S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том ??, № ?, стр. ???–??? (2023) УДК 512.57
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 20F17

$\Omega\sigma$-РАССЛОЕННЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫХ T-ГРУПП

Е.Н. Бажанова

Представлено Е.Н. Бажановой

Abstract: We define and construct $\Omega\sigma$-foliated Fitting classes of multioperator T-groups with composition series and describe the structure of its minimal satellites.

Keywords: multioperator T-group, $\Omega\sigma$-foliated Fitting class, satellite.

1 Введение

Начиная со второй половины XX века и по настоящее время активно развивается теория классов групп. Наряду с теорией многообразий появились новые направления исследований – квазимногообразия, формации и классы Фиттинга.

Понятие формации конечных групп было введено в 1963 году В. Гашюцом [1]. В этой работе с помощью функции $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации групп}\}$ были построены локальные формации. Б. Хартли в работе [2] определил локальные классы Фиттинга с помощью функции $g : \mathbb{P} \to \{\text{классы Фиттинга групп}\}$. Дальнейшее развитие функциональный подход к изучению формаций и классов Фиттинга нашел в работе Л.А. Шеметкова [3] и в монографиях [4, 5, 6, 7]. В книге [5] систематизированы исследования по теории формаций алгебраических систем и их применениям к мультикольцам и конечным алгебрам мальцевского многообразия. В

Bazhanova, E.N., $\Omega\sigma$-foliated Fittingclasses of multioperator T-groups.

Поступила ?? октября 2023 г., опубликована ?? ???? 2023 г.

работах [8, 9, 10] А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым исследуются частично локальные (ω-локальные) и частично композиционные формации и классы Фиттинга конечных групп, где ω – непустое подмножество множества $\mathbb{P}$.

Идея построения новых видов формаций и классов Фиттинга привела к необходимости рассмотрения спутников различных направлений. В работах [11, 12, 13, 14, 15, 16] В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной были построены Ω-расслоенные и ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп, имеющие бесконечное множество попарно неэквивалентных направлений Ω-спутника (ω-спутника) f, одним из которых является направление Ω-композиционного (ω-локального) спутника. Отметим, что направление Ω-спутника (ω-спутника) f определяется как отображение класса $\mathfrak{I}$ всех конечных простых групп (множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел) во множество всех непустых формаций Фиттинга.

Дальнейший анализ понятия расслоенности формации конечных групп и групп, обладающих конечными композиционными рядами [17], показал, что понятие расслоенности формации может быть применено к построению расслоенных формаций и классов Фиттинга универсальных алгебр, обладающих условиями минимальности и максимальности для идеалов. В работах [18, 19] построены различные типы соответственно Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами.

В работе [20] А.Н. Скибой была предложена новая идея в функциональном подходе: пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ – некоторое разбиение множества простых чисел $\mathbb{P}$, такое что $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \oslash$ для всех $i \neq j$. С помощью функции $f : \sigma \to \{$формации групп$\}$ А.Н. Скибой были построены σ-локальные формации конечных групп. Идея σ-разбиений получила дальнейшее развитие в исследовании классов конечных групп (см., например, [21]).

Цель настоящей работы – построить различные классы $\Omega\sigma$-расслоенных классов Фиттинга мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами, дать описание строения их минимальных $\Omega\sigma$-спутников.

Основные результаты работы анонсированы в [22].

2 Обозначения, определения и вспомогательные утверждения

Используемые в дальнейшем обозначения, определения и результаты можно найти в работах [4, 5, 6, 11, 12, 13, 18, 23, 24, 25]. Приведем лишь некоторые из них.

Пусть дана аддитивная группа G с нулевым элементом 0. Группа G называется *мультиоператорной T-группой* с системой мультиоператоров T (или, коротко, *T-группой*), если в G задана еще некоторая система n-арных алгебраических операций T при некоторых n, удовлетворяющих условию $n > 0$, причем для всех $t \in T$ должно выполняться условие

$t(0,\dots,0)=0$, где слева элемент 0 стоит n раз, если операция t n-арна. Частными случаями мультиоператорных T-групп являются группы, модули, кольца и мультикольца.

Запись $M \lhd G$ означает, что M является идеалом T-группы G.

Доказательство следующей леммы содержится в книге [24, гл. 3].

Лемма 1. *Пусть G – T-группа, H – T-подгруппа в G, M, N – идеалы в G. Тогда*

1) $H+N$ – T-подгруппа в G, а $(H+N)/N$ – T-подгруппа T-группы G/N, причем таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми T-подгруппами T-группы G, содержащими N, и всеми T-подгруппами T-группы G/N;

2) $M+N$ – идеал в G;

3) $H\cap N \lhd H$, причем $(H+N)/N \cong H/H\cap N$;

4) если $M<N$, то $(G/M)/(N/M) \cong G/N$.

Пусть $\mathfrak{C}$ – класс всех T-групп с конечными композиционными рядами, $\mathfrak{I}$ – класс всех простых T-групп, т.е. таких ненулевых T-групп P, идеалами которых являются лишь нулевой идеал $\{0\}$ и сама T-группа P. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые T-группы принадлежат классу $\mathfrak{C}$. Класс $\mathfrak{X}$, содержащийся в классе $\mathfrak{C}$, будем называть $\mathfrak{C}$-классом. Пусть Ω – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\Omega' = \mathfrak{I}\backslash\Omega$ и $\mathfrak{K}(G)$ – класс всех простых T-групп, изоморфных композиционным факторам T-группы G. Если $\mathfrak{K}(G) \subseteq \Omega$, то G называется Ω-группой. Обозначим через $\mathfrak{C}_\Omega$ – класс всех Ω-групп, принадлежащих $\mathfrak{C}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество T-групп. Группа, принадлежащая $\mathfrak{X}$, называется $\mathfrak{X}$-группой; $(\mathfrak{X})$ обозначает класс T-групп, порожденный $\mathfrak{X}$; в частности, (G) – класс всех T-групп, изоморфных T-группе G; $\mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ – объединение классов $\mathfrak{K}(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$.

Формацией или *корадикальным классом* называется класс T-групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений [5, с. 12].

