S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.6
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 65F15,
41A30

К ИДЕНТИФИКАЦИИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ РЕШЕНИЙ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ ИЗ ЗАДАННОГО ЛИНЕЙНОГО МНОГООБРАЗИЯ

А.А. Ломов

Представлено П.П. Петровым

Abstract: We study the Prony identification problem of coefficients of a linear difference equation from noisy solutions observations with unknown additive perturbations from an arbitrary given linear manifold. The property of "projectivity" of the variational objective function is proved. Criteria and the sufficient conditions of identifiability are obtained for two main types of equations.

Keywords: difference equations, parameter identification, perturbations from a given linear manifold, variational Prony problem, identifiability conditions.

Lomov, A.A., On the identification of difference equations by observations of solutions with perturbations from a given linear manifold .

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Поступила 1 октября 2023 г., опубликована .. 2023 г.

1 Введение

Задача построения разностных уравнений по возмущеным наблюдениям временных зависимостей (задача Прони) известна уже более двухсот лет [1, 2]. Известные подходы к ее решению по-разному учитывают априорную информацию о свойствах возмущений.

В статье исследуется случай, когда возмущения вместе со случайными аддитивными шумами содержат неизвестные детерминированные составляющие из заданного линейного многообразия. Это многообразие может быть описано 1) набором базисных векторов или 2) системой линейных уравнений. Обычно используются автономные разностные уравнения. Тогда возмущения называются структурированными [3, раздел 2.1.1] и, как известно, являются квазимногочленами, к которым относятся гармонические, экспоненциальные функции, многочлены и их произведения. Этот второй случай изучен сравнительно полно; предложены алгоритмы фильтрации возмущений и идентификации их уравнений [4, разделы 4, 6, 14], [5, раздел 5], в том числе совместно с уравнениями для невозмущенных наблюдений [6, 7].

В отличие от работ [6, 7], здесь нас будет интересовать случай многообразий возмущений, представленных не системами линейных уравнений, а произвольным набором базисных векторов, в общем случае не являющихся квазимногочленами. Примерами являются многообразия ступенчатых, импульсных, кусочно-линейных по времени и т. п. функций.

Известно [8, 9], что в задачах типа Прони без детерминированных составляющих [1, 2, 10], [11, глава 11] статистически состоятельные решения обеспечиваются вариационными (проективными) целевыми функциями [10, 12]. В статье будет показано, что добавление детерминированных аддитивных составляющих к наблюдениям сохраняет свойство проективности; как следствие, для поиска решения оказывается возможным применить известные вычислительные алгоритмы на основе нелинейных обратных итераций [13, 14, 15, 16].

В первом разделе ставится задача идентификации параметров объекта и возмущений с вариационной целевой функцией; во втором разделе доказывается свойство проективности и дается описание множества всех «истинных» наблюдений, для которых минимум целевой функции по параметрам принимает наименьшее возможное нулевое значение. В третьем разделе даются условия идентифицируемости параметров по «истинным» (наилучшим возможным) наблюдениям.

Длинные доказательства вынесены в приложение.

2 Постановка задачи

Рассмотрим объект, описываемый разностным уравнением

$$x_{k+n}+\alpha_{n-1}x_{k+n-1}+\cdots+\alpha_0 x_k=\beta_n u_{k+n}+\cdots+\beta_0 u_k,\quad k=\overline{1,N-n}. \quad (1)$$

Здесь $u_k, x_k \in \mathbb{R}$ — отсчеты сеточных функций, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ — постоянные коэффициенты, подлежащие определению по наблюдениям

$$\check{x}_k \doteq x_k + s_k^x + \eta_k^x, \quad \check{u}_k \doteq u_k + s_k^u + \eta_k^u, \quad k = \overline{1, N-n}.$$

Известно, что $\eta_k^{x,u} \in \mathbb{R}$ — случайные векторы, распределенные одинаково и независимо между собой и для разных k, с нулевым математическим ожиданием $\mathbf{M}\eta_k^{x,u} = 0$, дисперсией $\mathbf{M}\eta_k^{x,u} = \sigma$ и ограниченным носителем распределения, диаметр которого при $\sigma \to 0$ стремится к нулю [1] $\sim O(\sigma)$, $s_k^{x,u} \in \mathbb{R}$ — детерминированные возмущения[2].

Условия устойчивости, минимально-фазовости, управляемости [4] на систему (1) не налагаются, при этом существенной является конечность интервала наблюдения $\overline{1, N}$.

Определим в $\mathbb{R}^{2N}$ векторы из отсчетов сеточных функций[3]

$$\begin{aligned} z &\doteq \begin{bmatrix} u_1, & \ldots, & u_N, & x_1, & \ldots, & x_N \end{bmatrix}, \\ s &\doteq \begin{bmatrix} s_1^u, & \ldots, & s_N^u, & s_1^x, & \ldots, & s_N^x \end{bmatrix}, \\ \eta &\doteq \begin{bmatrix} \eta_1^u, & \ldots, & \eta_N^u, & \eta_1^x, & \ldots, & \eta_N^x \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

и запишем систему уравнений (1) в матричном виде:

$$Gz = 0, \tag{3}$$

$$G \doteq \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_0 & B_1 & A_0 & A_1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{(N-n)\times 2N}, \tag{4}$$

$$-\left[\begin{array}{c|c} B_0 & B_1 \end{array}\right] \doteq \left[\begin{array}{ccc|cccccc} \beta_0 & \ldots & \beta_{n-1} & \beta_n & & & & & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ & & \beta_0 & \vdots & & \ddots & & & \\ & & & \beta_0 & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & & \beta_0 & \ldots & \ldots & \beta_n \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 & A_1 \end{array}\right] \doteq \left[\begin{array}{ccc|ccccccc} \alpha_0 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & \vdots & \alpha_{n-1} & 1 & & & & & \\ & & \alpha_0 & \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \alpha_0 & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & & \alpha_0 & \ldots & \alpha_{n-1} & & 1 \end{array}\right].$$

---

[1]Это условие позволяет выполнять разложение целевой функции в степенной ряд по малым σ.

