3-generated axial algebras of Jordan type $1/2$ (R. Bildanov, I. Gorshkov)
Рецензия-2

Авторы верно добавили квадратичную замкнутость поля, без неё некоторые выводы были не верны.

То, что не было замечено при первом прочтении работы, заключается в следующем. Поскольку работа посвящена йордановым алгебрам малой размерности ($\dim \leq 9$), то кажется естественным применить развитую теорию йордановых алгебр. По структурной теореме (§3.10) из классической монографии

McCrimmon, K.: A Taste of Jordan Algebras, (xxv + 564 p.). Springer (2004)

практически немедленно получаем теорему 1 — основной результат работы.

Действительно, во-первых, радикал формы Фробениуса аксиальной алгебры йорданова типа $1/2$ как наибольший идеал, не содержащий осей, включает в себя радикал конечномерной йордановой алгебры — наибольший нильпотентный идеал. Тем самым все изучаемые в работе алгебры являются полупростыми йордановыми алгебрами, т.е. равны прямой сумме простых йордановых алгебр. Во-вторых, из того, что аксиальные алгебры порождаются примитивными осями, следует, что все прямые слагаемые полупростых йордановых алгебр также являются аксиальными.

Несложно понять, что из простых конечномерных йордановых алгебр над квадратично замкнутым полем F характеристики не 2, аксиальными являются следующие: F, $J_3(F)$, $M_2(F)^{(+)}$, $H_3(F)$, $M_3(F)^{(+)}$. Осознаем, что они аксиальны. Для первых трёх это очевидно, для $H_3(F)$ достаточно рассмотреть три удачно выбранных симметрических идемпотентных матрицы ранга 1, например: $f_i = (1/2) \sum\limits_{1 \leq k,l \leq 3,\, k,l \neq i} e_{kl}$, $i = \overline{1,3}$. То, что $M_3(F)^{(+)}$ аксиальна, было показано в [4].

Теперь поясним, что другие простые йордановы алгебры не подходят. Простая йорданова алгебра $J \neq F$ с делением не аксиальна, поскольку J не содержит идемпотентов $\neq 0, 1$. Из простых йордановых алгебр невырожденной формы подходят только $J_3(Q)$ и $J_4(Q) \cong M_2(F)^{(+)}$, поскольку при большей размерности мы не получим 3-порождённость. При этом конечное расширение Q поля F не может быть двумерным над Q — противоречие с квадратичной замкнутостью, а единственный оставшийся вариант — $J_3(Q)$ при $\dim_F(Q) = 3$ — невозможен по [4]. В силу ограничений на размерность простая йорданова алгебра эрмитова типа может принимать только вид $H_3(F)$.

Из всех предварительных сведений остаётся применить тот факт, что размерность 2-порожденной аксиальной алгебры йорданова типа $1/2$ не больше 3. Отсюда получаем все варианты (упорядочим по размерности):

$\dim = 1$: F, $\dim = 2$: $F \oplus F$, $\dim = 3$: $F \oplus F \oplus F$, $J_3(F)$, $\dim = 4$: $F \oplus J_3(F)$, $M_2(F)^{(+)}$, $\dim = 6$: $H_3(F)$, $\dim = 9$: $M_3(F)^{(+)}$.

Часть работы, посвящённая уточнению, какой полупростой йордановой алгеброй является алгебра $S = A/\mathrm{Rad}(A)$ из таблицы 1, прозрачна по размерностным соображениям. Сразу $S_1 \cong F$, $S_2 \cong F \oplus F$, $S_8 \cong S_9 \cong H_3(F)$. Оставшееся легко проясняется: $S_3 \cong F \oplus F \oplus F$, это следует из вида базиса R. Значит, $S_4 \cong S_5 \cong J_3(F)$, поскольку здесь не все оси попарно ортогональны. Наконец, $S_6 \cong F \oplus J_3(F)$, т.к. ось a имеет нулевое умножение со всеми остальными осями, и поэтому $S_7 \cong M_2(F)^{(+)}$.

Таким образом, представленная в работе задача благодаря развитой теории йордановых алгебр имеет простое решение.

Что может представлять ценность, — это возможное применение изоморфизмов между алгебрами S_i[1], но, если это так, авторам необходимо явно предъявить и привести подобные приложения.

Рекомендую отправить работу на переработку:

а) замену доказательства на приведённое простое и

б) основной акцент, сделанный на применениях изучаемых изоморфизмов.

[1] Сам вопрос построения этих изоморфизмов является чисто технической и несложной задачей.