Класс T-групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга* или *радикальным классом*, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если N_1 и N_2 – идеалы в T-группе G и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1+N_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга T-групп. Сумма всех $\mathfrak{X}$-идеалов T-группы G называется *$\mathfrak{X}$-радикалом* T-группы G и обозначается через $G_\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация T-групп и G – T-группа. Пересечение всех идеалов T-группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* T-группы G и обозначается через $G^\mathfrak{F}$.

Нетрудно проверить, что класс T-групп $\mathfrak{C}_\Omega$ является формацией Фиттинга.

В дальнейшем без дополнительных ссылок будем применять, следуя [6], определения, обозначения и отмеченные ниже свойства произведений классов групп. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – $\mathfrak{C}$-классы T-групп. Тогда $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G : G$

имеет идеал $N \in \mathfrak{X}$ с $G/N \in \mathfrak{Y}$). Отметим, что если $\{0\} \in \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Пусть $\mathfrak{H}$ – $\mathfrak{C}$-класс T-групп и $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{C}$-формация. Тогда $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = (G : G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называется *формационным произведением* классов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Отметим, что если $\{0\} \in \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}$; если $S_n\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{F}$; если $\mathfrak{M}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}$ – $\mathfrak{C}$-формации, то $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}$ – $\mathfrak{C}$-формация и $(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{V}$ – $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{V} \diamond \mathfrak{X} = (G : G/G_{\mathfrak{V}} \in \mathfrak{X})$ называется *фиттинговым произведением* классов $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{X}$. Отметим, что если $\{0\} \in \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{V} \diamond \mathfrak{X}$; если $Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{V} \diamond \mathfrak{X} = \mathfrak{V}\mathfrak{X}$; если $\mathfrak{V}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ – $\mathfrak{C}$-классы Фиттинга, то $\mathfrak{V} \diamond \mathfrak{X}$ – $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга и $(\mathfrak{V} \diamond \mathfrak{X}) \diamond \mathfrak{Y} = \mathfrak{V} \diamond (\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y})$. Произведения $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{V} \diamond \mathfrak{X}$ введены В. Гашюцом в 1969 году.

Будем полагать $O^{\Omega}(G) = G^{\mathfrak{C}_\Omega}$, $O^{\Omega,\Omega'}(G) = G^{\mathfrak{C}_\Omega \mathfrak{C}_{\Omega'}}$.

В дальнейшем, как правило, без ссылок будут применяться легко проверяемые утверждения следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть G – $\mathfrak{C}$-группа, H – T-подгруппа в G и $N \lhd G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $O^{\Omega}(N) \subseteq N \cap O^{\Omega}(G)$;

2) если $G/N \in \mathfrak{C}_\Omega$, то $O^{\Omega}(G) = O^{\Omega}(N)$;

3) если $H \lhd G$ и $G = H + N$, то $O^{\Omega}(G) = O^{\Omega}(H) + O^{\Omega}(N)$.

4) если $\mathfrak{H}, \mathfrak{F}$ – $\mathfrak{C}$-формации, то $G^{\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}} = (G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{H}}$.

3 $\Omega\sigma$-расслоенные классы Фиттинга T-групп

Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ – некоторое разбиение класса всех простых мультиоператорных T-групп $\mathfrak{I}$ на непустые попарно непересекающиеся подклассы σ_i, $i \in I$, т.е. $\mathfrak{I} = \cup_{i \in I} \sigma_i$, $\sigma_i \neq \oslash$ для любого $i \in I$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \oslash$ для всех $i \neq j$. Пусть Ω – непустой класс простых мультиоператорных T-групп такой, что $\Omega \not\subseteq \sigma_i$, $\forall i \in I$. Обозначим через $\sigma(G) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \oslash\}$, $\Omega\sigma = \{\Omega \cap \sigma_i | \Omega \cap \sigma_i \neq \oslash\}$, $\Omega\sigma(G) = \{\Omega \cap \sigma_i | \Omega \cap \sigma_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \oslash\}$, $\Omega\sigma(\mathfrak{F}) = \{\Omega\sigma(G) | G \in \mathfrak{F}\}$ для любого класса T-групп $\mathfrak{F}$.

Следуя работам [19, 20, 21], приведем следующие определения и обозначения. Все рассматриваемые функции принимают одинаковые значения на изоморфных T-группах из их области определения.

Функция f: $\Omega\sigma \cup \{\Omega'\} \to$ {классы Фиттинга T-групп}, где $f(\Omega') \neq \oslash$, называется *$\Omega\sigma R$-функцией*; функция $\varphi : \Omega\sigma \cup \{\Omega'\} \to$ {непустые формации Фиттинга T-групп} называется *$\Omega\sigma FR$-функцией*; функция g: $\sigma \to$ {классы Фиттинга T-групп} называется *σR-функцией*; функция $\psi : \sigma \to$ {непустые формации Фиттинга T-групп} называется *σFR-функцией*.

Через φ_0 обозначим такую $\Omega\sigma FR$-функцию, что $\varphi_0(\Omega') = \mathfrak{C}_\Omega$ и $\varphi_0(\Omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{C}_{(\Omega \cap \sigma_i)'}$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$. Через ψ_0 обозначим такую σFR-функцию, что $\psi_0(\sigma_i) = \mathfrak{C}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.

На множестве всех $\Omega\sigma R$-функций и $\Omega\sigma FR$-функций (σR-функций и σFR-функций) введем отношение частичного порядка $\leq$. Для любых таких функций μ_1 и μ_2 полагаем $\mu_1 \leq \mu_2$, если $\mu_1(\Omega') \subseteq \mu_2(\Omega')$ и $\mu_1(\Omega \cap$

$\sigma_i) \subseteq \mu_2(\Omega \cap \sigma_i)$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$ ($\mu_1(\sigma_i) \subseteq \mu_2(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma$).

Теорема 1. *Пусть f – $\Omega\sigma R$-функция, φ – $\Omega\sigma FR$-функция, $\varphi_0 \leq \varphi$, и $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G))$. Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$. Покажем, что $N \in \mathfrak{F}$. Так как по лемме 2 п. 1) $O^{\Omega}(N) \subseteq O^{\Omega}(G)$, $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и класс $f(\Omega')$ является классом Фиттинга, то $O^{\Omega}(N) \in f(\Omega')$.