[2]Многомерные системы вида (1) с матричными коэффициентами не рассматриваются ради упрощения изложения.

[3]Используем матричные обозначения MATLAB: $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \doteq [A, B]$, $\left[\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right] \doteq [A; B]$.

Определим вектор коэффициентов уравнения (1)

$$\gamma \doteq [-\beta_0; \ldots; -\beta_n; \alpha_0; \ldots; \alpha_{n-1}; 1] \doteq [-\beta; \alpha] \doteq [\theta; 1]\,, \tag{5}$$

и назовем θ вектором параметров.

Будем предполагать, что вектор детерминированных возмущений s (2) лежит в линейном многообразии с известным базисом S:

$$s = S\pi,$$

где $S \in \mathbb{R}^{2N\times q}$ — матрица с линейно независимыми столбцами, $\pi \in \mathbb{R}^q$ — подлежащий определению вектор координат. На матрицу S налагается ограничение

$$\operatorname{im} S \cap \ker G = 0, \tag{6}$$

которое означает, что возмущения s не являются решениями уравнения (3).

Вариационная целевая функция для состоятельной идентификации [8] коэффициентов уравнения (1) имеет вид [10]

$$J = (\check{z} - z - S\pi)^{\mathrm{T}} (\check{z} - z - S\pi) \to \min_{\pi, z, \theta\colon G_\theta z = 0}. \tag{7}$$

Решением задачи будет сходящийся за конечное число шагов алгоритм вычисления вектора коэффициентов $\hat{\theta}$, координат $\hat{\pi}$ и сигнала $\hat{z}$, лежащих в заданной малой окрестности $E \subset \mathbb{R}^{2N+q+2n+1}$ $(\operatorname{diam} E \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} 0)$ точки глобального минимума целевой функции (7).

3 Свойства целевой функции

Обозначим $\overline{V} \subset \mathbb{R}^M$ ортогональное дополнение линейного подпространства $V \subset \mathbb{R}^M$: $\overline{V} \perp V$, $\overline{V} + V = \mathbb{R}^M$.

Пусть $\overline{A}$ («ортогональное дополнение A») обозначает матрицу с числом строк M, равным числу строк в матрице A, и со свойствами

$$\operatorname{im} \overline{A} + \operatorname{im} A = \mathbb{R}^M, \quad \overline{A}^{\mathrm{T}} A = 0. \tag{8}$$

Дополнение $\overline{A}$ определено неоднозначно. Во всяком случае, предполагаем, что оно минимально по числу столбцов. Система столбцов составной матрицы $\left[\overline{A}, A\right]$ содержит базис всего пространства $\mathbb{R}^M$. Если столбцы A линейно независимы, то $A = \overline{\overline{A}}$. Согласно (8),

$$\operatorname{im} \overline{A} = \overline{\operatorname{im} A}, \quad \ker \overline{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{im} A. \tag{9}$$

Обозначим H матрицу, столбцы которой образуют базис многообразия решений разностного уравнения (1), (3). Верны равенства

$$\operatorname{im} H = \ker G, \quad G^{\mathrm{T}} = \overline{H}.$$

Условие (6) равносильно нулевому пересечению

$$\operatorname{im} S \cap \operatorname{im} H = 0. \tag{10}$$

Предложение 1. *Для произвольных фиксированных значений переменных θ, π минимум J (7) по переменным z достигается в точке*

$$\hat{z} = (I - \Pi)\,(\check{z} - S\pi)\,, \qquad (11)$$
$$\Pi \doteq G^{\mathrm{T}} C G, \quad C \doteq \left(G G^{\mathrm{T}}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что Π есть матрица ортогонального проектора на подпространство $\operatorname{im} G^{\mathrm{T}} = \operatorname{im} \overline{H}$, тогда $I - \Pi$ есть проектор на $\operatorname{im} H$, т. е. на многообразие решений системы разностных уравнений $Gz = 0$. Следовательно, $(I - \Pi)\,(\check{z} - S\pi)$ есть точка глобального минимума J по z при фиксированных θ, π. □

Подставляя значение $z = \hat{z}(\theta, \pi)$ (11) в выражение для целевой функции (7) и используя свойства проекторов $\Pi = \Pi^2$, $(I - \Pi) = (I - \Pi)^2$, получим целевую функцию для переменных θ, π:

$$J(\theta, \pi) = (\check{z} - S\pi)^{\mathrm{T}}\, \Pi\, (\check{z} - S\pi) =$$
$$= \left(\Pi \check{z} - \tilde{S}\pi\right)^{\mathrm{T}} \left(\Pi \check{z} - \tilde{S}\pi\right), \quad \tilde{S} \doteq \Pi S. \qquad (12)$$

Отсюда вытекает следующая формула для оптимального значения $\hat{\pi}$.

