}(\lambda, \mu)$ разбиения λ над разбиением μ будем называть число преобразований в кратчайшей последовательности элементарных преобразований, преобразующей λ в μ .

Для заданного графического разбиения μ максимальное графическое разбиение λ такое, что $\lambda \geq \mu$ и $\text{sum}(\lambda) = \text{sum}(\mu)$ будем называть *ближайшим по высоте к разбиению μ* , если оно имеет минимальное возможное значение высоты над μ среди всех разбиений из $NPL(2m)$, где $2m = \text{sum}(\mu)$, расположенных над μ .

Главной целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть μ — произвольное графическое разбиение и λ — ближайшее к нему по высоте максимальное графическое разбиение. Тогда*

- (1) *либо $r(\lambda) = r(\mu) - 1$ и $l(\text{tl}(\mu)) < r(\mu)$, либо $r(\lambda) = r(\mu)$;*
- (2) $\text{height}(\lambda, \mu) = \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - \frac{1}{2}[\text{sum}(\text{tl}(\mu)) - \text{sum}(\text{hd}(\mu))]$
 $= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r |\text{tl}(\mu)_i - \text{hd}(\mu)_i|,$

где $r = r(\mu)$, а $\text{tl}(\mu)_i$ и $\text{hd}(\mu)_i$ — это i -компоненты, соответственно хвоста и головы разбиения μ .

Отметим, что для разбиения μ всегда выполняется $l(\text{tl}(\mu)) \leq r(\mu)$.

В § 2 мы указываем Алгоритм 1, который строит некоторое ближайшее к μ по высоте максимальное графическое разбиение λ такое, что $r(\lambda) = r(\mu)$. В случае, когда $l(\text{tl}(\mu)) < r(\mu)$, мы также указываем Алгоритм 2, который строит некоторое ближайшее к μ по высоте максимальное графическое разбиение λ такое, что $r(\lambda) = r(\mu) - 1$.

Попутно, в § 2 мы получаем новое доказательство критерия Кохнерта графичности разбиения, которое не использует никакого другого критерия графичности разбиения. Наше доказательство опирается на доказанный выше

критерий максимальности графического разбиения, состоящий в равенстве головы и хвоста разбиения. Отметим естественный характер доказательства и его прозрачность. Поскольку критерий Кохнерта очевидно эквивалентен критерию Эрдёша-Галлаи из него выводятся все известные критерии графичности разбиений (см. [10] и [14]). По нашему мнению критерий Кохнерта наиболее прост и удобен для применений.

Далее в §§ 1 и 2 мы будем использовать терминологию принятую в [15]. Алгоритм 1 из [15] будет основным средством, применяемым в доказательствах результатов в этих параграфах. Поэтому [15] можно рассматривать как основу для данной работы.

§ 1. ОЦЕНКА СНИЗУ ДЛЯ ВЫСОТ МАКСИМАЛЬНЫХ ГРАФИЧЕСКИХ РАЗБИЕНИЙ НАД ЗАДАННЫМ ГРАФИЧЕСКИМ РАЗБИЕНИЕМ

Лемма 1. Пусть λ – разбиение такое, что $hd(\lambda) \leq tl(\lambda)$, и разбиение μ получено из λ с помощью одного элементарного преобразования первого типа. Тогда $hd(\mu) < tl(\mu)$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму Ферре разбиения λ и все возможные способы получения разбиения μ с помощью одного элементарного преобразования, применённого к λ .

1 случай. Пусть ранги разбиений λ и μ равны, т. е. $r(\lambda) = r(\mu)$. На Рис. 5 показаны три возможных варианта для перекидывания блока в λ . Рассмотрим каждый из них.

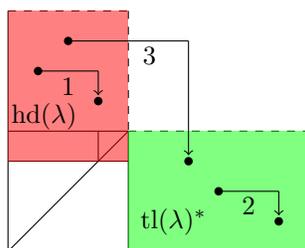


Рис. 5

1.1. В этом случае имеем $hd(\lambda) > hd(\mu)$ и $tl(\lambda)^* = tl(\mu)^*$. Отсюда следует $hd(\mu) < hd(\lambda) \leq tl(\lambda) = tl(\mu)$.

1.2. В этом случае имеем $tl(\lambda)^* > tl(\mu)^*$ и $hd(\lambda) = hd(\mu)$. Отсюда следует $hd(\mu) = hd(\lambda) \leq tl(\lambda) < tl(\mu)$.

1.3. В этом случае имеем $hd(\lambda) > hd(\mu)$, так как $hd(\mu)$ получается из $hd(\lambda)$ удалением блока, и $tl(\lambda) < tl(\mu)$, так как $tl(\lambda)$ получается из $tl(\mu)$ удалением блока. Отсюда следует $hd(\mu) < hd(\lambda) \leq tl(\lambda) < tl(\mu)$.

2 случай. Пусть ранги разбиений λ и μ не равны, т. е. $r(\lambda) \neq r(\mu)$.

2.1 Пусть ранг r разбиения λ уменьшается при переходе к разбиению μ . Этот случай возможен только тогда, когда перекидывается правый верхний блок квадрата Дёрфи (см. Рис. 6).

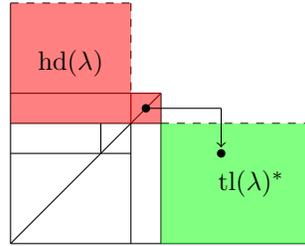


Рис. 6

Нетрудно заметить, что $r(\mu) = r - 1$, $l(\text{hd}(\lambda)) = r$ и $l(\text{tl}(\lambda)) \leq r - 1$. Пусть $\text{hd}(\lambda) = (\eta_1, \dots, \eta_r)$, где $\eta_r = 1$, и $\text{tl}(\lambda) = (\xi_1, \dots, \xi_{r-1})$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \text{hd}(\mu) &= (\eta_1 + 1, \eta_2 + 1, \dots, \eta_{r-1} + 1), \\ \text{tl}(\mu) &= (\xi_1 + 1, \dots, \xi_{i-1} + 1, \xi_i + 2, \xi_{i+1} + 1, \xi_{r-1} + 1) \end{aligned}$$

для некоторого i такого, что $1 \leq i \leq r - 1$. Совершая удаление одного блока, получаем $\text{tl}(\mu) > (\xi_1 + 1, \dots, \xi_i + 1, \dots, \xi_{r-1} + 1) \supseteq (\eta_1 + 1, \dots, \eta_{r-1} + 1) = \text{hd}(\mu)$. Отметим, что второе из неравенств выполняется потому что $(\eta_1, \dots, \eta_{r-1}) = \text{tl}(\lambda) \supseteq \text{hd}(\lambda) = (\eta_1, \dots, \eta_r)$.

2.2. Пусть ранг r разбиения λ увеличивается при переходе к разбиению μ . Этот случай возможен только тогда, когда перекидывался блок на главную диагональ на место с номером $r + 1$ вслед за диагональю квадрата Дёрфи разбиения λ (см. Рис. 7).