Пусть $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(N)$. Тогда $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G)$ и по условию $S = G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega\cap\sigma_i)$. Из $(N+S)/S \lhd G/S \in \varphi(\Omega\cap\sigma_i)$ и того, что $\varphi(\Omega\cap\sigma_i)$ является классом Фиттинга следует, что $N/N \cap S \in \varphi(\Omega \cap \sigma_i)$. Поэтому $P = N^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \subseteq N \cap S$. Так как $P \lhd S$ и класс $f(\Omega\cap\sigma_i)$ является классом Фиттинга, то $P \in f(\Omega \cap \sigma_i)$, и значит, $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G = H + K$, $H \lhd G$, $K \lhd G$, H и K принадлежат $\mathfrak{F}$. Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Так как по лемме 2 п. 3) $O^{\Omega}(G) = O^{\Omega}(H) + O^{\Omega}(K)$, $O^{\Omega}(H)$ и $O^{\Omega}(K)$ принадлежат классу Фиттинга $f(\Omega')$, то $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$.

Пусть $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G)$. Тогда $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(H)$ или $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(K)$. Отсюда $X = H^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ или $Y = K^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$.

Пусть $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(H)$ и $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(K)$. Тогда $X \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ и $Y \in f(\Omega\cap\sigma_i)$. Так как $f(\Omega\cap\sigma_i)$ – класс Фиттинга, то $D = X+Y \in f(\Omega\cap\sigma_i)$, причем $D \lhd G$. Из $G = H + K$ следует, что $G/D = (H + D)/D + (K + D)/D$. По модулярному тождеству Дедекинда $(H + D)/D \cong H/H \cap D = H/(X + (H \cap Y))$. Поскольку $H/X \in \varphi(\Omega \cap \sigma_i)$ и $\varphi(\Omega \cap \sigma_i)$ – формация, то $H/(X + (H \cap Y)) \cong (H/X)/((X + (H \cap Y))/X) \in \varphi(\Omega \cap \sigma_i)$, и значит, $(H + D)/D \in \varphi(\Omega \cap \sigma_i)$. Аналогично можно показать, что $(K + D)/D \in \varphi(\Omega \cap \sigma_i)$. Так как $\varphi(\Omega \cap \sigma_i)$ – класс Фиттинга, то $G/D = (H + D)/D + (K + D)/D \in \varphi(\Omega \cap \sigma_i)$. Следовательно, $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \subseteq D$. Из $D \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ получим, что $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$, и значит, $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(H)$ и $\Omega \cap \sigma_i \notin \Omega\sigma(K)$ (случай $\Omega \cap \sigma_i \notin \Omega\sigma(H)$ и $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(K)$ рассматривается аналогично). Тогда $X \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ и K является $(\Omega \cap \sigma_i)'$-группой. Отсюда из $\varphi_0 \leq \varphi$ следует $K \in \mathfrak{C}_{(\Omega\cap\sigma_i)'} = \varphi_0(\Omega\cap\sigma_i) \subseteq \varphi(\Omega\cap\sigma_i)$. Так как $G = H + K$, то $G/X = (H + X)/X + (K + X)/X = H/X + (K + X)/X$. Поскольку $\varphi(\Omega\cap\sigma_i)$ – формация Фиттинга, то $(K + X)/X \cong K/K \cap X \in \varphi(\Omega \cap \sigma_i)$ и $G/X \in \varphi(\Omega \cap \sigma_i)$. Поэтому $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \subseteq X$. Так как $X \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ и $f(\Omega \cap \sigma_i)$ – класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга. □

В случае $\Omega = \mathfrak{I}$ имеем

Следствие 1. *Пусть g – σR-функция, ψ – σFR-функция, $\psi_0 \leq \psi$, и $\mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi) = (G \in \mathfrak{C} : G^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$. Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.*

Определение 1. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем $\Omega\sigma$-расслоенным, если $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f, \varphi)$, где f и φ – некоторые $\Omega\sigma R$-функция и $\Omega\sigma FR$-функция* *соответственно. Функцию f будем называть $\Omega\sigma$-спутником, а функцию φ – $\Omega\sigma$-направлением $\Omega\sigma$-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.*

Пусть g – σR-функция, ψ – σFR-функция. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma R(g,\psi)$ назовем σ-расслоенным, g будем называть σ-спутником, ψ – σ-направлением σ-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Замечание 1. Если $\sigma = \{(A)|A \in \mathfrak{I}\}$, то $\Omega\sigma$-расслоенный класс Фиттинга T-групп превращается в Ω-расслоенный, определенный в работе [19].

Напомним, что T-группа G называется *комонолитической*, если в G имеется такой идеал M (комонолит T-группы G), что G/M – простая T-группа и $N \subseteq M$ для любого собственного идеала N T-группы G.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ – непустой $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга и $\Omega\sigma(\mathfrak{M}) = \oslash$. Тогда $\mathfrak{M} = \Omega\sigma R(m,\varphi)$, где m – $\Omega\sigma R$-функция такая, что $m(\Omega') = \mathfrak{M}$, $m(\Omega\cap\sigma_i) = \oslash$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma$ и φ – $\Omega\sigma FR$-функция, $\varphi_0 \le \varphi$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \Omega\sigma R(m,\varphi)$, где m и φ – из заключения леммы. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$.

Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда $\Omega\sigma(G) = \oslash$ и, значит, G – Ω'-группа. Поэтому $O^{\Omega}(G) = G \in \mathfrak{M} = m(\Omega')$ и из $\Omega\sigma(G) = \oslash$ следует, что $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in m(\Omega\cap\sigma_i)$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(G)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{M}_1$, и значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Предположим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$ и H – T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{M}_1\backslash\mathfrak{M}$. Тогда $O^{\Omega}(H) \in m(\Omega') = \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \neq \oslash$ и $H \neq \{0\}$. Пусть M_1 и M_2 – собственные идеалы T-группы H такие, что $H = M_1 + M_2$. Так как $M_i \in \mathfrak{M}_1$, то, в силу выбора H, получим, что $M_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1,2$, и значит, $H \in \mathfrak{M}$; противоречие. Следовательно, H – комонолитическая T-группа с комонолитом $M = H_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$. Поэтому $O^{\Omega}(H) \subseteq M$ и $H/M \cong H/O^{\Omega}(H)/M/O^{\Omega}(H) \in \mathfrak{C}_{\Omega}$. Пусть $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(H/M)$. Тогда $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(H)$. Так как $H \in \mathfrak{M}_1$, то $H^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in m(\Omega\cap\sigma_i) = \oslash$; противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$. □

Следствие 2. *(1) $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга (0) T-групп является $\Omega\sigma$-расслоенным для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$ и любого разбиения σ.*

(2) $\mathfrak{C} = \Omega\sigma R(f,\varphi)$, где f – $\Omega\sigma R$-функция такая, что $f(\Omega') = \mathfrak{C}$ и $f(\Omega\cap\sigma_i) = \mathfrak{C}$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma$, φ – $\Omega\sigma FR$-функция, $\varphi_0 \le \varphi$.