Предложение 2. *Для произвольного фиксированного значения переменной θ и оптимального значения $z = \hat{z}$ (11) минимум J (7) по переменным π достигается в точке*

$$\hat{\pi} = \left(\tilde{S}^{\mathrm{T}} \tilde{S}\right)^{-1} \tilde{S}^{\mathrm{T}} \Pi \check{z}. \qquad (13)$$

Существование обратной матрицы в (13) гарантировано следующим утверждением.

Лемма 1. *Пусть столбцы S линейно независимы и строки G линейно независимы, $G^{\mathrm{T}} \left(G G^{\mathrm{T}}\right)^{-1} G \doteq \Pi$. Верны утверждения:*

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{rank} \Pi S = \operatorname{rank} G S,$$
$$\text{(II)} \qquad \operatorname{im} S \cap \ker G = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rank} \Pi S = \operatorname{rank} S.$$

Доказательство. (I) Следует из линейной независимости столбцов матрицы $G^{\mathrm{T}} \left(G G^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$. (II) От противного, пусть $\operatorname{rank} \Pi S < \operatorname{rank} S$, т. е. столбцы матрицы ΠS линейно зависимы: $\exists \varphi \neq 0 \ \Pi S \varphi = 0$. Последнее ввиду (II) равносильно $G S \varphi = 0$ и равносильно $0 \neq S\varphi \in \ker G$, что означает $\operatorname{im} S \cap \ker G \neq 0$. Рассуждения обратимы, что доказывает лемму. □

После подстановки оптимальных значений $z = \hat{z}$ (11) и $\pi = \hat{\pi}$ (13) в выражение для целевой функции J (7) получим целевую функцию для переменных θ:

$$J(\theta) = \left(\mathit{\Pi}\check{z} - \tilde{S}\hat{\pi}\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathit{\Pi}\check{z} - \tilde{S}\hat{\pi}\right) = \check{z}^{\mathrm{T}} \left(\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}\right) \check{z}, \tag{14}$$

$$\tilde{\mathit{\Pi}} \doteq \tilde{S} \left(\tilde{S}^{\mathrm{T}}\tilde{S}\right)^{-1} \tilde{S}^{\mathrm{T}}.$$

Лемма 2. *Пусть $\mathit{\Pi}$ — проективная матрица, и для некоторой матрицы S произведение $\mathit{\Pi} S$ имеет линейно независимые столбцы. Обозначим $\tilde{\mathit{\Pi}}$ проектор на $\operatorname{im} \mathit{\Pi} S$. Верны свойства: 1) $\mathit{\Pi}\tilde{\mathit{\Pi}} = \tilde{\mathit{\Pi}} = \tilde{\mathit{\Pi}}\mathit{\Pi}$; 2) $\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}$ есть проектор: $\left(\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}\right)^2 = \mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}$.*

Доказательство. 1. Ввиду вложения $\operatorname{im} \tilde{\mathit{\Pi}} = \operatorname{im} \mathit{\Pi} S \subseteq \operatorname{im} \mathit{\Pi}$ для произвольного вектора x верно $\mathit{\Pi}\tilde{\mathit{\Pi}} x = \tilde{\mathit{\Pi}} x = \tilde{\mathit{\Pi}}\mathit{\Pi} x$. 2. С учетом последних равенств получаем

$$\left(\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}\right)^2 = \left(\mathit{\Pi} + \tilde{\mathit{\Pi}} - \mathit{\Pi}\tilde{\mathit{\Pi}} - \tilde{\mathit{\Pi}}\mathit{\Pi}\right) = \mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}},$$

т. е. $\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}$ — проектор. □

Пользуясь леммой 2, можем написать окончательное выражение

$$J(\theta) = \check{z}^{\mathrm{T}} \left(\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}\right) \check{z}. \tag{15}$$

Проективность (идемпотентность) и симметричность матрицы квадратичной формы в (15) гарантирует неотрицательную определенность целевой функции $J(\theta)$.

Следующая теорема описывает все точки минимума $J(\theta)$.

Теорема 1. *Пусть $\mathit{\Pi}$ — ортогональный проектор на $\operatorname{im} \overline{H}$, и S — матрица с линейно независимыми столбцами такая, что $\operatorname{rank} \mathit{\Pi} S = \operatorname{rank} S$. Обозначим $\tilde{\mathit{\Pi}}$ проектор на $\operatorname{im} \mathit{\Pi} S$. Тогда $\check{z}^{\mathrm{T}} \left(\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}\right) \check{z} = 0$ равносильно*

$$\check{z} \in \operatorname{im}\,(I - \mathit{\Pi}) + \operatorname{im} S = \operatorname{im} H + \operatorname{im} S.$$

Доказательство. См. приложение. □

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 матрица $\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}$ есть проектор на ортогональное дополнение к подпространству $\operatorname{im} H + \operatorname{im} S$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что ввиду леммы 2

$$J = \check{z}^{\mathrm{T}} \left(\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}\right) \check{z} = \check{z}^{\mathrm{T}} \left(\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}\right) \check{z},$$

тогда $J = 0 \Leftrightarrow \left(\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}\right) \check{z} = 0$. По теореме 1 последнее равносильно

$$\check{z} \in \operatorname{im} H + \operatorname{im} S.$$

Учитывая, что $\mathit{\Pi} - \tilde{\mathit{\Pi}}$ есть проектор (лемма 2), получаем доказываемое утверждение. □

4 Условия идентифицируемости параметра θ

Под идентифицируемостью параметра θ (5) понимаем взаимную однозначность отображения

$$\theta \mapsto \operatorname{im} H(\theta) + \operatorname{im} S \tag{16}$$

в некоторой области $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$. Если Θ — малая окрестность точки θ, то говорится о локальной идентифицируемости.