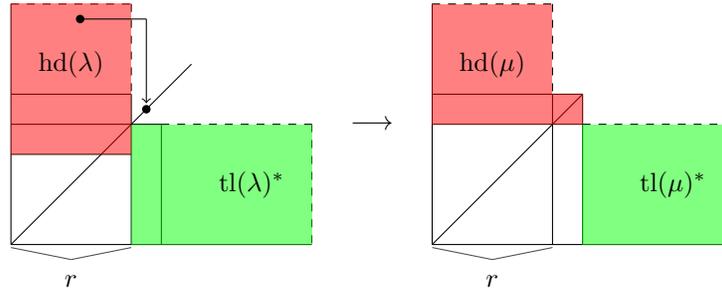


Рис. 7

Нетрудно заметить, что $r(\mu) = r + 1$ и $l(\text{hd}(\lambda)) = l(\text{tl}(\lambda)) = r$. Пусть $\text{hd}(\lambda) = (\eta_1, \dots, \eta_r)$ и $\text{tl}(\lambda) = (\xi_1, \dots, \xi_r)$. Тогда из условия $\text{tl}(\lambda) \supseteq \text{hd}(\lambda)$ вытекает, что $\text{tl}(\mu) = (\xi_1 - 1, \dots, \xi_r - 1) \supseteq (\eta_1 - 1, \dots, \eta_r - 1) \supseteq \text{hd}(\mu)$. Второе из неравенств верно в силу того, что $\text{hd}(\mu)$ получается из $(\eta_1 - 1, \dots, \eta_r - 1)$ и помощью элементарного преобразования первого типа точно такого же, с помощью которого μ получается из λ . \square

Поскольку для любого максимального графического разбиения λ выполняется $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$, из Леммы 1 вытекает

Следствие 1. Для любого графического разбиения μ

$$\text{hd}(\mu) \leq \text{tl}(\mu)$$

Лемма 2. Для любого разбиения μ чётного веса число $c = \text{sum}(\text{tl}(\mu)) - \text{sum}(\text{hd}(\mu))$ чётно.

Доказательство. Так как $\text{sum}(\mu) = \text{sum}(\text{hd}(\mu)) + r(r - 1) + \text{sum}(\text{tl}(\mu))$, где $r = r(\mu)$, число $\text{sum}(\text{tl}(\mu)) + \text{sum}(\text{hd}(\mu))$ чётно. Отсюда следует, что число $\text{sum}(\text{tl}(\mu)) - \text{sum}(\text{hd}(\mu))$ также чётно. \square

Лемма 3. Пусть μ — произвольное графическое разбиение и λ — максимальное графическое разбиение такое, что $\lambda \geq \mu$ и $\text{sum}(\lambda) = \text{sum}(\mu)$. Положим $s = \frac{1}{2}[\text{sum}(\text{tl}(\mu)) - \text{sum}(\text{hd}(\mu))]$. Тогда

- (1) если $r(\lambda) = r(\mu)$ или $r(\lambda) = r(\mu) - 1$, то $\text{height}(\lambda, \mu) \geq \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s$;
- (2) если $r(\lambda) < r(\mu) - 1$ или $r(\lambda) > r(\mu)$, то $\text{height}(\lambda, \mu) > \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s$.

Доказательство. Положим $r' = r(\lambda)$ и $a = \text{sum}(\text{hd}(\mu))$. Тогда $\text{sum}(\text{tl}(\mu)) = a + 2s$ и $\text{sum}(\mu) = a + r'(r' - 1) + a + 2s = r'(r' - 1) + 2(a + s)$.

1 случай. Пусть $r' = r(\lambda) = r(\mu) = r$.

Поскольку $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$ [11], имеем $\text{sum}(\lambda) = r'(r' - 1) + 2\text{sum}(\text{hd}(\lambda))$, откуда вытекает $\text{sum}(\text{hd}(\lambda)) = \text{sum}(\text{tl}(\lambda)) = a + s$.

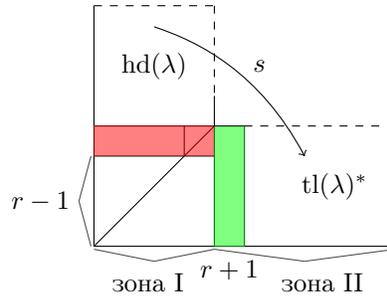


Рис. 8. Диаграмма Ферре разбиения λ

Рассмотрим кратчайшую последовательность элементарных преобразований первого типа от λ до μ , построенную с помощью Алгоритма 1 [15] таким образом, что последовательно на каждом шаге его работы блок из последней горки перекидывается вправо в допустимую ямку (отметим, что в силу условия леммы $c = \text{sum}(\lambda) - \text{sum}(\mu) = 0$, т. е. нужно рассматривать лишь элементарные преобразования первого типа):

$$(1.1) \quad \lambda \rightarrow \dots \rightarrow \mu.$$

Положим $t_1 = \text{height}(\lambda, \mu)$, т. е. t_1 — длина последовательности (1.1). Теперь, начиная с разбиения λ и продвигаясь вдоль последовательности (1.1) два раза, построим две вспомогательные последовательности соответствующих элементарных преобразований первого типа, вставок блоков и удаления блоков: 1) от $\text{tl}(\lambda)^*$ до $\text{tl}(\mu)^*$ и 2) от $\text{hd}(\lambda)$ до $\text{hd}(\mu)$.

1) $\text{hd}(\lambda)^* = \text{tl}(\lambda)^* \rightarrow \dots \rightarrow \text{tl}(\mu)^*$. В этой последовательности кроме перекидывания блоков происходит точно s вставок блоков, отвечающих перекидываниям блоков из зоны I (вертикальная “полоса” на Рис. 8) в зону II (горизонтальная “полоса” на Рис. 8), так как $\text{sum}(\text{tl}(\mu)^*) - \text{sum}(\text{tl}(\lambda)^*) = (a+2s) - (a+s) = s$. Обозначим длину этой последовательности через t_2 .

2) $\text{hd}(\lambda) \rightarrow \dots \rightarrow \text{hd}(\mu)$. В данной последовательности кроме перекидывания блоков происходит точно s удалений блоков, отвечающих перекидываниям блоков из зоны I в зону II (см. Рис. 8), так как $\text{sum}(\text{hd}(\lambda)) - \text{sum}(\text{hd}(\mu)) = (a+s) - a = s$. Обозначим длину этой последовательности через t_3 .

Переходя в последовательности 1) к сопряжённым разбиениям, получим последовательность элементарных преобразований от $\text{tl}(\mu)$ до $\text{tl}(\lambda)$ (вставкам блоков будут отвечать удаления блоков). Продолжая эту последовательность последовательностью 2), получим последовательность элементарных преобразований вида

$$\text{tl}(\mu) \rightarrow \dots \rightarrow \text{tl}(\lambda) = \text{hd}(\lambda) \rightarrow \dots \rightarrow \text{hd}(\mu),$$

длина которой равна $t_2 + t_3$ и в которой число удалений блоков равно $2s$. Отметим, что $t_2 + t_3 = t_1 + s$, поскольку s преобразований из (1.1), состоящих в перекидывании блоков из зоны I в зону II, учтены дважды. Теперь по определению высоты разбиения $\text{tl}(\mu)$ над разбиением $\text{hd}(\mu)$ получаем

$$\text{height}(\lambda, \mu) = t_1 = t_2 + t_3 - s \geq \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s.$$

2 случай. Пусть $r' = r(\lambda) < r(\mu) = r$.

Рассмотрим квадрат Дёрфи для μ с r блоками на главной диагонали и диаграмму Ферре для λ (см. Рис. 9).

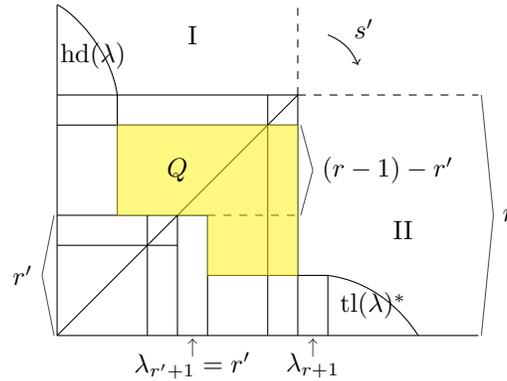


Рис. 9

На Рис. 9 через Q обозначено множество всех блоков квадрата Дёрфи разбиения μ , не содержащее блоков из верхней строки этого квадрата и не содержащее блоков из диаграммы Ферре разбиения λ . Тогда $q = |Q| \geq (r-1) - r' \geq 0$. Если $r' < r-1$, то $q > 0$. Если же $r' = r-1$, то $r = r'+1$, откуда вытекает $Q = \emptyset$ в силу того, что $\lambda_{r'+1} = r'$ (последнее равенство верно в силу условия $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$). Таким образом, если $r' = r-1$, то $q = 0$.