(3) $\mathfrak{C}_{\Omega} = \Omega\sigma R(f,\varphi)$, где f – $\Omega\sigma R$-функция такая, что $f(\Omega') = (0)$ и $f(\Omega\cap\sigma_i) = \mathfrak{C}_{\Omega}$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma$, φ – $\Omega\sigma FR$-функция, $\varphi_0 \le \varphi$.

(4) $\mathfrak{C}_{\Omega'}$ является $\Omega\sigma$-расслоенным классом Фиттинга для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$ и любого разбиения σ.

Доказательство. (1) Пусть $\mathfrak{M} = (0)$. Так как $\Omega\sigma(\mathfrak{M}) = \oslash$, то по лемме 3 $(0) = \Omega\sigma R(m,\varphi)$, где $m(\Omega') = (0)$ и $m(\Omega\cap\sigma_i) = \oslash$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma$, $\varphi_0 \le \varphi$.

(2) Пусть $\mathfrak{M}_1 = \Omega\sigma R(f,\varphi)$, где f и φ – функции из заключения утверждения (2). Покажем, что $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{C}$. Так как $O^{\Omega}(G) \lhd G$, $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \lhd G$ и $\mathfrak{C}$ – класс Фиттинга, то $O^{\Omega}(G) \in \mathfrak{C} = f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in$

$\mathfrak{C} = f(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{M}_1$ и, значит, $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{M}_1$. С другой стороны, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{C}$. Таким образом, $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_1$.

(3) Пусть $\mathfrak{M}_1 = \Omega\sigma R(f, \varphi)$, где f и φ – функции из заключения утверждения (3). Покажем, что $\mathfrak{C}_\Omega = \mathfrak{M}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{C}_\Omega$. Тогда $O^\Omega(G) = \{0\} \in (0) = f(\Omega')$. Так как $\mathfrak{C}_\Omega$ – класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in \mathfrak{C}_\Omega = f(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{M}_1$ и, значит, $\mathfrak{C}_\Omega \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Пусть $G \in \mathfrak{M}_1$. Тогда $O^\Omega(G) \in f(\Omega') = (0)$. Поэтому $G \in \mathfrak{C}_\Omega$ и $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{C}_\Omega$.

Таким образом, $\mathfrak{C}_\Omega = \mathfrak{M}_1$.

(4) Так как $\Omega\sigma(\mathfrak{C}_{\Omega'}) = \oslash$, то по лемме 3 $\mathfrak{C}_{\Omega'} = \Omega\sigma R(m, \varphi)$, где $m(\Omega') = \mathfrak{C}_{\Omega'}$ и $m(\Omega \cap \sigma_i) = \oslash$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$, $\varphi_0 \leq \varphi$. □

Определение 2. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f, \varphi_0)$ называется $\Omega\sigma$-свободным или, коротко, $\Omega\sigma Fr$-классом Фиттинга, и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega\sigma FrR(f) = (G \in \mathfrak{C} : O^\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(G) \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G))$, а f называется $\Omega\sigma Fr$-спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.*

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi_0)$ называется σ-свободным или, коротко, σFr-классом Фиттинга, и обозначается $\mathfrak{F} = \sigma FrR(g) = (G \in \mathfrak{C} : O^{\sigma_i{}'}(G) \in g(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, а g называется σFr-спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{C}$-класс. Пересечение всех $\mathfrak{C}$-классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$, называется *$\mathfrak{C}$-классом Фиттинга, порожденным классом* $\mathfrak{X}$, и обозначается через $fit(\mathfrak{X})$.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой ненулевой $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга и $\Omega\sigma = \Omega\sigma(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\Omega\sigma$-свободным $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть f – такая $\Omega\sigma R$-функция, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(\Omega \cap \sigma_i) = fit(O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(G) : G \in \mathfrak{F})$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$, и $\mathfrak{F}_1 = \Omega\sigma FrR(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Так как $O^\Omega(H) \lhd H$ и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то $O^\Omega(H) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Далее, из $H \in \mathfrak{F}$ следует $O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(H) \in (O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(G) : G \in \mathfrak{F})$, и значит, $O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(H) \in fit(O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(G) : G \in \mathfrak{F}) = f(\Omega \cap \sigma_i)$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(H)$. Следовательно, $H \in \Omega\sigma FrR(f) = \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и K – T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_1 \backslash \mathfrak{F}$. Как и при доказательстве леммы 3, нетрудно проверить, что K – комонолитическая T-группа с комонолитом $M = K_{\mathfrak{F}}$. Так как $K \in \mathfrak{F}_1$, то $O^\Omega(K) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Поэтому $O^\Omega(K) \subseteq M$, и значит, $K/M \in \mathfrak{C}_\Omega$. Пусть $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(K/M) \subseteq \Omega\sigma(K)$. Из $K \in \mathfrak{F}_1$ по определению $\Omega\sigma FrR(f)$ получим, что $O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(K) \in f(\Omega \cap \sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Из комонолитичности T-группы K следует, что $O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(K) \subseteq M$ и $K/M \cong K/O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(K)/M/O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(K) \in \mathfrak{C}_{(\Omega\cap\sigma_i)'}$; противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. □