Вначале будем рассматривать произвольные матрицы $H = H(\theta)$, S при условии (10).

Теорема 2. *Параметр θ идентифицируем в области Θ тогда и только тогда, когда уравнение*

$$\Delta H = H\Delta P_H + S\Delta P_S \tag{17}$$

относительно тройки матриц $\Delta H \doteq H(\theta+\Delta\theta) - H(\theta)$, ΔP_H, ΔP_S при $\theta + \Delta\theta \in \Theta$ имеет единственное решение $\Delta H = 0$, $\Delta P_H = 0$, $\Delta P_S = 0$.

Доказательство. Неидентифицируемость равносильна существованию допустимого ($\theta + \Delta\theta \in \Theta$) изменения матрицы $\Delta H \doteq H(\theta+\Delta\theta) - H(\theta)$, которое не затрагивает подпространство $\operatorname{im} H + \operatorname{im} S = \operatorname{im}\,[H, S]$:

$$\operatorname{im}\,[H + \Delta H, S] = \operatorname{im}\,[H, S]\,.$$

С учетом нулевого пересечения $\operatorname{im} H \cap \operatorname{im} S = 0$ (линейной независимости столбцов $[H, S]$) последнее равносильно уравнению

$$[H + \Delta H, S] = [H, S] \begin{bmatrix} I + \Delta P_H & 0 \\ \Delta P_S & I \end{bmatrix},$$

которое, в свою очередь, равносильно уравнению (17). Теорема доказана. $\square$

Пусть

$$G^{\mathrm{T}} = \overline{H}, \quad GH = 0 \tag{18}$$

— матрица ортогонального дополнения к H.

Следствие 2. *Параметр θ идентифицируем в области Θ, если уравнение*

$$G\Delta H = S\Delta P_S \tag{19}$$

относительно пары матриц $\Delta H \doteq H(\theta+\Delta\theta) - H(\theta)$, ΔP_S при $\theta + \Delta\theta \in \Theta$ имеет единственное решение $\Delta H = 0$, $\Delta P_S = 0$.

Доказательство. Уравнение (19) следует из (17) ввиду $GH = 0$. Далее теорема 2. $\square$

Получим критерий локальной идентифицируемости в терминах матрицы G (18) (условие (4) на вид G не налагается).

Теорема 3. *Параметр θ локально идентифицируем тогда и только тогда, когда уравнение*

$$\mathrm{d}G \cdot H = GS\,\mathrm{d}P_S \tag{20}$$

относительно пары матриц $\mathrm{d}G \doteq G(\theta + \mathrm{d}\theta) - G(\theta)$, $\mathrm{d}P_S$ имеет единственное решение $\mathrm{d}G = 0$, $\mathrm{d}P_S = 0$.

Доказательство. См. приложение. □

Ввиду $GH = 0$ всегда верно $\mathrm{d}G \cdot H + G\,\mathrm{d}H = 0$, поэтому имеет место следующий вариант теоремы 3. Этот вариант в локальном случае усиливает достаточное условие следствия 2 до критерия.

Теорема 4. *Параметр θ локально идентифицируем тогда и только тогда, когда уравнение*

$$G\,\mathrm{d}H = GS\,\mathrm{d}P_S \tag{21}$$

относительно пары матриц $\mathrm{d}H \doteq H(\theta + \mathrm{d}\theta) - H(\theta)$, $\mathrm{d}P_S$ имеет единственное решение $\mathrm{d}H = 0$, $\mathrm{d}P_S = 0$.

Рассмотрим случай системы (1), (3) с матрицей G вида (4).

Определение 1. *Назовем вектор $w \doteq [w_1; \dots; w_{N-n}]$ импульсной функцией системы (1), если $w = [x_{n+1}; \dots; x_N]$, где $[x_{n+1}; \dots; x_N]$ есть решение системы (1) с функцией $u = [1; 0; \dots; 0]$ в правой части при нулевых начальных условиях $[x_1; \dots; x_n] = [0; \dots; 0]$.*

Теорема 5. *В системе (1), (3) с матрицей G (4) параметр θ локально идентифицируем, если выполнено любое из трех достаточных условий на область Θ: 1) фиксирован вектор α; 2) фиксирован вектор β; 3) допустимые приращения $\mathrm{d}\alpha$, $\mathrm{d}\beta$ не связаны линейным соотношением*

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}\beta_0 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_{n+1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}\alpha_0 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\alpha_n \end{bmatrix}.$$