Отметим, что $\text{hd}(\mu)$ “лежит” в зоне I, а $\text{tl}(\mu)^*$ — в зоне II.

Рассмотрим кратчайшую последовательность элементарных преобразований первого типа от λ до μ , построенную с помощью Алгоритма 1 [15] таким образом, что последовательно на каждом шаге его работы блок из последней горки перекидывается вправо в допустимую ямку (здесь, как и в 1 случае, $c = \text{sum}(\lambda) - \text{sum}(\mu) = 0$, т. е. нужно рассматривать лишь элементарные преобразования первого типа):

$$(1.2) \quad \lambda \rightarrow \dots \rightarrow \mu.$$

Положим $t_1 = \text{height}(\lambda, \mu)$, т. е. t_1 — длина последовательности (1.2).

Обозначим через s' число перекидываний блоков из зоны I в зону II. Тогда верны следующие два равенства:

$$\begin{aligned} s' + \lambda_{r+1} + \lambda_{r+2} + \dots &= \text{sum}(\text{tl}(\mu)), \\ \lambda_{r+1} + \lambda_{r+2} + \dots &= \text{sum}(\text{hd}(\mu)) + q + s'. \end{aligned}$$

Первое из равенств очевидно, а второе равенство верно потому, что в силу $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$ строки в $\text{hd}(\lambda)$, начиная с r -строки и вверх, содержат соответственно $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots$ блоков, которые надо “израсходовать” на заполнение ямок q раз, на s' перекидываний блоков и на получение $\text{hd}(\mu)$. Из этих двух равенств выводим $\text{sum}(\text{tl}(\mu)) = \text{sum}(\text{hd}(\mu)) + q + 2s'$, т. е. $2s = q + 2s'$.

Через τ обозначим разбиение, для которого $\tau^* = (\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots)$ (см. Рис. 10).

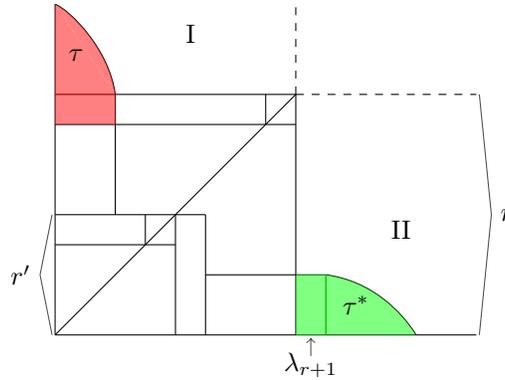


Рис. 10

Диаграмма Ферре разбиения τ^* расположена справа от квадрата Дёрфи разбиения μ и составляет “часть” хвоста разбиения λ . Диаграмму же Ферре разбиения τ составляют блоки головы разбиения λ , лежащие в строках с номерами $r, r + 1, \dots$.

Теперь, начиная с разбиения λ и продвигаясь вдоль последовательности (1.2) два раза, построим две вспомогательные последовательности соответствующих элементарных преобразований первого типа, вставок блоков и удалений блоков: 1) от τ^* до $\text{tl}(\mu)^*$ и 2) от τ до $\text{hd}(\mu)$.

1) $\tau^* \rightarrow \dots \rightarrow \text{tl}(\mu)^*$. В этой последовательности кроме перекидывания блоков происходит точно s' вставок блоков, отвечающих перекидываниям блоков

из зоны I в зону II (см. Рис. 10 и Рис. 9). Обозначим длину этой последовательности через t_2 .

2) $\tau \rightarrow \dots \rightarrow \text{hd}(\mu)$. В данной последовательности кроме перекидывания блоков происходит точно $q + s'$ удалений блоков, отвечающих q перекидываниям блоков, необходимых для заполнения ямок из Q , и перекидываниям блоков из зоны I в зону II. Обозначим длину этой последовательности через t_3 .

Переходя в последовательности 1) к сопряжённым разбиениям, получим последовательность элементарных преобразований от $\text{tl}(\mu)$ до τ (вставкам блоков будут отвечать удаления блоков). Продолжая эту последовательность последовательностью 2), получим последовательность элементарных преобразований вида

$$\text{tl}(\mu) \rightarrow \dots \rightarrow \tau \rightarrow \dots \rightarrow \text{hd}(\mu),$$

длина которой равна $t_2 + t_3$ и в которой число удалений блоков равно $q + 2s' = 2s$. Отметим, что $t_2 + t_3 = t_1 + s'$, поскольку s' преобразований из (1.2), состоящих в перекидывании блоков из зоны I в зону II, учтены дважды. Теперь по определению высоты разбиения $\text{tl}(\mu)$ над разбиением $\text{hd}(\mu)$ получаем

$$\text{height}(\lambda, \mu) = t_1 = t_2 + t_3 - s' \geq \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s'.$$

Если $r' < r - 1$, то $q > 0$ и $s > s'$, поскольку $2s = q + 2s'$. Поэтому выполняется

$$\text{height}(\lambda, \mu) > \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s.$$

Если же $r' = r - 1$, то $q = 0$, поэтому $s = s'$ и

$$\text{height}(\lambda, \mu) \geq \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s.$$

3 случай. Пусть $r' = r(\lambda) > r(\mu) = r$.

Рассмотрим квадрат Дёрфи разбиения μ с r блоками на главной диагонали и диаграмму Ферре разбиения λ (см. Рис. 11).

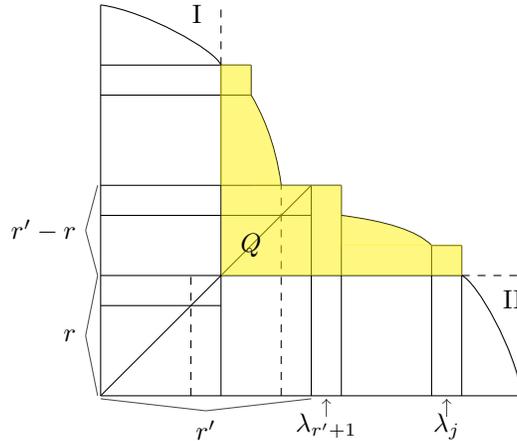


Рис. 11

Через Q обозначим множество блоков диаграммы Ферре разбиения λ , лежащих правее r -столбца и выше r -строки (выделенная область на Рис. 11). Тогда $q = |Q| \geq r' - r > 0$.

Поскольку $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$, имеем $\lambda_{r'+1} = r' > r$. Через j обозначим последний индекс такой, что $\lambda_j > r$, а через τ — разбиение, для которого

$$\tau^* = (\tau_1^* = r, \tau_2^* = \tau, \dots, \tau_{j-r}^* = r, \tau_{j-r+1}^* = \lambda_{j+1}, \tau_{j-r+2}^* = \lambda_{j+2}, \dots).$$

На Рис. 12 указаны диаграммы Ферре разбиений τ и τ^* , соответственно в зонах I и II.

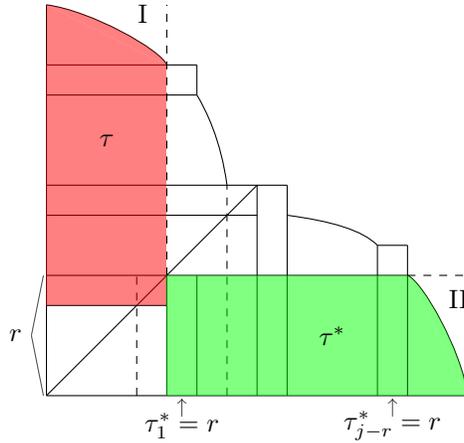


Рис. 12

Отметим, что диаграмма Ферре разбиения τ^* расположена справа от квадрата Дёрфи разбиения μ , а диаграмма Ферре разбиения τ — выше этого квадрата и включает его верхнюю строку (см. Рис. 12).

