S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 1605–1625 (2023) УДК 512.554.5
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.099 MSC 17A70, 17D15

БИНАРНО $(-1,1)$-БИМОДУЛИ НАД ПОЛУПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ

С.В. Пчелинцев

Представлено А.В. Васильевым

Abstract: It is proved that the irreducible binary $(-1,1)$-bimodule over simple algebra with a unit is alternative. A criterion for alternativeness (hence, complete reducibility) of unital binary $(-1,1)$-bimodule over a semisimple finite-dimensional algebra is obtained. It is proved that every unital strictly $(-1,1)$-bimodule over a finite-dimensional semisimple associative and commutative algebra is associative. The coordinateization theorem is proved for the matrix algebra $\mathrm{M}_n(\Phi)$ of order $n \geq 3$ in the class of binary $(-1,1)$-algebras. Finally, the following examples of indecomposable $(-1,1)$-bimodules are constructed: the non-unital bimodule over 1-dimensional algebra Φe; the unital bimodule over a 2-dimensional composition algebra $\Phi e_1 \oplus \Phi e_2$; the unital $(-1,1)$-bimodule over a quadratic extension $\Phi(\sqrt{\lambda})$ of the ground field; the unital strictly $(-1,1)$-bimodule over the field of fractionally rational functions of one variable $\Phi(t)$.

Keywords: strictly $(-1,1)$-algebra, $(-1,1)$-algebra, binary $(-1,1)$-algebra, $\mathfrak{M}$-bimodule, irreducible bimodule, complete reducibility.

Pchelintsev, S.V., Binary $(-1,1)$-bimodules over semisimple algebras.

Работа выполнена при поддержке гранта FAPESP № 2023/01159-5.
Поступила 12 сентября 2023 г., опубликована 29 декабря 2023 г.

1 Введение

Понятия бимодуля (бипредставления) для произвольного класса алгебр были введены С. Эйленбергом [1]. Наряду с ассоциативными алгебрами и алгебрами Ли теория бипредставлений была развита для других классов алгебр; так для альтернативных алгебр основные результаты получил Р.Д. Шафер [2], для йордановых алгебр - Н. Свартхольм [3] и Н. Джекобсон [4], для алгебр Мальцева - Р. Карлссон [5] и Е.Н. Кузьмин [6]. Для указанных классов алгебр справедливы теоремы о полной приводимости бимодулей над полупростыми конечномерными алгебрами.

А.М. Слинько и И.П. Шестаков [7] изучали правые представления правоальтернативных алгебр.

Важные результаты о структуре бимодулей в многообразии бинарно лиевых алгебр принадлежат А.Н.Гришкову [8].

Неприводимые правоальтернативные бимодули над алгеброй $\mathrm{M}_2(\Phi)$ матриц 2-го порядка изучали Л.И. Мураками и И.П. Шестаков [9]. В [9] было доказано, что над алгеброй $\mathrm{M}_2(\Phi)$ существует бесконечно много неизоморфных неприводимых правоальтернативных бимодулей и доказано, что не всякий бимодуль над алгеброй $\mathrm{M}_2(\Phi)$ вполне приводим.

В [10] изучались неприводимые бинарно $(-1,1)$-бимодули над простыми конечномерными алгебрами. В частности, было доказано, что всякий неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль над алгеброй A альтернативен в каждом из случаев: A — композиционная алгебра; A — конечномерная простая альтернативная алгебра характеристики 0. Там же был поставлен

Вопрос. *Верно ли, что неприводимый бинарно* $(-1,1)$*-бимодуль над простой алгеброй (в частности, над алгеброй с делением), является альтернативным.*

В [11] изучались неприводимые альтернативные бимодули над простыми альтернативными супералгебрами.

В [12] изучались альтернативные бимодули над полупростыми альтернативными артиновыми алгебрами. В ней были получены результаты:

1. Пусть A – полупростая альтернативная артинова алгебра, всякий ненулевой гомоморфный образ которой не является ассоциативной алгеброй с делением. Тогда альтернативный A-бимодуль вполне приводим.

2. Приведен пример альтернативного бимодуля над полем, который не является вполне приводимым.

В [13] изучались правоальтернативные бимодули над матричными алгебрами $\mathrm{M}_n(\Phi)$ при $n \geq 3$.