Доказательство. См. приложение. □

Рассмотрим случай однородного уравнения

$$x_{k+n} + \alpha_{n-1} x_{k+n-1} + \dots + \alpha_0 x_k = 0, \quad k = \overline{1, N-n}, \tag{22}$$

$$z = \begin{bmatrix} x_1, & \dots, & x_N \end{bmatrix}, \quad Gz = 0,$$
$$G \doteq \begin{bmatrix} \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 & & & & 0 \\ & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Ассоциируем теплицевую матрицу (23) с характеристическим многочленом разностного уравнения (22)

$$\alpha(\zeta) = \zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

и введем обозначения

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \dots & \dots & \alpha_{n-1} & 1 & & & 0 \\ & \alpha_0 & \dots & \dots & \alpha_{n-1} & 1 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_0 & \dots & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \doteq \backslash\alpha^{\mathrm{T}}\backslash \doteq T_{\alpha(\zeta)}.$$

Определение 2. *Вектор (сеточную функцию) $x \in \mathbb{R}^N$ будем называть квазимногочленом степени n ($< N-1$), если он является решением некоторого однородного разностного уравнения* (22) *порядка n: $\exists\alpha(\zeta)$: $\deg\alpha(\zeta) = n$, $T_{\alpha(\zeta)}x = 0$, и при этом не существует уравнения* (22) *меньшего порядка $m \in \overline{1, n-1}$, $T_{\mu(\zeta)}x = 0$, $\deg\mu(\zeta) = m$, решением которого являлся бы вектор x.*

В этом определении учтено, что из уравнения $T_{\alpha(\zeta)}x = 0$ следует $T_{\alpha(\zeta)\nu(\zeta)}x = 0$ для любого многочлена $\nu(\zeta)$; для многочленов $\nu_i(\zeta)$ ненулевой степени верны вложения

$$\ker T_{\alpha(\zeta)} \subset \ker T_{\alpha(\zeta)\nu_1(\zeta)} \subset \ker T_{\alpha(\zeta)\nu_1(\zeta)\nu_2(\zeta)} \subset \dots .$$

Обозначим $Q_n \subset \mathbb{R}^N$ множество всех квазимногочленов порядка $\leqslant n$.

Теорема 6. *Если столбцы s_i матрицы $S \doteq [s_1, \dots, s_q] \subset \mathbb{R}^N$* (16) *не являются квазимногочленами степени $2n$ или ниже: $s_i \notin Q_{2n}$, $i = \overline{1, q}$, — то в однородной системе* (22) *с матрицей G* (23) *параметр $\theta \doteq [\alpha_0; \dots; \alpha_{n-1}]$ глобально идентифицируем (без ограничений на область $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$).*

Доказательство. См. приложение. □

5 Приложение

5.1. Доказательство теоремы 1. Первое, $\check{z}^{\mathrm{T}}\left(\varPi - \tilde{\varPi}\right)\check{z} = 0 \Leftrightarrow \check{z}^{\mathrm{T}}\left(\varPi - \tilde{\varPi}\right)^2\check{z} = 0 \Leftrightarrow \left(\varPi - \tilde{\varPi}\right)\check{z} = 0$. Далее, пусть

$$\check{z} = (I - \varPi)\,\omega_1 + S\omega_2,$$

тогда с учетом обозначения $\varPi S \doteq \tilde{S}$

$$\left(\varPi - \tilde{\varPi}\right)\check{z} = \left(\varPi - \tilde{\varPi}\right)\left((I - \varPi)\,\omega_1 + S\omega_2\right) =$$

$$= \left(\varPi - \tilde{\varPi}\right)S\omega_2 = \tilde{S}\omega_2 - \tilde{S}\omega_2 = 0.$$

Обратно, пусть $\left(\varPi - \tilde{\varPi}\right)\check{z} = 0$, тогда

$$\varPi\check{z} = \tilde{\varPi}\check{z} = \varPi S\left(S^{\mathrm{T}}\varPi S\right)^{-1}S^{\mathrm{T}}\varPi\check{z},$$

или ($\varPi \doteq UU^{\mathrm{T}}$, $U^{\mathrm{T}}U = I$)

$$U^{\mathrm{T}}\check{z} = U^{\mathrm{T}}S\left(S^{\mathrm{T}}UU^{\mathrm{T}}S\right)^{-1}S^{\mathrm{T}}UU^{\mathrm{T}}\check{z}.$$

Разложим $\check{z}$ на ортогональные слагаемые $\check{z} = z_{\|} + z_{\perp} \doteq U\omega_{\|} + \overline{U}\omega_{\perp}$. Из последнего уравнения получаем, что $\omega_{\perp}$ может быть любым, а $\omega_{\|}$ подчиняется уравнению

$$\omega_{\|} = U^{\mathrm{T}} S \left(S^{\mathrm{T}} U U^{\mathrm{T}} S\right)^{-1} S^{\mathrm{T}} U \omega_{\|},$$

из которого следует $\omega_{\|} \in \operatorname{im} U^{\mathrm{T}} S$ и $z_{\|} \in \operatorname{im} U U^{\mathrm{T}} S = \operatorname{im} \varPi S$. Получили импликацию

$$\left(\varPi - \tilde{\varPi}\right) \check{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \check{z} \in \operatorname{im} \overline{U} + \operatorname{im} \varPi S.$$

Осталось заметить, что верны равенства

$$\operatorname{im} \overline{U} + \operatorname{im} \varPi S = \operatorname{im} \overline{U} + \operatorname{im} \left([\varPi - I]\, S + S\right) = \\ = \operatorname{im} \overline{U} + \operatorname{im} S = \operatorname{im} \left(I - \varPi\right) + \operatorname{im} S,$$

из которых следует $\check{z} = (I - \varPi)\, \omega_1 + S\omega_2$. Теорема доказана.