Рассмотрим кратчайшую последовательность элементарных преобразований первого типа от λ до μ , построенную с помощью Алгоритма 1 [15] таким образом, что последовательно на каждом шаге его работы блок из последней горки перекидывается вправо в допустимую ямку (здесь опять $c = \text{sum}(\lambda) - \text{sum}(\mu) = 0$, т. е. нужно рассматривать лишь элементарные преобразования первого типа):

$$(1.3) \quad \lambda \rightarrow \dots \rightarrow \mu.$$

Положим $t_1 = \text{height}(\lambda, \mu)$, т. е. t_1 — длина последовательности (1.3).

Заметим, что, начиная с $(r + 1)$ -столбца до j -столбца, разбиение λ всюду имеет горки относительно разбиения μ (см. Рис. 11). Поэтому при построении последовательности (1.3) из столбцов с номерами $j, j - 1, j - 2, \dots, r + 1$ будут происходить перекидывания блоков в i -ямки, т. е. ямки, отвечающие i -столбцам, для которых $i > j$. При дальнейшем построении последовательности (1.3) при прохождении столбцов с номерами $r, r - 1, r - 2, \dots, 1$ разбиение τ будет преобразовано в разбиение $\text{hd}(\mu)$, причём часть блоков, обозначим их число через s' , будет перекинута в i -ямки такие, что $i > r$.

Начиная с разбиения λ и продвигаясь вдоль последовательности (1.3) два раза, построим две вспомогательные последовательности соответствующих элементарных преобразований первого типа, вставок блоков и удалений блоков: 1) от τ^* до $\text{tl}(\mu)^*$ и 2) от τ до $\text{hd}(\mu)$.

1) $\tau^* \rightarrow \dots \rightarrow \text{tl}(\mu)^*$. В этой последовательности кроме перекидывания блоков происходит точно $s' + q$ вставок блоков в i -ямки такие, что $i > j$. Обозначим длину этой последовательности через t_2 .

2) $\tau \rightarrow \dots \rightarrow \text{hd}(\mu)$. В данной последовательности кроме перекидывания блоков происходит точно s' удалений блоков, отвечающих s' перекидываниям блоков из зоны I в зону II (см. Рис. 12). Обозначим длину этой последовательности через t_3 .

Переходя в последовательности 1) к сопряжённым разбиениям, получим последовательность элементарных преобразований от $\text{tl}(\mu)$ до τ (вставкам блоков будут отвечать удаления блоков). Продолжая эту последовательность последовательностью 2), получим последовательность элементарных преобразований вида

$$\text{tl}(\mu) \rightarrow \dots \rightarrow \tau \rightarrow \dots \rightarrow \text{hd}(\mu),$$

длина которой равна $t_2 + t_3$ и в которой число удалений блоков равно $2s' + q = 2s$. Отметим, что $t_2 + t_3 = t_1 + s'$, поскольку s' преобразований из (1.3), состоящих из перекидываний блоков из зоны I в зону II, учтены дважды. Поскольку $q > 0$, имеем $s > s'$. Теперь по определению высоты разбиения $\text{tl}(\mu)$ над разбиением $\text{hd}(\mu)$ получаем

$$\begin{aligned} \text{height}(\lambda, \mu) = t_1 = t_2 + t_3 - s' &\geq \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s' \\ &> \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. Пусть μ — произвольное графическое разбиение, λ — максимальное графическое разбиение, $\lambda \geq \mu$, $\text{sum}(\lambda) = \text{sum}(\mu)$, $r(\lambda) = r - 1$, где $r = r(\mu)$, $l(\text{tl}(\mu)) = r$ и $s = \frac{1}{2}[\text{sum}(\text{tl}(\mu)) - \text{sum}(\text{hd}(\mu))]$. Тогда

$$\text{height}(\lambda, \mu) > \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s.$$

Доказательство. Поскольку λ — максимальное графическое разбиение, выполняется $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$. Кроме того, имеем $\mu_{r+1} = l(\text{tl}(\mu)) = r$.

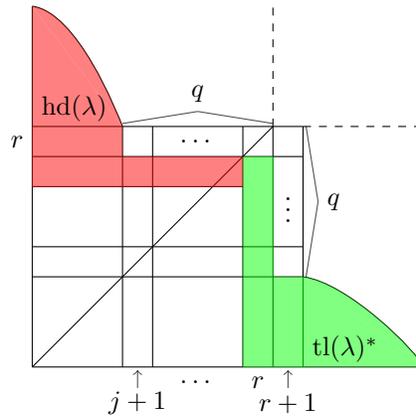


Рис. 13

Рассмотрим квадрат Дёрфи разбиения μ с r блоками на главной диагонали и диаграмму Ферре разбиения λ (см. Рис. 13). На Рис. 13 указаны $2q$ блоков, где $q \geq 1$, которые имеются в диаграмме Ферре разбиения μ , но отсутствуют в диаграмме Ферре разбиения λ .

По условию леммы выполняется $\mu_1, \dots, \mu_r \geq r$ и $\mu_{r+1} = r$. Пусть r -строка разбиения λ содержит точно j блоков (поскольку $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$, $(r+1)$ -столбец разбиения λ тоже содержит j блоков). Так как $r(\lambda) = r - 1$, имеем $1 \leq j \leq r - 1$. В столбцах с номерами $j + 1, j + 2, \dots, r, r + 1$ разбиение λ имеет ямки относительно разбиения μ , причём перед $(j + 1)$ -ямкой в r -строке разбиения λ имеется блок. Ясно, что $q = r - j \geq 1$.

Обозначим через θ “урезанное” разбиение $\text{hd}(\lambda)$, которое получается из разбиения $\text{hd}(\lambda)$ удалением первой строки из диаграммы Ферре разбиения $\text{hd}(\lambda)$ или, иными словами, уменьшением на 1 всех ненулевых компонент разбиения $\text{hd}(\lambda)$ (см. Рис. 14).

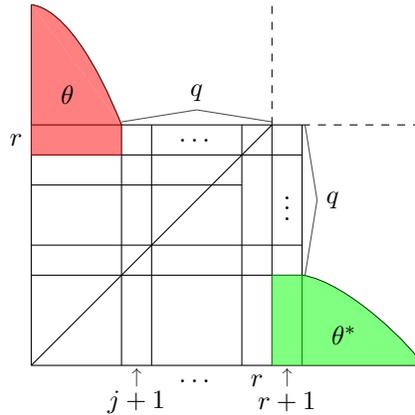


Рис. 14

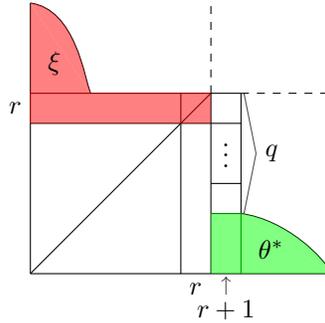
Начнём строить в соответствии с Алгоритмом 1 [15] кратчайшую последовательность элементарных преобразований первого типа от λ до μ (здесь $c = \text{sum}(\lambda) - \text{sum}(\mu) = 0$).

Вначале, начиная с разбиения λ будем перекидывать по одному блоку для заполнения r -строки до длины r , т.е. поочерёдно в ямки с номерами $j + 1, j + 2, \dots, r$ перекидывать по одному блоку из ближайших к ним слева горок (отметим, что на каждом шаге перекидывания очередная ямка становится допустимой). При этом разбиение θ с помощью таких же q элементарных преобразований первого типа будет преобразовано в некоторое разбиение ξ такое, что $l(\xi) = r$:

$$(1.4) \quad \theta = \theta_{(0)} \rightarrow \theta_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \theta_{(q)} = \xi.$$

Разбиение же λ будет преобразовано такими элементарными преобразованиями первого типа в некоторое разбиение η такое, что $\eta \geq \mu$ (см. Рис. 15):

$$(1.5) \quad \lambda = \lambda_{(0)} \rightarrow \lambda_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda_{(q)} = \eta.$$

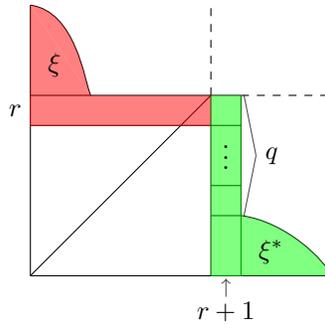
Рис. 15. Диаграмма Ферре разбиения η и q блоков разбиения μ

Переходя в последовательности (1.4) к сопряжённым разбиениями, получим следующую последовательность элементарных преобразований первого типа:

$$(1.6) \quad \xi^* = \theta_{(q)}^* \rightarrow \theta_{(q-1)}^* \rightarrow \cdots \rightarrow \theta_{(1)}^* \rightarrow \theta_{(0)}^* = \theta^*.$$

Здесь q блоков первого столбца разбиения ξ^* поочерёдно по одному перекидываются вправо.