Целью данной статьи является изучение бимодулей над полупростыми алгебрами в некоторых классах бинарно $(-1,1)$-алгебр. Всюду в работе термин «алгебра» означает линейную алгебру над бесконечным полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3. Бесконечность поля нужна для того, чтобы можно было проводить линеаризации тождеств.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть A — унитальная простая некоммутативная альтернативная алгебра; M — унитальный слабо альтернативный бинарно $(-1,1)$-бимодуль над A. Тогда A-бимодуль M альтернативен.*

Попутно получается

Теорема 2. *Всякий неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль (возможно и неунитальный) над простой альтернативной алгеброй с единицей альтернативен.*

Этот результат дает положительный ответ на сформулированный выше вопрос: *всякий неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль над простой альтернативной алгеброй является альтернативным.*

Теорема 3. *Пусть A — конечно порожденная унитальная простая некоммутативная альтернативная алгебра; M — унитальный бинарно $(-1,1)$-бимодуль над алгеброй A. Тогда бимодуль M альтернативен.*

Неизвестно, является ли существенным ограничение конечной порожденности в теореме 3.

Теорема 4. *Всякий строго $(-1,1)$-бимодуль над конечномерной полупростой ассоциативной и коммутативной алгеброй над алгебраически замкнутым полем Φ ассоциативен, значит, вполне приводим.*

Ограничение конечномерности в теореме 4 существенно.

Теорема 5. *Пусть $A = A_1 \oplus ... \oplus A_k$ — прямая сумма идеалов, являющихся простыми альтернативными алгебрами, e_i — единица алгебры A_i; M — унитальный бинарно $(-1,1)$-бимодуль над A. Тогда A-бимодуль M альтернативен тогда и только тогда, когда M альтернативен как A_i-бимодуль для любого $i = 1, ..., k$.*

В [14] была доказана теорема о координатизации расщепляемой алгебры Кэли-Диксона. Мы приводим достаточные условия для выполнения теоремы о координатизации алгебры $M_n(\Phi), n \geq 3$ в рамках правоальтернативных алгебр.

Теорема 6. *Пусть унитальная правоальтернативная алгебра A над полем Φ содержит подалгебру S матриц порядка n над Φ с той же единицей. Предположим также, что A является ассоциативным S-бимодулем. Тогда алгебра A ассоциативна и $A \cong E \otimes S$, где E — ассоциативная и коммутативная алгебра.*

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. *Теорема о координатизации матричной алгебры $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$, справедлива для правоальтернативной алгебры A, для которой присоединенная алгебра $A^{(-)}$ бинарно лиева. В частности, теорема о координатизации алгебры $M_n(\Phi), n \geq 3$, справедлива для бинарно $(-1,1)$-алгебр.*

В силу результатов [13] для алгебр матриц $M_n(\Phi), n \geq 2$, теорема о координатизации в рамках правоальтернативных алгебр не имеет места.

Наконец, в работе приведены следующие примеры неразложимых $(-1,1)$-бимодулей:

а) неунитальный бимодуль над 1-мерной алгеброй $\Phi \cdot e$;

б) унитальный бимодуль над 2-мерной расщепляемой композиционной алгеброй $\Phi e_1 \oplus \Phi e_2$;

в) унитальный $(-1,1)$-бимодуль над квадратичным расширением $\Phi(\sqrt{\lambda})$ основного поля;

г) унитальный строго $(-1,1)$-бимодуль над полем дробно-рациональных функций $\Phi(t)$.

Заключительная часть работы над данной статьей была выполнена автором во время визита в университет Сан Пауло (01.04.2023 – 30.06.2023). Автор выражает сердечную благодарность И.П. Шестакову за приглашение, гостеприимство, создание идеальных условий для работы и полезные обсуждения результатов. Автор признателен также А.Н. Гришкову за консультацию по бинарно лиевым алгебрам, а также рецензенту за внимательное прочтение рукописи и ряд полезных замечаний.

2 Обозначения, известные результаты

2.1. Правоальтернативные алгебры. Алгебра называется *унитальной*, если она обладает нейтральным элементом по умножению, который называется *единицей* и обозначается символом 1.

Алгебра называется *правоальтернативной*, если в ней выполнено тождество

$$(ax)y + (ay)x = a(x \circ y) \text{ или } (a,x,y) + (a,y,x) = 0, \tag{1}$$

где $x \circ y = xy + yx$ — симметризованное произведение элементов x, y; $(a,x,y) = (ax)y - a(xy)$ — ассоциатор элементов a, x, y.