5.2. Доказательство теоремы 3. Выберем представление $G \doteq [G_0, G_1]$, где G_1 — неособенная квадратная подматрица в G (с точностью до перестановки столбцов G такая подматрица всегда существует). Без ограничения общности (см. замечание в конце доказательства) можно положить

$$H = \begin{bmatrix} I_{N+n} \\ -G_1^{-1} G_0 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

По предложению 2 локальная идентифицируемость сводится к неразрешимости уравнения

$$\mathrm{d}H = \begin{bmatrix} 0 \\ G_1^{-1} \left(\mathrm{d}G_1\right) G_1^{-1} G_0 - G_1^{-1}\, \mathrm{d}G_0 \end{bmatrix} = H\, \mathrm{d}P_H + S\, \mathrm{d}P_S$$

относительно ненулевых $\mathrm{d}H$, $\mathrm{d}P_H$, $\mathrm{d}P_S$. Последнее равенство запишем в виде

$$\begin{bmatrix} 0 \\ G_1^{-1} \left(\mathrm{d}G_1\right) G_1^{-1} G_0 - G_1^{-1}\, \mathrm{d}G_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -G_1^{-1} G_0 \end{bmatrix} \mathrm{d}P_H + \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \end{bmatrix} \mathrm{d}P_S.$$

Получили систему из двух уравнений

$$\mathrm{d}P_H = -S_0\, \mathrm{d}P_S,$$
$$G_1^{-1} \left(\mathrm{d}G_1\right) G_1^{-1} G_0 - G_1^{-1}\, \mathrm{d}G_0 = -G_1^{-1} G_0\, \mathrm{d}P_H + S_1\, \mathrm{d}P_S.$$

С учетом первого уравнения запишем второе в виде

$$G_1^{-1} \left(\mathrm{d}G_1\right) G_1^{-1} G_0 - G_1^{-1}\, \mathrm{d}G_0 = \left(G_1^{-1} G_0 S_0 + S_1\right) \mathrm{d}P_S.$$

Учитывая обозначение $\mathrm{d}G \doteq [\mathrm{d}G_0, \mathrm{d}G_1]$, перепишем уравнение, умножив слева на G_1:

$$-\mathrm{d}G_0 + \left(\mathrm{d}G_1\right) G_1^{-1} G_0 = GS\, \mathrm{d}P_S,$$

или

$$-\mathrm{d}G \cdot H = GS\, \mathrm{d}P_S.$$

Нетрудно увидеть, что множество решений этого уравнения не изменяется при замене базиса подпространства $\operatorname{im} H$ (с соответствующей заменой матрицы $\mathrm{d}P_S$), поэтому представление (24) не является ограничительным. Теорема доказана.

5.3. Доказательство теоремы 5.

Предложение 3. *Матрица «дополнения» H (18), (24) для G^{T} (4) может быть выбрана в виде*

$$H = \begin{bmatrix} I_{N+n} \\ -A_1^{-1}\left[\begin{array}{c|c|c} B_0 & B_1 & A_0 \end{array}\right] \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|cccc|ccc} & I_n & & & 0 & & & & 0 & \\ \hline & 0 & & & I_{N-n} & & & & 0 & \\ \hline & 0 & & & 0 & & & & I_n & \\ \hline \rho_{1,1} & \cdots & \rho_{n,1} & w_1 & & & 0 & \chi_{1,1} & \cdots & \chi_{n,1} \\ & & & w_2 & w_1 & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \rho_{1,N-n} & \cdots & \rho_{n,N-n} & w_{N-n} & \cdots & w_2 & w_1 & \chi_{1,N-n} & \cdots & \chi_{n,N-n} \end{array}\right], \tag{25}$$

где $[w_1; \ldots; w_{N-n}]$ — импульсная функция системы (1) (см. определение 1), $\chi_i = [\chi_{i,1}; \chi_{i,2}; \ldots; \chi_{i,N-n}]$ — решение системы (1) с нулевой правой частью $u \equiv 0$ и начальными условиями

$$[x_1; \ldots; x_n] = [\underbrace{0; \ldots; 1}_{i}; \ldots; 0], \quad i = \overline{1, n},$$

и $\rho_i = [\rho_{i,1}; \rho_{i,2}; \ldots; \rho_{i,N-n}]$ — решение системы (1) с нулевыми начальными условиями и правой частью

$$[u_1; \ldots; u_n; \ldots; u_N] = [\underbrace{0; \ldots; 1}_{i}; \ldots; 0], \quad i = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Прямо следует из определений (4), представления (24) и свойства автономности системы (1). Уместно учесть, что матрицы A_1, B_1 теплицевые нижнетреугольные, следовательно, матрицы A_1^{-1} и $A_1^{-1}B_1$ также теплицевые нижнетреугольные. □

Обозначим h_i i-й столбец матрицы H (25) и $\mathrm{d}p_i$ — i-й столбец матрицы $\mathrm{d}P_S$:

$$H \doteq [h_1, \ldots, h_{N+n}], \quad \mathrm{d}P_S \doteq [\mathrm{d}p_1, \ldots, \mathrm{d}p_{N+n}].$$