Рассмотрим теперь разбиение τ такое, что $r(\tau) = r$, $\text{hd}(\tau) = \text{tl}(\tau) = \xi$ (см. Рис. 16). Ясно, что τ — максимальное графическое разбиение.

Рис. 16. Диаграмма Ферре разбиения τ

Продолжим построение кратчайшей последовательности элементарных преобразований первого типа от λ до μ .

Начиная с разбиения η (см. Рис. 15), будем заполнять $(r+1)$ -ямку последовательно q блоками из ближайших слева к этой ямке горok. Разбиение ξ с помощью q элементарных преобразований второго типа будет при этом преобразовано в некоторое разбиение ρ (удаляемые из ξ блоки перемещаются в $(r+1)$ -ямку):

$$(1.7) \quad \xi = \xi_{(0)} \rightarrow \xi_{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \xi_{(q)} = \rho.$$

Разбиение же η будет преобразовано такими же соответствующими элементарными преобразованиями первого типа в разбиение σ такое, что $\sigma \geq \mu$ (см.

Рис. 17, удаляемые q блоков из ξ перемещаются в $(r + 1)$ -ямку):

$$(1.8) \quad \eta = \eta_{(0)} \rightarrow \eta_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \eta_{(q)} = \sigma.$$

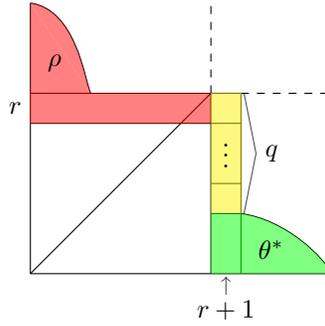


Рис. 17. Диаграмма Ферре разбиения σ

Начиная с разбиения τ (см. Рис. 16) и используя последовательности (1.7) и (1.6) построим последовательность элементарных преобразований первого типа:

$$(1.9) \quad \tau = \tau_{(0)} \rightarrow \tau_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \tau_{(q)} = \sigma.$$

При построении этой последовательности перекидываемые в соответствии с (1.7) q блоков из разбиения ξ мы будем вставлять на места поочерёдного размещения блоков в соответствии с последовательностью (1.6) (т.е. вставляться будут блоки, удаляемые из ξ , а не верхние из q блоков столбца с номером $r + 1$). Ясно, что в результате q элементарных преобразований первого типа из разбиения τ мы получим разбиение σ , т.е. $\tau_{(q)} = \sigma$.

Далее, начиная с σ , в соответствии с Алгоритмом 1 [15] продолжим до завершения построение кратчайшей последовательности элементарных преобразований первого типа от λ до μ :

$$(1.10) \quad \lambda = \lambda_{(0)} \rightarrow \lambda_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda_{(q)} = \eta = \eta_{(0)} \rightarrow \eta_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \eta_{(q)} = \sigma \rightarrow \dots \rightarrow \mu.$$

Для разбиения τ мы также получим последовательность элементарных преобразований первого типа (с таким же продолжением от σ до μ) от τ до μ :

$$(1.11) \quad \tau = \tau_{(0)} \rightarrow \tau_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \tau_{(q)} = \sigma \rightarrow \dots \rightarrow \mu.$$

Отметим, что мы не можем гарантировать, что последовательность (1.11) будет кратчайшей от τ до μ .

Длина последовательности (1.10) равна $2q + t$, а длина последовательности (1.11) — $q + t$, где t — некоторое целое неотрицательное число. В силу Леммы 3, применённой к разбиению τ (отметим, что $r(\tau) = r$), получаем

$$q + t \geq \text{height}(\tau, \mu) \geq \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s.$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned} \text{height}(\lambda, \mu) = 2q + t &\geq q + \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s \\ &> \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть μ — произвольное разбиение чётного веса такое, что $\text{hd}(\mu) \leq \text{tl}(\mu)$. Положим $s = \frac{1}{2}[\text{sum}(\text{tl}(\mu)) - \text{sum}(\text{hd}(\mu))]$.

Следующий алгоритм строит максимальное графическое разбиение λ такое, что $\lambda \geq \mu$, $\text{sum}(\lambda) = \text{sum}(\mu)$, $r(\lambda) = r(\mu) = r$ и

$$\begin{aligned} \text{height}(\lambda, \mu) &= \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r |\text{tl}(\mu)_i - \text{hd}(\mu)_i|. \end{aligned}$$

Алгоритм I. 1) Сначала вычисляем покомпонентную разность $\text{tl}(\mu) - \text{hd}(\mu) = (\text{tl}(\mu)_1 - \text{hd}(\mu)_1, \text{tl}(\mu)_2 - \text{hd}(\mu)_2, \dots)$. Поскольку верхняя строка квадрата Дёрфи разбиения μ является нижней строкой диаграммы Ферре разбиения $\text{hd}(\mu)$, в столбцах с номерами $l(\text{tl}(\mu)) + 1 = \mu_{r+1} + 1, l(\text{tl}(\mu)) + 2 = \mu_{r+1} + 2, \dots, r$ разбиение $\text{tl}(\mu)$ имеет ямки относительно разбиения $\text{hd}(\mu)$ (см. Рис. 18).

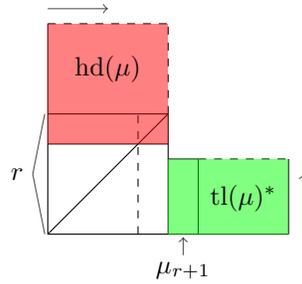


Рис. 18

2) Поскольку $\text{hd}(\mu) \leq \text{tl}(\mu)$, начнём строить, применяя Алгоритм 1 [15], кратчайшую последовательность элементарных преобразований от $\text{tl}(\mu)$ до $\text{hd}(\mu)$, длина которой равна $\text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu))$.

Перекинем последовательно $r - \mu_{r+1}$ блоков разбиения $\text{tl}(\mu)$ из последних горok возникающих разбиений по одному блоку в ямки разбиения $\text{tl}(\mu)$ над $\text{hd}(\mu)$ с номерами $\mu_{r+1} + 1, \mu_{r+1} + 2, \dots, r$. (Отметим, что на каждом шаге очередная ямка становится допустимой и при $\mu_{r+1} = r$, таких преобразований выполнять не нужно.) В результате будет построена последовательность (возможно нулевой длины) элементарных преобразований первого типа:

$$\text{tl}(\mu) = \eta_{(0)} \rightarrow \eta_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \eta_{(r-\mu_{r+1})} = \xi_{(0)}.$$

3) Затем, начиная с $\xi_{(0)}$, в соответствии с Алгоритмом 1 [15] удалим последовательно s блоков из последних горok полученных разбиений (относительно разбиения $\text{hd}(\mu)$). В результате будет построена последовательность элементарных преобразований:

$$(2.1) \quad \text{tl}(\mu) = \eta_{(0)} \rightarrow \eta_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \eta_{(r-\mu_{r+1})} = \xi_{(0)} \rightarrow \xi_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{(s)} = \tau,$$

причём $\text{sum}(\tau) = \text{sum}(\text{tl}(\mu)) - s$.