Алгебра, антиизоморфная правоальтернативной, называется *левоальтернативной*. Алгебра называется *альтернативной*, если она правоальтернативна и левоальтернативна одновременно. По теореме Артина алгебра альтернативна тогда и только тогда, когда всякая ее 2-порожденная подалгебра ассоциативна (см. [15]).

В правоальтернативной алгебре выполнены тождества (см. [16], [17]):

$$(a,x,y \circ z) + (a,y,z \circ x) + (a,z,x \circ y) = 0, \tag{2}$$

$$(a,x,xy) = (a,x,y)x, \tag{3}$$

$$(a,x,yz) + (a,y,xz) = (a,x,z)y + (a,y,z)x, \tag{4}$$

$$(ab,x,y) + (a,b,[x,y]) = a(b,x,y) + (a,x,y)b, \tag{5}$$

$$((a,x,y),x,y) + (a,x,y)[x,y] = 0, \tag{6}$$

где $[x,y] = xy - yx$ — коммутатор. Тождества (3) и (4) называются *правыми тождествами Муфанг*.

Далее, в правоальтенативной алгебре справедливы *коммутаторные тождества*:

$$[xy,z] = x[y,z] + [x,z]y + 2(x,y,z) + (z,y,x), \tag{7}$$

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 2(x,y,z)_\sigma, \tag{8}$$

где $(x,y,z)_\sigma = (x,y,z) + (y,z,x) + (z,x,y)$ — циклическая сумма ассоциаторов.

В правоальтенативной алгебре из (4) легко вывести (см. [18])

$$\begin{aligned} 2(a,xy,z) = 2(a,x,z)y + 2(a,y,z)x + \\ (a,[x,y],z) + (a,x,[z,y]) + (a,y,[z,x]). \end{aligned} \tag{9}$$

Напомним, что верно также *тождество Тэди* [19]

$$\begin{aligned} ((a,b,c),x,y) = ((a,x,y),b,c) + (a,(b,x,y),c) + (a,b,(c,x,y)) + \\ (a,b,c[x,y]) - (a,b,c)[x,y] - (a,b,[x,y])c. \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим также, что во всякой алгебре верно *основное ассоциаторное тождество*:

$$(ab,c,d) - (a,bc,d) + (a,b,cd) = a(b,c,d) + (a,b,c)d. \tag{11}$$

Заметим, что разность между тождествами (11) и (5) при $x = c, y = d$ имеет вид

$$-(a,bc,d) + (a,b,dc) = (a,b,c)d - (a,c,d)b,$$

которое, по существу, совпадает с (4). Значит, тождество (5) представляет собой другую форму записи тождества Муфанг.

Тождества (5) и (6) впервые были доказаны в [16].

Напомним, что на основании теорем Алберта [20] и Цорна [21] всякая конечномерная полупростая правоальтернативная алгебра над алгебраически замкнутым полем является прямой суммой идеалов, изоморфных либо матричным алгебрам, либо векторно-матричной алгебре Цорна (расщепляемой алгебре Кэли).

В связи с бесконечномерными простыми правоальтернативными алгебрами приведем замечательную теорему Скосырского [22]: всякая простая правоальтернативная алгебра с единицей альтернативна, и, значит, по теореме Клейнфелда либо ассоциативна, либо является алгеброй Кэли над своим центром [15]. Отметим также удивительный пример Михеева простой правоальтернативной ниль-алгебры индекса 3 [23].

2.2. Бинарно $(-1,1)$-алгебры. Следуя [24], [25], [26], напомним, что правоальтернативная алгебра называется

$(-1,1)$-*алгеброй*, если в ней выполнено тождество

$$(x,y,z)_\sigma = 0; \tag{12}$$

строго $(-1,1)$-*алгеброй*, если в ней выполнено тождество

$$[[x,y],z] = 0, \tag{13}$$

называемое тождеством *строгости*;

бинарно $(-1,1)$*-алгеброй*, если в ней выполнено тождество

$$[(x,x,y),y]=0. \tag{14}$$

Заметим, что правоальтернативная алгебра A является $(-1,1)$-алгеброй тогда и только тогда, когда её присоединенная алгебра $A^{(-)}$ является алгеброй Ли.