Уравнение (20) запишем в виде

$$\mathrm{d}G \cdot h_i = GS\,\mathrm{d}p_i, \quad i = \overline{1, N+n}. \tag{26}$$

Из теплицевой структуры матрицы G (4) следует

$$\mathrm{d}G \cdot h_i = V(h_i)\,\mathrm{d}\gamma,$$

где матрица $V(z)$ для z (2) формируется следующим образом:

$$V(z) \doteq \left[\begin{array}{cccc|cccc} u_1 & u_2 & \dots & u_{n+1} & x_1 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{n+2} & x_2 & \dots & x_{n+1} & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{N-n} & u_{N-n+1} & \dots & u_N & x_{N-n} & \dots & x_{N-1} & x_N \end{array}\right]$$

(верно тождество $Gz \equiv V(z)\gamma$). Условие (26) принимает вид

$$V(h_i)\,\mathrm{d}\gamma = GS\,\mathrm{d}p_i, \quad i = \overline{1, N+n}. \tag{27}$$

Рассмотрим матрицы $V(h_i)$. Из (25) следует

$$V(h_{n+1}) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & w_1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 & \vdots & \iddots & w_1 & \vdots \\ 0 & \iddots & & \vdots & 0 & \iddots & & \vdots \\ 1 & & & \vdots & w_1 & & & \vdots \\ 0 & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & w_{N-2n} & \dots & \dots & w_{N-n} \end{array}\right], \tag{28}$$

для $i = \overline{n+2, N-n-1}$

$$V(h_i) \doteq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots & & 0 \\ \vdots & \iddots & 1 & \vdots & \iddots & w_1 \\ 0 & \iddots & & 0 & \iddots & \vdots \\ 1 & & & w_1 & & \vdots \\ & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & w_{N-2n-i+1} & \dots & w_{N-n-i+1} \end{array}\right],$$

$$V(h_{N-n}) \doteq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots & & 0 \\ \vdots & \iddots & 1 & \vdots & \iddots & w_1 \\ 0 & \iddots & & 0 & \iddots & \vdots \\ 1 & & 0 & w_1 & \dots & w_{n+1} \end{array}\right]. \qquad (29)$$

Из (27) получаем

$$\left[V(h_{n+1})\,\mathrm{d}\gamma, \quad \dots, \quad V(h_{N-n})\,\mathrm{d}\gamma\right] = GS\left[\mathrm{d}p_{n+1}, \dots, \mathrm{d}p_{N-n}\right]. \qquad (30)$$

Учитывая «скользящий» вид матриц $V(h_i)$ (28)-(29), перепишем левую часть уравнения (30):

$$\left[V(h_{n+1})\,\mathrm{d}\gamma, \quad \dots, \quad V(h_{N-n})\,\mathrm{d}\gamma\right] =$$
$$= \begin{bmatrix} \mathrm{d}\psi_0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \mathrm{d}\psi_n & & \mathrm{d}\psi_0 \\ & \ddots & \vdots \\ * & & \mathrm{d}\psi_n \end{bmatrix} \doteq \Psi = GS\left[\mathrm{d}p_{n+1}, \dots, \mathrm{d}p_{N-n}\right]. \qquad (31)$$

Матрица $\Psi \in \mathbb{R}^{(N-n)\times(N-2n)}$ теплицевая и построена по вектору

$$\mathrm{d}\psi \doteq \begin{bmatrix} \mathrm{d}\psi_0 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\psi_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}\beta + \begin{bmatrix} 0 & & w_1 \\ & \iddots & \vdots \\ w_1 & \dots & w_{n+1} \end{bmatrix} \mathrm{d}\alpha.$$

Обратим внимание, что при $\mathrm{d}\psi \neq 0$ матрица Ψ (31) имеет линейно независимые столбцы, при этом их число $N-2n$ строго больше числа q столбцов матрицы GS (поскольку из естественного неравенства

$$2N \geqslant \operatorname{rank} H + \operatorname{rank} S = N + n + q$$

следует $N \geqslant n+q$ и $N-2n \geqslant q-n > q$). Получаем, что ранг матрицы в левой части уравнения (31) строго больше ранга матрицы в правой части, следовательно, уравнение (31) может быть совместным только при нулевом векторе $\mathrm{d}\psi$, т. е. при выполнении соотношения

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}\beta_0 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_{n+1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}\alpha_0 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\alpha_n \end{bmatrix}. \qquad (32)$$

Если соотношение (32) не выполнено, то уравнение (31) и уравнение (26) имеют только нулевое решение, и по теореме 3 параметр θ локально идентифицируем.

Пусть $\mathrm{d}\beta = 0$. Тогда если (32), то $\mathrm{d}\alpha = 0$, что означает локальную идентифицируемость. Если не (32), то $\mathrm{d}\psi \neq 0$ и уравнение (31) несовместно, что также означает локальную идентифицируемость. Аналогично разбирается случай $\mathrm{d}\alpha = 0$. Теорема доказана.