Замечание 2. Из лемм 3 и 4 следует, что каждый непустой $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга является $\Omega\sigma$-свободным для некоторого непустого класса простых T-групп Ω и любого разбиения σ.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f,\varphi)$, $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(g,\varphi)$, где $g(\Omega') = f(\Omega') \cap \mathfrak{F}$ и $g(\Omega \cap \sigma_i) = f(\Omega \cap \sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$;

2) $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(h,\varphi)$, где $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(\Omega \cap \sigma_i) = f(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$;

3) если $\Omega\sigma = \Omega\sigma(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{C} : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma)$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega\sigma R(g,\varphi)$, где g – $\Omega\sigma R$-функция из пункта 1) леммы. Так как $g(\Omega') \subseteq f(\Omega')$ и $g(\Omega \cap \sigma_i) \subseteq f(\Omega \cap \sigma_i)$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G)$. Поскольку класс $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга, то $\{O^{\Omega}(G), G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)}\} \subseteq \mathfrak{F}$ и значит, $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \cap \mathfrak{F} = g(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i) \cap \mathfrak{F} = g(\Omega \cap \sigma_i)$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

2) Пусть h – $\Omega\sigma R$-функция, описанная в пункте 2) леммы, и $\mathfrak{H} = \Omega\sigma R(h,\varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G)$ имеем $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i) = h(\Omega \cap \sigma_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и B – T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{H}\backslash\mathfrak{F}$. Тогда T-группа B является комонолитической с комонолитом $M = B_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $B \in \mathfrak{H}$, то $O^{\Omega}(B) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, и значит, $O^{\Omega}(B) \subseteq M$. Тогда $B/M \cong B/O^{\Omega}(B)/M/O^{\Omega}(B) \in \mathfrak{C}_{\Omega}$ и по лемме 2 п. 2) $O^{\Omega}(B) = O^{\Omega}(M)$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega}(M) \in f(\Omega')$, и значит, $O^{\Omega}(B) \in f(\Omega')$. Далее, $B \in \mathfrak{H}$ влечет $B^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in h(\Omega \cap \sigma_i) = f(\Omega \cap \sigma_i)$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(B)$. Таким образом, $B \in \mathfrak{F}$; противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

3) Пусть $\mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{C} : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Если $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G)$, то $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ по определению класса $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f,\varphi)$. Пусть $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma\backslash\Omega\sigma(G) = \Omega\sigma(\mathfrak{F})\backslash\Omega\sigma(G)$. Так как $\Omega \cap \sigma_i \subseteq \Omega\sigma(\mathfrak{F})$, то найдется такая T-группа $L \in \mathfrak{F}$, что $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(L)$. Отсюда получаем, что $L^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega\cap\sigma_i)$, и значит, $f(\Omega\cap\sigma_i) \neq \oslash$. Поскольку $\Omega \cap \sigma_i \notin \Omega\sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{C}_{(\Omega\cap\sigma_i)'} = \varphi_0(\Omega \cap \sigma_i) \subseteq \varphi(\Omega \cap \sigma_i)$ и поэтому $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} = \{0\} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$. Таким образом, $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Включение $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно.

Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$. □

Определение 3. *$\Omega\sigma$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f,\varphi)$ называется внутренним, если $f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}$ и $f(\Omega\cap\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma$.*

Замечание 3. Из леммы 5 следует, что каждый $\Omega\sigma$-расслоенный класс Фиттинга обладает внутренним $\Omega\sigma$-спутником.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – $\Omega\sigma$-расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с $\Omega\sigma$-спутником f и $\Omega\sigma$-направлением φ, $\varphi_0 \leq \varphi$, и $\Omega\sigma = \Omega\sigma(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является σ-расслоенным $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга с σ-спутником g и σ-направлением ψ для любого разбиения σ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f,\varphi) = (G \in \mathfrak{C} : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega\cap\sigma_i)$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(G))$. В ввиду леммы 5 можно считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$.

Рассмотрим σR-функцию g такую, что $g(\sigma_i) = f(\Omega\cap\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Delta = \{\sigma_j | \Omega\cap\sigma_j \in \Omega\sigma\}$ и $g(\sigma_i) = \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \mathfrak{I}\backslash(\cup\sigma_j|\sigma_j \in \Delta)$; и σFR-функцию ψ такую, что $\psi(\sigma_i) = \varphi(\Omega\cap\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Delta$ и $\psi(\sigma_i) = \mathfrak{C}_{\Omega}$ для всех $\sigma_i \in \mathfrak{I}\backslash(\cup\sigma_j|\sigma_j \in \Delta)$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma R(g,\psi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $\sigma_i \in \sigma(G)$. Допустим, $\sigma_i \in \Delta$. Если $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(G)$, то $G^{\psi(\sigma_i)} = G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega\cap\sigma_i) = g(\sigma_i)$. Если $\Omega\cap\sigma_i \notin \Omega\sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{C}_{(\Omega\cap\sigma_i)'} = \varphi_0(\Omega\cap\sigma_i) \subseteq \varphi(\Omega\cap\sigma_i)$. Из $\Omega\sigma = \Omega\sigma(\mathfrak{F})$ как и в лемме 5 следует $f(\Omega\cap\sigma_i) \neq \oslash$. Поэтому $G^{\psi(\sigma_i)} = G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} = \{0\} \in f(\Omega\cap\sigma_i) = g(\sigma_i)$. Пусть $\sigma_i \in \mathfrak{I}\backslash(\cup\sigma_j|\sigma_j \in \Delta)$, тогда $G^{\psi(\sigma_i)} = O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') = \mathfrak{F} = g(\sigma_i)$. Следовательно, $G \in \sigma R(g,\psi) = \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\sigma_i \in \sigma(G)$. Для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(G) \subseteq \Omega\sigma$ имеем $\sigma_i \in \Delta$. Поэтому $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} = G^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i) = f(\Omega\cap\sigma_i)$. Пусть $\sigma_i \in \mathfrak{I}\backslash(\cup\sigma_j|\sigma_j \in \Delta)$. Тогда $G/G^{\psi(\sigma_i)} \in \psi(\sigma_i) = \mathfrak{C}_{\Omega}$ и $O^{\Omega}(G) \subseteq G^{\psi(\sigma_i)}$. С другой стороны, $G/O^{\Omega}(G) \in \mathfrak{C}_{\Omega} = \psi(\sigma_i)$ и $G^{\psi(\sigma_i)} \subseteq O^{\Omega}(G)$. Поэтому $O^{\Omega}(G) = G^{\psi(\sigma_i)}$ и $O^{\Omega}(G) = G^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i) = \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Следовательно, $G \in \Omega\sigma R(f,\varphi) = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. $\square$