4) Далее, начиная с разбиения τ , продолжим выполнение Алгоритма 1 [15], сначала удаляя последовательно s блоков из последних горок, а затем последовательно перекидывая в допустимые ямки блоки из ближайших к ним слева горок. В результате будет построена последовательность элементарных преобразований:

$$(2.2) \quad \tau = \tau_{(0)} \rightarrow \tau_{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{(t)} = \text{hd}(\mu),$$

в начале которой имеется точно s удалений блоков. Так как $\text{sum}(\text{tl}(\mu)) - \text{sum}(\text{hd}(\mu)) = 2s$, выполняется $\text{sum}(\tau) = \text{sum}(\text{hd}(\mu)) + s$.

Таким образом, будет построена кратчайшая последовательность элементарных преобразований от $\text{tl}(\mu)$ до $\text{hd}(\mu)$:

$$\begin{aligned} \text{tl}(\mu) = \eta_{(0)} \rightarrow \eta_{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \eta_{(r-\mu_{r+1})} = \\ = \xi_{(0)} \rightarrow \xi_{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \xi_{(s)} = \\ = \tau_{(0)} \rightarrow \tau_{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{(t)} = \text{hd}(\mu). \end{aligned}$$

(Поэтому $\text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) = (r - \mu_{r+1}) + s + t$ и, следовательно, $t = \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - (r - \mu_{r+1} + s)$.)

5) Теперь в качестве искомого разбиения λ возьмём такое разбиение, что $r(\lambda) = r$, $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda) = \tau$. (В силу Следствий 1 и 2 из [11] разбиение λ — максимальное графическое разбиение.)

Доказательство корректности Алгоритма I. Прежде всего заметим, что $\text{sum}(\lambda) = \text{sum}(\text{hd}(\lambda)) + r(r-1) + \text{sum}(\text{tl}(\lambda)) = \text{sum}(\text{hd}(\mu)) + s + r(r-1) + \text{sum}(\text{tl}(\mu)) - s = \text{sum}(\text{hd}(\mu)) + r(r-1) + \text{sum}(\text{tl}(\mu)) = \text{sum}(\mu)$.

Покажем, что $\lambda \geq \mu$. Для этого укажем последовательность элементарных преобразований только первого типа от λ до μ .

Предварительно, переходя в (2.1) к сопряжённым разбиениям получим последовательность элементарных преобразований первого типа и s вставок блоков:

$$(2.3) \quad \tau^* = \xi_{(s)}^* \rightarrow \cdots \rightarrow \xi_{(1)}^* \rightarrow \xi_{(0)}^* = \eta_{(r-\mu_{r+1})}^* \rightarrow \cdots \rightarrow \eta_{(1)}^* \rightarrow \eta_{(0)}^* = \text{tl}(\mu)^*,$$

где вначале идёт s вставок блоков, а затем выполняется $(r - \mu_{r+1})$ элементарных преобразований первого типа.

Для получения нужной последовательности элементарных преобразований только первого типа от λ до μ совершим сначала последовательность элементарных преобразований, преобразующих $\text{hd}(\lambda)$ (равное τ) в $\text{hd}(\mu)$ в соответствии с (2.2). При этом вместо удаления s блоков в соответствии с (2.2) совершим перекидывания этих блоков на места определяемые последовательными s вставками блоков в соответствии с (2.3). Затем осуществим ещё $(r - \mu_{r+1})$ элементарных преобразований первого типа в соответствии со второй частью преобразований из (2.3). В результате будет получено разбиение μ .

Число всех выполненных преобразований первого типа от λ до μ будет равно

$$\text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - (r - \mu_{r+1} + s) + (r - \mu_{r+1}) = \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s.$$

В силу Теоремы 1 [15] последнее число равно

$$\left(s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r |\text{tl}(\mu)_i - \text{hd}(\mu)_i|\right) - s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r |\text{tl}(\mu)_i - \text{hd}(\mu)_i|$$

□

Поскольку построенное разбиение λ является максимальным графическим разбиением, $\lambda \geq \mu$ и $\text{sum}(\lambda) = \text{sum}(\mu)$, в силу Леммы 1 [16] разбиение μ также является графическим. Поэтому с учётом Следствия 1 из § 1 справедливо

Следствие 2. *Произвольное разбиение μ чётного веса является графическим разбиением тогда и только тогда, когда $\text{hd}(\mu) \leq \text{tl}(\mu)$.*

Пример 2.1. Пусть $\mu = (9, 6, 5, 5, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$ (см. Рис. 19). Тогда $r = r(\mu) = 4$, $\text{hd}(\mu) = (6, 3, 2, 2)$, $\text{tl}(\mu) = (8, 6, 3)$, $\text{sum}(\text{hd}(\mu)) = 13$, $\text{sum}(\text{tl}(\mu)) = 17$, $2s = 17 - 13$ и $s = 2$. Рассмотрим покомпонентную разность разбиений $\text{tl}(\mu)$ и $\text{hd}(\mu)$:

$$\begin{array}{r} \text{tl}(\mu) = (8, \quad 6, \quad 3, \quad 0) \\ \text{hd}(\mu) = (6, \quad 3, \quad 2, \quad 2) \\ \hline \text{tl}(\mu) - \text{hd}(\mu) = (+2, \quad +3, \quad +1, \quad -2) \end{array}$$

(+ соответствует горкам, а – соответствует ямке). Очевидно, $\text{hd}(\mu) \leq \text{tl}(\mu)$.

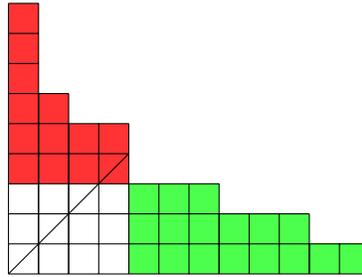


Рис. 19. Диаграмма Ферре разбиения μ

Преобразуем $\text{tl}(\mu)$ в $\text{hd}(\mu)$ способом, указанным в Алгоритме I (см. Рис. 20).

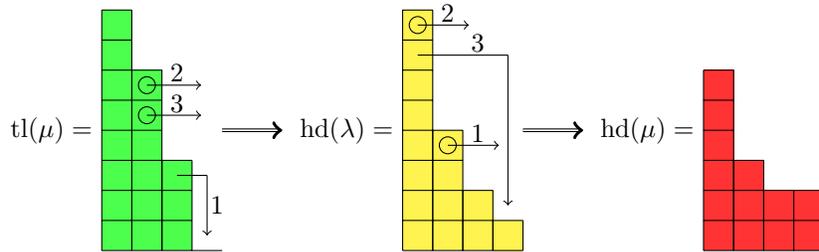


Рис. 20

На Рис. 20 стрелками с номерами указаны элементарные преобразования, номер стрелки указывает номер выполнения соответствующего преобразования, кружками обозначены удаляемые блоки. Последовательность элементарных преобразований от $\text{hd}(\lambda)$ до $\text{hd}(\mu)$ выполнена (см. [15]) в соответствии с разностью

$$\begin{array}{r} \text{hd}(\lambda) = (8, \quad 4, \quad 2, \quad 1) \\ \text{hd}(\mu) = (6, \quad 3, \quad 2, \quad 2) \\ \hline \text{hd}(\lambda) - \text{hd}(\mu) = (+2, \quad +1, \quad 0, \quad -1) \end{array}$$

Укажем теперь последовательность элементарных преобразований первого типа от λ до μ (см. Рис. 21).