5.4. Доказательство теоремы 6.. Заметим, что всякий квазимногочлен x степени n представим формулой

$$x_k = \sum_{i=1}^{l \leqslant n} \left(c_{i,0} + c_{i,1}k + \dots + c_{i,n_i}k^{n_i - 1}\right) \zeta_i^k \sin\left(\omega_i k + \varphi_i\right), \tag{33}$$

где $\varphi_i, c_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\zeta_i, \omega_i \in \mathbb{R}^+$, $n_1 + \dots + n_l = n$, l — число различных корней характеристического многочлена разностного уравнения, решением которого является x, n_i — кратность i-го корня [17].

Лемма 3. *Пусть $G = T_{\alpha(\zeta)}$ есть теплицевая матрица вида* (23)*, и $H = \overline{G^{\mathrm{T}}}$ — базис подпространства $\ker G$ (т. е. столбцы матрицы H образуют фундаментальную систему решений разностного уравнения* (22)*). Тогда для каждого многочлена $\omega(\zeta)$ той же степени, что и $\alpha(\zeta)$, можно определить матрицу $\Delta H \doteq H(\omega) - H(\alpha)$, при этом линейная оболочка столбцов ΔH вложена в линейное подпространство $\ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)}$.*

Доказательство. Пусть $h(\alpha)$ — произвольный столбец $H(\alpha)$, тогда $h(\alpha) \in \ker T_{\alpha(\zeta)}$ и $h(\omega) \in \ker T_{\omega(\zeta)}$. Из выражения (33) следует, что разность $h(\omega) - h(\alpha)$ лежит в подпространстве $\ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)}$. Ввиду произвольности столбца h получаем доказываемое утверждение. □

Перейдем к доказательству теоремы 6. Обратимся к критерию идентифицируемости из теоремы 2. Ввиду леммы 3 имеем

$$\operatorname{im} H + \operatorname{im} \Delta H \subset \ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)}.$$

С другой стороны, по условию доказываемой теоремы $s_i \notin Q_{2n}$, поэтому какой бы ни был ненулевой вектор Δp, будет верно $S\Delta p \notin Q_{2n}$ и тем более

$$S\Delta p \notin \ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)} \subset Q_{2n}.$$

Отсюда следует, что в уравнении

$$\Delta H - H\Delta P_H = S\Delta P_S$$

столбцы матрицы слева от знака равенства все лежат в $\ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)}$, а столбцы матрицы справа все не лежат в $\ker T_{\alpha(\zeta)\omega(\zeta)}$. Следовательно, это уравнение, а вместе с ним и уравнение (17), совместно только при $\Delta H = 0$, $\Delta P_H = 0$, $\Delta P_S = 0$. По теореме 2, параметр $\theta \in \mathbb{R}^n$ глобально идентифицируем (без ограничения на область $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$). Теорема доказана.

References

[1] G.R. baron de Prony, *Essai éxperimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures* , Journal de l'École Polytechnique, **1**:22 (1795), 24–76.

[2] V. Pereyra, G. Scherer, *Exponential data fitting*, in: Exponential Data Fitting and Its Applications, Bentham Science Publishers (2010), 1–26.

[3] H. Sira-Ramirez, C. Garcia-Rodriguez, J. Cortes-Romero, A. Luviano-Juarez, *Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems*, Wiley, 2014.

[4] Ya.Z. Tsypkin, *Adaptively invariant discrete control systems*, Automation and remote control, **52**:5 (1991), 673—696.

[5] B.R. Andrievsky, I.B. Furtat, *Disturbance Observers: Methods and Applications*, Automation and Remote Control, **81**:9 (2020), 1563—1610.

[6] A.A. Lomov, *Estimation of Trends and Identification of Time Series Dynamics in Short Observation Sections*, Journal of Computer and Systems Sciences International, **48**:1 (2009), 1–13.

[7] A.A. Lomov, *Joint identifiability of coefficients of linear difference equations of object and additive disturbances*, Journal of Mathematical Sciences, **221**:6 (2017), 857–871.

[8] A.A. Lomov, *On consistency of a generalized orthoregressive parameter estimator for a linear dynamical system*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **7**:1 (2014), 1–7.

[9] I. Markovsky, R. Pintelon, *Identification of linear time-invariant systems from multiple experiments*, IEEE Trans. Signal Process., **63**:13 (2015), 3549–3554.

[10] A. Householder, *On Prony's method of fitting exponential decay curves and multiple-hit survival curves*, Oak Ridge National Lab. Report ORNL-455, Oak Ridge, Tennessee, 1950.

[11] S.L. Marple, *Digital spectral analysis: with applications*, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 1986.

[12] A.O. Egorshin, *Least squares method and the «fast» algorithms in variational problems of identification and filtration (VI method)* [in Russian], Avtometriya, **1** (1988), 30-–42.

[13] M.R.Osborne, *A class of nonlinear regression problems*, in: Data Representation, St. Lucia: University of Queensland Press (1970), 94–101.

[14] A.O. Egorshin, V.P. Budyanov, *Smoothing of signals and estimation of dynamic parameters in automatic systems using a digital computer* [in Russian], Avtometriya, **1** (1973), 78–82.

[15] M.R. Osborne, G.K. Smyth, *A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., **12** (1991), 362–382.

[16] A.A. Lomov, *On Convergence of Computational Algorithms for a Variational Problem of Identifying the Coefficients of Difference Equations*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **14**:3 (2020), 541–554.

[17] A.O. Gel'fond, *Calculus of finite differences*, Mathematics of Computation, **27** (1973), 1–210.

Andrei Aleksandrovich Lomov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: lomov@math.nsc.ru