Определение 4. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f,\varphi)$ называется $\Omega\sigma$-каноническим или, коротко, $\Omega\sigma K$-классом Фиттинга, если $\varphi(\Omega') = \mathfrak{C}_{\Omega}$ и $\varphi(\Omega\cap\sigma_i) = \mathfrak{C}_{\Omega\cap\sigma_i}\mathfrak{C}_{(\Omega\cap\sigma_i)'}$ для любого $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma$, и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega\sigma KR(f) = (G \in \mathfrak{C} : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $O^{\Omega\cap\sigma_i,(\Omega\cap\sigma_i)'}(G) \in f(\Omega\cap\sigma_i)$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(G))$, $\Omega\sigma R$-функцию f назовем $\Omega\sigma K$-спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Обозначим $\Omega\sigma$-направление $\Omega\sigma K$-классом Фиттинга $\mathfrak{F}$ через φ_1.*

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma R(g,\psi)$ называется σ-каноническим или, коротко, σK-классом Фиттинга, если $\psi(\sigma_i) = \mathfrak{C}_{\sigma_i}\mathfrak{C}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$, и обозначается $\mathfrak{F} = \sigma KR(g) = (G \in \mathfrak{C} : O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) \in g(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, σR-функцию g назовем σK-спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Обозначим σ-направление σK-классом Фиттинга $\mathfrak{F}$ через ψ_1.

Так как $\varphi_0 \leq \varphi_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi_1$, то соответственно получаем следующие следствия.

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – $\Omega\sigma$-свободный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с $\Omega\sigma Fr$-спутником f и $\Omega\sigma = \Omega\sigma(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является σ-свободным $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга с σFR-спутником g для любого разбиения σ.*

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – $\Omega\sigma$-канонический $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с $\Omega\sigma K$-спутником f и $\Omega\sigma = \Omega\sigma(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является σ-каноническим $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга с σK-спутником g для любого разбиения σ.*

Определение 5. *σ-направление ψ σ-расслоенного класса Фиттинга назовем правильным, если $\psi(\sigma_i) = \psi(\sigma_i)\mathfrak{C}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с σ-спутником g и правильным σ-направлением ψ. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\Omega\sigma$-расслоенным $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга с $\Omega\sigma$-спутником f и $\Omega\sigma$-направлением φ для любого непустого множества $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$ и любого разбиения σ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi)$ – σ-расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с правильным σ-направлением ψ. Рассмотрим $\Omega\sigma R$-функцию f такую, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(\Omega \cap \sigma_i) = g(\sigma_i)$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$; $\Omega\sigma FR$-функцию φ такую, что $\varphi(\Omega') = \mathfrak{C}_\Omega$, $\varphi(\Omega \cap \sigma_i) = \psi(\sigma_i)$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega\sigma R(f, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G) \subseteq \Omega\sigma$ имеем $\sigma_i \in \sigma(G)$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} = G^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i) = f(\Omega \cap \sigma_i)$. По определению класса $\mathfrak{H}$ получим, что $G \in \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и H – T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{H} \backslash \mathfrak{F}$. Тогда H – комонолитическая T-группа с комонолитом $M = H_\mathfrak{F}$. Так как $O^\Omega(H) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $O^\Omega(H) \subseteq M$ и $H/M \cong H/O^\Omega(H)/M/O^\Omega(H) \in \mathfrak{C}_\Omega$. Тогда для всех $\sigma_i \in \sigma(H/M)$ имеем $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(H/M) \subseteq \Omega\sigma(H) \subseteq \Omega\sigma$. Так как $H \in \mathfrak{H}$, то $H^{\psi(\sigma_i)} = H^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i) = g(\sigma_i)$. Пусть $\sigma_i \in \sigma(H) \backslash \sigma(H/M)$. Тогда $H/M \in \mathfrak{C}_{\sigma_i'}$. Отсюда из $M/M^{\psi(\sigma_i)} \in \psi(\sigma_i)$ и $H/M \cong H/M^{\psi(\sigma_i)}/M/M^{\psi(\sigma_i)}$ следует $H/M^{\psi(\sigma_i)} \in \psi(\sigma_i)\mathfrak{C}_{\sigma_i'} = \psi(\sigma_i)$. Таким образом, $H/M^{\psi(\sigma_i)} \in \psi(\sigma_i)$ и $H^{\psi(\sigma_i)} \subseteq M^{\psi(\sigma_i)}$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $M^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i)$ и, значит, $H^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i)$. Таким образом, $H^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. □

Так как направления ψ_0 σFr-класса Фиттинга и ψ_1 σK-класса Фиттинга являются правильными, то получаем следующие следствия.

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-свободный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с σ-спутником g. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\Omega\sigma$-свободным $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга с $\Omega\sigma$-спутником f для любого непустого множества $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$ и любого разбиения σ.*

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-канонический $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга с σ-спутником g. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\Omega\sigma$-каноническим $\mathfrak{C}$-классом Фиттинга с $\Omega\sigma$-спутником f для любого непустого множества $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$ и любого разбиения σ.*

4 Минимальные спутники $\Omega\sigma$-расслоенных классов Фиттинга T-групп

Так как всякое непустое множество $\Omega\sigma R$-функций (σR-функций) является частично упорядоченным с отношением $\leq$, то имеет смысл говорить о его минимальном элементе.

Пусть $\{f_j | j \in I\}$ – произвольный набор $\Omega\sigma R$-функций. Обозначим через $\cap_{j\in J} f_j$ такую $\Omega\sigma R$-функцию f, что $f(\Omega') = \cap_{j\in J} f_j(\Omega')$ и $f(\Omega\cap\sigma_i) = \cap_{j\in J} f_j(\Omega\cap\sigma_i)$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma$.