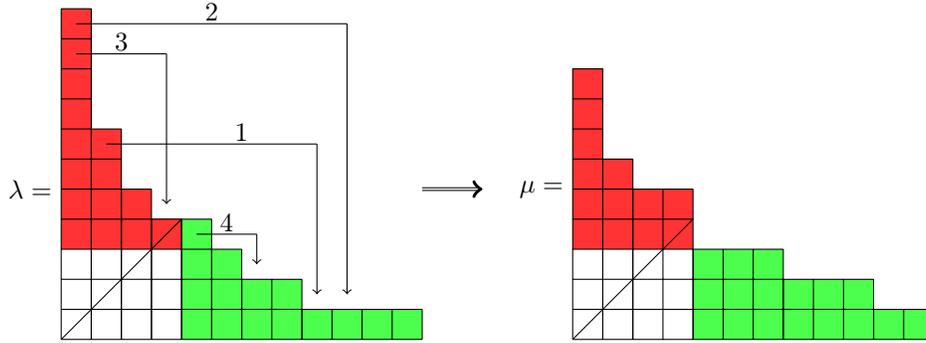


Рис. 21

Здесь $\text{height}(\lambda, \mu) = \frac{1}{2}(2 + 3 + 1 + |-2|) = 4$. □

Рассмотрим теперь случай, когда $l(\text{tl}(\mu)) = \mu_{r+1} < r$ (см. Рис. 18).

В случае, когда $\text{hd}(\mu) \leq \text{tl}(\mu)$ и $\mu_{r+1} < r$, следующий алгоритм строит максимальное графическое разбиение λ такое, что $\mu \leq \lambda$, $\text{sum}(\lambda) = \text{sum}(\mu)$, $r(\lambda) = r(\mu) - 1$ и

$$\begin{aligned} \text{height}(\lambda, \mu) &= \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r |\text{tl}(\mu)_i - \text{hd}(\mu)_i|, \end{aligned}$$

где $r = r(\mu)$ и $s = \frac{1}{2}[\text{sum}(\text{tl}(\mu)) - \text{sum}(\text{hd}(\mu))]$.

Алгоритм II. 1) Сначала вычисляем покомпонентную разность $\text{tl}(\mu) - \text{hd}(\mu)$. Поскольку верхняя строка квадрата Дёрфи разбиения μ является нижней строкой диаграммы Ферре разбиения $\text{hd}(\mu)$, в столбцах с номерами

$$\mu_{r+1} + 1, \mu_{r+1} + 2, \dots, r$$

разбиение $\text{tl}(\mu)$ имеет ямки относительно разбиения $\text{hd}(\mu)$ (см. Рис. 18).

2) Поскольку $\text{hd}(\mu) \leq \text{tl}(\mu)$, начнём строить, применяя Алгоритм 1 [15], кратчайшую последовательность элементарных преобразований от $\text{tl}(\mu)$ до $\text{hd}(\mu)$, длина которой равна $\text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu))$.

Перекинем последовательно $(r-1) - \mu_{r+1}$ блоков разбиения $\text{tl}(\mu)$ из последних горok возникающих разбиений по одному блоку в ямки разбиения $\text{tl}(\mu)$ над $\text{hd}(\mu)$ с номерами

$$\mu_{r+1} + 1, \mu_{r+2} + 2, \dots, r - 1$$

(Отметим, что на каждом шаге очередная ямка становится допустимой и при $\mu_{r+1} = r - 1$ таких преобразований выполнять не нужно.) В результате будет построена последовательность (возможно нулевой длины) элементарных преобразований первого типа:

$$\text{tl}(\mu) = \eta_{(0)} \rightarrow \eta_{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \eta_{((r-1)-\mu_{r+1})} = \xi_{(0)}.$$

3) Заметим, начиная с $\xi_{(0)}$, в соответствии с Алгоритмом 1 [15] удалим последовательно s блоков из последних горok получаемых разбиений (относительно

разбиения $\text{hd}(\mu)$). В результате будет построена последовательность элементарных преобразований:

$$(2.4) \quad \text{tl}(\mu) = \eta_{(0)} \rightarrow \eta_{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \eta_{((r-1)-\mu_{r+1})} = \xi_{(0)} \rightarrow \xi_{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \xi_{(s)} = \tau,$$

причём $\text{sum}(\tau) = \text{sum}(\text{tl}(\mu)) - s$.

4) Далее, начиная с разбиения τ , продолжим выполнение Алгоритма 1 [15], сначала удаляя последовательно s блоков из последних горок, а затем последовательно перекидывая в допустимые ямки блоки из ближайших к ним слева горок. В результате будет построена последовательность элементарных преобразований:

$$(2.5) \quad \tau = \tau_{(0)} \rightarrow \tau_{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{(t)} = \text{hd}(\mu),$$

в начале которой имеется точно s удалений блоков. Так как $\text{sum}(\text{tl}(\mu)) - \text{sum}(\text{hd}(\mu)) = 2s$, выполняется $\text{sum}(\tau) = \text{sum}(\text{hd}(\mu)) + s$.

Таким образом, будет построена кратчайшая последовательность элементарных преобразований от $\text{tl}(\mu)$ до $\text{hd}(\mu)$:

$$\begin{aligned} \text{tl}(\mu) = \eta_{(0)} \rightarrow \eta_{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \eta_{((r-1)-\mu_{r+1})} &= \\ &= \xi_{(0)} \rightarrow \xi_{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \xi_{(s)} = \\ &= \tau = \tau_{(0)} \rightarrow \tau_{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau_{(t)} = \text{hd}(\mu). \end{aligned}$$

(Поэтому $\text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) = ((r-1) - \mu_{r+1}) + s + t$ и, следовательно, $t = \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - [((r-1) - \mu_{r+1}) + s]$.)

5) Теперь в качестве искомого разбиения λ возьмём такое разбиение, что $r(\lambda) = r-1$, $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda) = \tau'$, где $\tau' = (1 + \tau_1, 1 + \tau_2, \dots, 1 + \tau_{r-1})$ и $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1}) = \tau$ (см. Рис. 22). (В силу Следствий 1 и 2 [11] разбиение λ является максимальным графическим разбиением.)

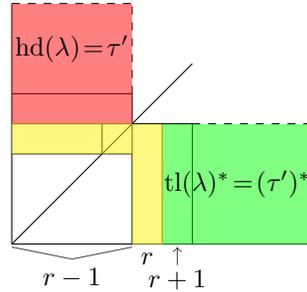


Рис. 22. Диаграмма Ферре разбиения λ

Доказательство корректности Алгоритма II. Прежде всего заметим, что $\text{sum}(\lambda) = \text{sum}(\text{hd}(\lambda)) + (r-1)(r-2) + \text{sum}(\text{hd}(\lambda)) = \text{sum}(\tau) + (r-1) + (r-1) \cdot (r-2) + \text{sum}(\tau) + (r-1) = \text{sum}(\text{hd}(\mu)) + s + (r-1)(r-1) + (r-1) + \text{sum}(\text{tl}(\mu)) - s = \text{sum}(\text{hd}(\mu)) + r(r-1) + \text{sum}(\text{tl}(\mu)) = \text{sum}(\mu)$.

Покажем, что $\lambda \geq \mu$. Для этого укажем последовательность элементарных преобразований только первого типа от λ до μ .

Предварительно, переходя в (2.4) к сопряжённым разбиениям, получим последовательность элементарных преобразований первого типа и s вставок блоков:

$$(2.6) \quad \tau^* = \xi_{(s)}^* \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{(1)}^* \rightarrow \xi_{(0)}^* = \eta_{((r-1)-\mu_{r+1})}^* \rightarrow \dots \rightarrow \eta_{(1)}^* \rightarrow \eta_{(0)}^* = \text{tl}(\mu)^*,$$

где вначале идёт s вставок блоков, а затем выполняется $((r-1) - \mu_{r+1})$ элементарных преобразований первого типа.

Для получения нужной последовательности элементарных преобразований только первого типа от λ до μ совершим сначала последовательность элементарных преобразований, преобразующих $\text{hd}(\lambda)$ (равное $\tau' = (1 + \tau_1, \dots, 1 + \tau_{r-1})$, где $(\tau_1, \dots, \tau_{r-1}) = \tau$) в $\text{hd}(\mu)$ в соответствии с (2.5). При этом вместо удаления s блоков в соответствии с (2.5) совершим перекидывания этих блоков на места, определяемые последовательными s вставками блоков в соответствии с (2.6). Затем осуществим ещё $(r-1) - \mu_{r+1}$ элементарных преобразований первого типа в соответствии со второй частью преобразований из (2.6). В результате будет получено разбиение μ .