Кроме того, пересечение многообразий альтернативных и $(-1,1)$-алгебр совпадает с многообразием ассоциативных алгебр.

Известно [26], что всякая 2-порожденная подалгебра бинарно $(-1,1)$-алгебры над полем характеристики нуль является $(-1,1)$-алгеброй.

Введем обозначение, которое полезно в бинарно $(-1,1)$-алгебре:

$$\Delta(x,y,z)=(x,y,r)+(y,x,z).$$

2.3. Бимодули в произвольном многообразии алгебр $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр. Понятие бимодуля принадлежит С. Эйленбергу [1].

Пусть M — векторное пространство, A — алгебра из многообразия $\mathfrak{M}$. Допустим, что для каждого $a\in A$ заданы отображения:

$$M\to M,\ m\mapsto am, \qquad M\to M,\ m\mapsto ma.$$

Предполагается, что композиции $am,\ ma$ билинейны. Рассмотрим расщепляемое нулевое расширение $E(M,A)$ — это векторное пространство $M\oplus A$, на котором задано умножение:

$$(m_1+a_1)(m_2+a_2)=(m_1a_2+a_1m_2)+a_1a_2.$$

Если $E(M,A)\in\mathfrak{M}$, то говорят, что M является $\mathfrak{M}$*-бимодулем над* A.

Например, алгебра $E(M,A)$ ассоциативна тогда и только тогда, когда алгебра A ассоциативна и $(a_1,\,a_2,\,m)=(a_1,\,m,\,a_2)=(m,\,a_1,\,a_2)=0$ для всех $a_1,\,a_2\in A, m\in M$.

Отметим, что M — правоальтернативный бимодуль над правоальтернативной алгеброй A, если для всех $m\in M$ и $a_1,\,a_2\in A$ выполнены равенства:

$$(m,a_1,a_2)+(m,a_2,a_1)=0,$$
$$(a_1,m,a_2)+(a_1,a_2,m)=0.$$

Далее, правоальтернативный A-бимодуль M является бинарно $(-1,1)$-бимодулем, если A является бинарно $(-1,1)$-алгеброй и для всех $m\in M$ и $a_1,\,a_2,\,a_3\in A$ выполнены линеаризации (14):

$$[\Delta(a_1,a_2,a_3),m]+[\Delta(a_1,a_2,m),a_3]=0, \tag{15}$$

$$[\Delta(m,a_1,a_2),a_3]+[\Delta(m,a_1,a_3),a_2]=0. \tag{16}$$

Бимодуль M над алгеброй с единицей 1 называется *унитальным*, если операторы правого R_1 и левого умножения L_1 на 1, действующие на M, совпадают с тождественным отображением M на себя.

2.4. Общие обозначения.. Всюду ниже используются обозначения:

A — бинарно $(-1,1)$-алгебра;

если $X \subseteq A$, то $\langle X \rangle$ — подпространство, порожденное X, и $idl_A\{X\}$ — идеал алгебры A, порожденный X;

M — унитальный A-бимодуль в многообразии бинарно $(-1,1)$-алгебр;

$E(M,A)$ — расщепляемое нулевое расширение M и A;

$St(A)$ — идеал алгебры A, порожденный коммутаторами $[[x,y],z]$;

если алгебра A альтернативна, то положим

$$E_0 = E_0(A) = \{[[a,b],b] | \, a,b \in A\} \quad \text{и} \quad E(A) = E_0 A;$$

поскольку $E_0(A)$ — идеал в алгебре Мальцева $A^{(-)}$ [6], то $E(A) \triangleleft A$ (идеал) и $E(A) \subseteq [A,A] + [A,A]^2$ [27]; если A ассоциативна, то $E(A) = St(A)$;

$K(A), N(A)$ и $Z(A)$ — коммутативный, ассоциативный и полный центры алгебры A соответственно:

$$K(A) = \{k \in A | [k,A] = 0\},$$

$$N(A) = \{n \in A | (n,A,A) = (A,n,A) = (A,A,n) = 0\},$$

$$Z(A) = K(A) \cap N(A);$$

$C(M) = C(E(M,A)) \cap M$, где $C \in \{K,N,Z\}$;

$$x,y,m,n \in M; \quad k \in K(M); \quad z \in Z(M);$$
$$a,b,c,w \in A, \quad p,q,r,s,t,u,v \in E(M,A).$$

3 Бинарно $(-1,1)$-бимодули над простыми некоммутативными алгебрами

Целью данного параграфа является доказательство теоремы 1. Нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

3.1. Свойства элементов вида $x_{a,b}$. Напомним [10], что A-бимодуль M называется *слабо альтернативным*, если для любых $a \in A, m \in M$ верно равенство $(a,a,m) = 0$.