Лемма 6. *Пусть φ – произвольная $\Omega\sigma FR$-функция, $\mathfrak{F} = \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, где $\mathfrak{F}_j = \Omega\sigma R(f_j, \varphi)$, $j \in J$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f, \varphi)$, где $f = \cap_{j\in J} f_j$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega\sigma R(f, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$, тогда $G \in \mathfrak{F}_j$ для любого $j \in J$. Значит, $O^{\Omega}(G) \in f_j(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f_j(\Omega\cap\sigma_i)$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(G)$ и $j \in J$. Поэтому $O^{\Omega}(G) \in \cap_{j\in J} f_j(\Omega') = f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in \cap_{j\in J} f_j(\Omega\cap\sigma_i) = f(\Omega\cap\sigma_i)$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $B \in \mathfrak{H}$. Тогда $O^{\Omega}(B) \in f(\Omega') = \cap_{j\in J} f_j(\Omega')$ и $B^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega\cap\sigma_i) = \cap_{j\in J} f_j(\Omega\cap\sigma_i)$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(B)$. Отсюда следует, что $O^{\Omega}(B) \in f_j(\Omega')$ и $B^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f_j(\Omega\cap\sigma_i)$ для всех $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(B)$ и $j \in J$. Поэтому $B \in \mathfrak{F}_j$, $j \in J$, и значит, $B \in \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. □

Нетрудно проверить, что и для σ-расслоенных $\mathfrak{C}$-классов Фиттинга справедливо утверждение, аналогичное лемме 6.

Определение 6. *Пусть $\{f_j | j \in I\}$ – множество всех $\Omega\sigma$-спутников $\Omega\sigma$-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. $\Omega\sigma$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется минимальным $\Omega\sigma$-спутником, если f является минимальным элементом множества $\{f_j | j \in I\}$.*

Аналогично определяется минимальный σ-спутник σ-расслоенного $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга.

Обозначим через $\Omega\sigma R(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех $\Omega\sigma$-расслоенных $\mathfrak{C}$-классов Фиттинга с $\Omega\sigma$-направлением φ, содержащих множество $\mathfrak{C}$-групп $\mathfrak{X}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп. Тогда $\Omega\sigma$-расслоенный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным $\Omega\sigma$-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = fit(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}),$$
$$f(\Omega\cap\sigma_i) = fit(G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} : G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех } \Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(\mathfrak{X})$$
$$\text{и } f(\Omega\cap\sigma_i) = \varnothing, \text{ если } \Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma \backslash \Omega\sigma(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. Согласно следствию 2 множество $\mathfrak{C}$ является $\Omega\sigma$-расслоенным классом Фиттинга с $\Omega\sigma$-направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$. Кроме того, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{C}$ и, значит, $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует, и множество $\mathfrak{L}$ всех $\Omega\sigma$-спутников $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ непусто.

Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из $\mathfrak{L}$. По лемме 6 $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f_1, \varphi)$. Так как $f_1 \leq f_i$ для любого $f_i \in \mathfrak{L}$, то f_1 – единственный минимальный $\Omega\sigma$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть f – $\Omega\sigma R$-функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $f = f_1$.

Пусть $M \in \mathfrak{X}$, тогда $O^{\Omega}(M) \in f(\Omega')$ и из $\Omega\sigma(M) \subseteq \Omega\sigma(\mathfrak{X})$ следует, что $M^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(M)$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega\sigma R(f, \varphi)$. Тогда $M \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $G \in \mathfrak{X}$, то из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f_1, \varphi)$ и, значит, $O^{\Omega}(G) \in f_1(\Omega')$. Так как $f_1(\Omega')$ – класс Фиттинга, то $f(\Omega') = fit(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\Omega')$. Пусть $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая T-группа $H \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, что $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(H)$. Из равенства $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f_1, \varphi)$, следует, что $H^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f_1(\Omega \cap \sigma_i)$. Поэтому $f_1(\Omega \cap \sigma_i) \neq \oslash$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $\Omega\cap\sigma_i \in \Omega\sigma(G)$, то из $G \in \mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f_1, \varphi)$ получаем $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f_1(\Omega \cap \sigma_i)$. Пусть теперь $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(\mathfrak{X}) \setminus \Omega\sigma(G)$. Тогда $G \in \mathfrak{C}_{\Omega\cap\sigma_i'} = \varphi_0(\Omega \cap \sigma_i) \subseteq \varphi(\Omega \cap \sigma_i)$ и, значит, $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} = \{0\} \in f_1(\Omega \cap \sigma_i)$. Так как $f_1(\Omega \cap \sigma_i)$ – класс Фиттинга, то $f(\Omega \cap \sigma_i) = fit(G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} : G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\Omega \cap \sigma_i)$. Если $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma \setminus \Omega\sigma(\mathfrak{X})$, то $f(\Omega \cap \sigma_i) = \oslash \subseteq f_1(\Omega \cap \sigma_i)$. Следовательно, $f \leq f_1$.

Пусть $S \in \mathfrak{H}$. Тогда $O^{\Omega}(S) \in f(\Omega') \subseteq f_1(\Omega')$ и $S^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f(\Omega \cap \sigma_i) \subseteq f_1(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(S)$. Значит, $S \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Поэтому, $\mathfrak{F} = \Omega\sigma R(f, \varphi)$, и значит, $f \in \mathfrak{L}$. Так как f_1 – единственный минимальный элемент в $\mathfrak{L}$, то из $f \leq f_1$ следует $f = f_1$. □

Следствие 7. *Пусть f_i – минимальный $\Omega\sigma$-спутник $\Omega\sigma$-расслоенного $\mathfrak{C}$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ с $\Omega\sigma$-направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Покажем, что $f_1 \leq f_2$. Так как $\mathfrak{F}_1 = \Omega\sigma R(\mathfrak{F}_1, \varphi)$ и $\mathfrak{F}_2 = \Omega\sigma R(\mathfrak{F}_2, \varphi)$, то по теореме 4

$$f_1(\Omega') = fit(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{F}_1) \subseteq fit(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{F}_2) = f_2(\Omega'),$$

$$f_1(\Omega \cap \sigma_i) = fit(G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} : G \in \mathfrak{F}_1) \subseteq fit(G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} : G \in \mathfrak{F}_2) = f_2(\Omega \cap \sigma_i)$$

$$\text{для всех } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(\mathfrak{F}_1) \subseteq \Omega\sigma(\mathfrak{F}_2)$$

$$\text{и } f_1(\Omega \cap \sigma_i) = \oslash \subseteq f_2(\Omega \cap \sigma_i), \text{ если } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma\setminus\Omega\sigma(\mathfrak{F}_1).$$

Следовательно, $f_1 \leq f_2$.