Число всех выполненных преобразований первого типа от λ до μ будет равно

$$\begin{aligned} \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - [((r-1) - \mu_{r+1}) + s] + ((r-1) - \mu_{r+1}) &= \\ &= \text{height}(\text{tl}(\mu), \text{hd}(\mu)) - s. \end{aligned}$$

В силу Теоремы 1 [15] последнее число равно

$$\left(s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r |\text{tl}(\mu)_i - \text{hd}(\mu)_i|\right) - s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r |\text{tl}(\mu)_i - \text{hd}(\mu)_i|.$$

□

Пример 2.2. Пусть $\mu = (6, 6, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$ (см. Рис. 23). Тогда $r = r(\mu) = 4$, $\text{hd}(\mu) = (3, 3, 2, 2)$, $\text{tl}(\mu) = (8, 6)$, $\text{sum}(\text{tl}(\mu)) = 14$, $\text{sum}(\text{hd}(\mu)) = 10$, $2s = 14 - 10 = 4$ и $s = 2$. Рассмотрим покомпонентную разность разбиений $\text{tl}(\mu)$ и $\text{hd}(\mu)$:

$$\begin{array}{r} \text{tl}(\mu) = (8, \quad 6, \quad 0, \quad 0) \\ \text{hd}(\mu) = (3, \quad 3, \quad 2, \quad 2) \\ \hline \text{tl}(\mu) - \text{hd}(\mu) = (+5, \quad +3, \quad -1, \quad -2) \end{array}$$

Следовательно, $\text{tl}(\mu)$ имеет две горки и две ямки относительно $\text{hd}(\mu)$. Очевидно, $\text{tl}(\mu) \geq \text{hd}(\mu)$.

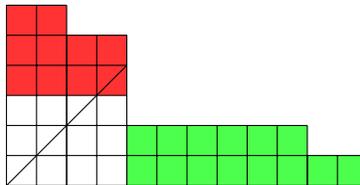


Рис. 23. Диаграмма Ферре разбиения μ

Преобразуем $\text{tl}(\mu)$ в $\text{hd}(\mu)$ способом, указанным в Алгоритме II (см. Рис. 24).

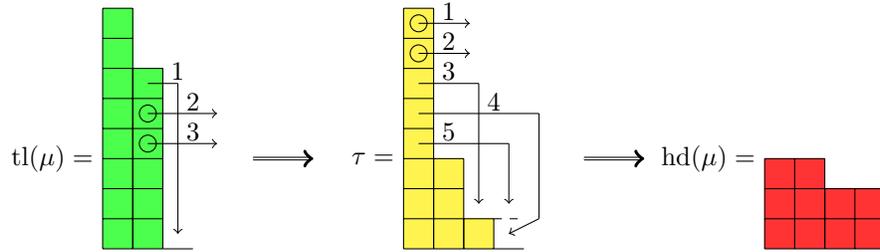


Рис. 24

Последовательность элементарных преобразований от τ до $hd(\mu)$ выполнена в соответствии с разностью

$$\begin{array}{r} \tau = (8, 3, 1, 0) \\ hd(\mu) = (3, 3, 2, 2) \\ \hline \tau - hd(\mu) = (+5, 0, -1, -2) \end{array}$$

Укажем теперь последовательность элементарных преобразований только первого типа от λ до μ (см. Рис. 25).

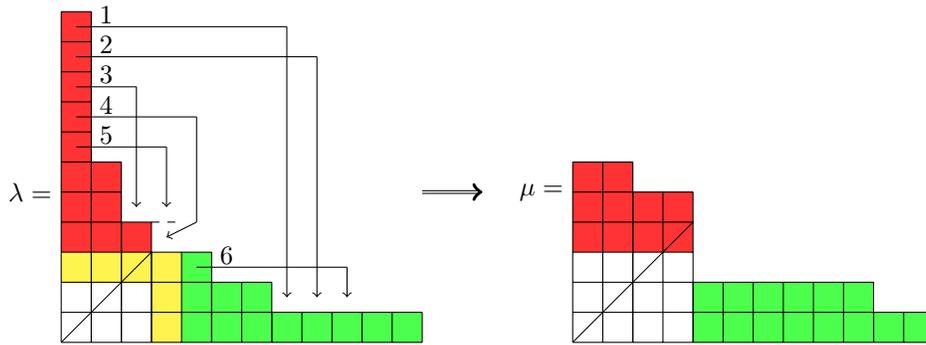


Рис. 25

Здесь $height(\lambda, \mu) = \frac{1}{2}(5 + 3 + |-2| + |-2|) = 6$. □

В заключение осталось заметить, что Леммы 3 и 4 из § 1 на основании Алгоритмов I и II обеспечивают справедливость основного результата работы — Теоремы 1, сформулированной в конце введения.

REFERENCES

- [1] M.O. Asanov, V.A. Baransky, V.V. Rasin, *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy*, Lan', SPb, 2010. (In Russian)
- [2] G.E. Andrews, *The theory of partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976. Zbl 0371.10001
- [3] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, *The lattice of partitions of a positive integer*, Dokl. Math., **77**:1 (2008), 72–75. Zbl 1170.11035
- [4] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, T.A. Senchonok, *O reshetke razbieniy natural'nogo chisla*, Tr. Inst. Mat. Mekh., **21**:3 (2015), 30–36. MR3468086

- [5] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, T.A. Senchonok, *On the partition lattice of all integers*, Sib. Electron. Mat. Izv., **13** (2016), 744–753. MR3553165
- [6] T. Brylawski, *The lattice of integer partitions*, Discrete Math., **6** (1973), 210–219. Zbl 0283.06003
- [7] V.A. Baransky, T.I. Nadyмова, T.A. Senchonok, *A new algorithm generating graphical sequences*, Sib. Electron. Mat. Izv., **13** (2016), 269–279. Zbl 1341.05029
- [8] A. Kohnert, *Dominance order and graphical partitions*, Electron. J. Comb., **11:1**, Note 4 (2004), 1–17. Zbl 1058.05005
- [9] P. Erdős, T. Gallai, *Graphs with given degree of vertices*, Math. Lapok, **11** (1960), 264–274.
- [10] N.V.R. Mahadev, U.N. Peled, *Threshold Graphs and Related Topics*, Annals of Discrete Mathematics, **56**, Elsevier Science, Amsterdam, 1995. Zbl 0852.05001
- [11] V.A. Baransky, T.A. Senchonok, *O porogovyh grafah i realizaciyah graficheskikh razbieni*, Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO PAN, **23:2** (2017), 1–10. (In Russian)
- [12] D.R. Fulkerson, A.J. Hoffman, M.H. McAndrew, *Some properties of graphs with multiple edged*, Canadian J. Math., **17** (1965), 166–177. MR0177908
- [13] O. Mel'nikov, R.I. Tyshkevich, V.A. Emelichev, V.N. Sarvanov, *Lectures on graph theory*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994. Zbl 0865.05001
- [14] G. Sierksma, H. Hoogeveen, *Seven Criteria for integer sequences being graphic*, J. Graph Theory, **15(2)** (1991), 223–231. Zbl 0752.05052
- [15] V.A. Baransky, T.A. Senchonok, *On shortest sequences of elementary transformations in the partition lattice*, Sib. Electron. Mat. Izv., **15** (2018), 844–852. Zbl 1394.05007
- [16] V.A. Baransky, T.A. Senchonok, *On maximal graphical partitions*, Sib. Electron. Mat. Izv., **14** (2017), 112–124. Zbl 1357.05050

VITALY ANATOLIEVICH BARANSKY
URAL FEDERAL UNIVERSITY,
51, LENINA AVE.,
EKATERINBURG, 620083, RUSSIA
E-mail address: vitaly.baransky@urfu.ru

TATIANA ALEXANDROVNA SENCHONOK
URAL FEDERAL UNIVERSITY,
51, LENINA AVE.,
EKATERINBURG, 620083, RUSSIA
E-mail address: tatiana.senchonok@urfu.ru