Достаточность. Пусть $f_1 \leq f_2$. Тогда $f_1(\Omega') \subseteq f_2(\Omega')$ и $f_1(\Omega \cap \sigma_i) \subseteq f_2(\Omega \cap \sigma_i)$ для любого $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1 = \Omega\sigma R(f_1, \varphi)$, тогда $O^{\Omega}(G) \in f_1(\Omega') \subseteq f_2(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\sigma_i)} \in f_1(\Omega \cap \sigma_i) \subseteq f_2(\Omega \cap \sigma_i)$ для всех $\Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(G)$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_2 = \Omega\sigma R(f_2, \varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. □

Следствие 8. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп. Тогда $\Omega\sigma$-свободный $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma FrR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным $\Omega\sigma Fr$-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = fit(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega \cap \sigma_i) = fit(O^{(\Omega\cap\sigma_i)'}(G) : G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(\mathfrak{X})$$
$$\text{и } f(\Omega \cap \sigma_i) = \oslash, \text{ если } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma \backslash \Omega\sigma(\mathfrak{X}).$$

Следствие 9. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп. Тогда $\Omega\sigma$-канонический $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\sigma KR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным $\Omega\sigma K$-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = fit(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}),$$
$$f(\Omega \cap \sigma_i) = fit(O^{\Omega\cap\sigma_i,(\Omega\cap\sigma_i)'}(G) : G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma(\mathfrak{X})$$
$$\text{и } f(\Omega \cap \sigma_i) = \oslash, \text{ если } \Omega \cap \sigma_i \in \Omega\sigma \backslash \Omega\sigma(\mathfrak{X}).$$

References

[1] W. Gaschütz, *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen*, Mathematische Zeitschrift, **80**:4 (1962), 300–305.

[2] B. Hartley, *On Fischer's dualization of formation theory*, Proceedings of the London Mathematical Society, **3**:19 (1969), 193–207.

[3] L.A. Shemetkov, *Graduated formations of groups*, Mathematics of the USSR-Sbornik, **23**:4 (1974), 593–611.

[4] L.A. Shemetkov, *Formations of Finite Groups*, Nauka, Moscow, 1978.

[5] L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, *Formations of Algebraic Systems*, Nauka, Moscow, 1989.

[6] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin and New Jork, 1992.

[7] A. N. Skiba, *Algebra of Formations*, Belarusskaya Nauka, Minsk, 1997.

[8] A. N. Skiba, L. A. Shemetkov, *On the minimal composition screen of a composition formation*, in: Voprosy Algebry, **7**, Gomel University, Gomel (1992), 39–43.

[9] A. N. Skiba, L. A. Shemetkov, *Partially composition formations of finite groups*, Doclady of the national academy of science of Belarus, **43**:4, (1999), 5–8.

[10] A.N. Skiba, L.A. Shemetkov, *Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups*, Siberian Advances in Mathematics, **10**:2 (2000), 112–141.

[11] V. A. Vedernikov, M. M. Sorokina, *Ω-Foliated formations and Fitting classes of finite groups*, Discrete Mathematics and Applications, **11**:5 (2001), 507–527.

[12] M. M. Sorokina, *On minimal satellites of multiply Ω-foliated Fitting classes and formations of finite groups*, in: Proc. 70th Ann. Bryansk State Pedagogical Univ., Bryansk State Pedagogical University, Bryansk (2000), 199–203.

[13] V. A. Vedernikov, *Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **2** (2001), 217–233.

[14] V. A. Vedernikov, M. M. Sorokina, *ω-Fibered formations and Fitting classes of finite groups*, Mathematical Notes, **71** (2002), 39–55.

[15] V. A. Vedernikov, *On new types of ω-fibered formations of finite groups*, in: Ukrainian Mathematical Congress-2001 (Kiev, Ukraine, August 21–23, 2001): Proceedings. Section 1: Algebra and Number Theory, Inst. Mat., Kiev (2002), 36–45.

[16] V. A. Vedernikov, *On new types of ω-fibered Fitting classes of finite groups*, Ukrainian Mathematical Journal, **54** (2002), 1086–1097.

[17] V. A. Vedernikov, *Ω-Foliated formations and Fitting classes with finite composition series*, in: Abstracts: Ukrainian Mathematical Congress. Algebra and Number Theory, Kiev (2001), 16–17.

[18] V. A. Vedernikov, E.N. Demina, *Ω-Foliated formations of multioperator T-groups*, Siberian Mathematical Journal, **51** (2010), 789–804.

[19] E. N. Bazhanova, V. A. Vedernikov, *Ω-Foliated Fitting classes of T-groups*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 629–639.

[20] A.N. Skiba, *On one generalization of the local formations*, Problems of Phesics, Mathematics and Technics, **34**:1 (2018), 79–82.

[21] O.V. Kamozina, *$\omega\sigma$-fibered Fitting classes*, Chebyshevskii Sbornik, **21**:4 (2020), 107–116.

[22] E.N. Bazhanova, *Minimal satellites of $\Omega\sigma$-foliated Fitting classes of multioperator T-groups*, in: Mathematics in the Modern World: Materials of the II All-Russian Scientific and Practical Conference dedicated to the 160th anniversary of the prominent Russian mathematician D. A. Grave (September 19-23, 2023), VSU, Vologda (2023), 9–11.

[23] P. J. Higgins, *Groups with multiple operators*, Proceedings of the London Mathematical Society, **6** (1956), 366–416.

[24] A. G. Kurosh, *Lectures on General Algebra*, Lan, St. Petersburg, 2022.

[25] L. A. Skornyakov (ed.), *General Algebra. Vol. 2*, Nauka, Moscow, 1991.

Ekaterina Nikolaevna Bazhanova
Moscow City University,
Vtoroy Selskohoziajstvenny proezd, 4,
129226, Moscow, Russia
Email address: DeminaENmf@yandex.ru