Допустим, что мы находимся в условиях теоремы 1.

Е. Клейнфелд и Г. Смит [25] доказали, что во всякой бинарно $(-1,1)$-алгебре, в частности, в алгебре $E(M,A)$ верно тождество $[c(a,a,b),a] = 0$, значит, для альтернативной алгебры A верно для любых $a,b,c \in A, x \in M$

$$[cx_{a,b}, a] = 0, \text{ где } x_{a,b} := \Delta(x,a,b).$$

Линеаризуя $a \to b$, получаем в силу слабой альтернативности M

$$[cx_{a,b}, b] = 0. \tag{17}$$

Лемма 1. *Пусть A — простая унитальная некоммутативная альтернативная алгебра. Тогда для любых $a,b,c \in A$ верно*

$$(c,b,x_{a,b}) = (b,c,x_{a,b}) = 0.$$

Доказательство. В [28] (см. тождество (14)) доказано тождество

$$(v,b,(a,a,b)) = [b, v(a,a,b)], \text{ где } v = [p,q],$$

выполняющееся в любой бинарно $(-1,1)$-алгебре, значит, оно выполняется и в алгебре $E(M,A)$. Следовательно, $(v,b,x_{a,b}) = [b, vx_{a,b}]$. Отсюда и из (17) следует $(v,b,x_{a,b}) = 0$. Ввиду $[b,x_{a,b}] = 0$ и тождества (5) имеем

$$\big([A,A]^2, b, x_{a,b}\big) = 0.$$

Поскольку A простая некоммутативная альтернативная алгебра, а $E(A)$ - ненулевой идеал в A, то $A = E(A)$ и

$$(A,b,x_{a,b}) = (E(A),b,x_{a,b}) \subseteq ([A,A]+[A,A]^2, b, x_{a,b}) = 0.$$

Итак, $(c,b,x_{a,b}) = 0$. Отсюда в силу слабой альтернативности получается равенство $(b,c,x_{a,b}) = 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *Допустим, что алгебра A ассоциативна и находится в условиях леммы 1. Пусть $a,b \in A, w = [a,b], x \in M$. Тогда*

$$[A,a]x_{a,b} = 0, \quad [A,w]x_{a,b} = 0, \quad (A,w,x_{a,b}) = 0 = (w,A,x_{a,b}).$$

Доказательство. В силу тождеств (17), (7) и леммы 1 имеем

$$0 = [cx_{a,b}, b] = c[x_{a,b}, b] + [c,b]x_{a,b}$$
$$+2(c,x_{a,b},b) + (b,x_{a,b},c) = [c,b]x_{a,b},$$

т.е.

$$[c,b]x_{a,b} = 0. \tag{18}$$

Тем самым первое из требуемых в лемме равенств доказано. Отсюда линеаризацией $b \to a$ ввиду слабой альтернативности бимодуля получается равенство $[c,a]x_{a,b} = 0$. Из (18), последнего равенства и тождества Якоби следует

$$[c,w]x_{a,b} = [c,[a,b]]x_{a,b} = ([[c,a],b] - [[c,b],a])x_{a,b} = 0.$$

Осталось проверить справедливость равенства $(A,w,x_{a,b}) = 0$. Поскольку $[a,b] * (a,a,b) = 0$ в алгебре $E(M,A)$ (запись $p * q$ означает любое из произведений pq или qp), то $w * x_{a,b} = 0$ и достаточно понять, что $(Aw)x_{a,b} = 0$. Ввиду леммы 1 и равенства (18) имеем:

$$(cw)x_{a,b} = (c[a,b])x_{a,b} =$$
$$\{[ca,b] - [c,b]a\} \cdot x_{a,b} = -[c,b]a \cdot x_{a,b} =$$
$$-[c,b] \cdot ax_{a,b} = -[c,b] \cdot x_{a,b}a = -[c,b]x_{a,b} \cdot a = 0.$$

Последнее равенство является следствием доказанного в силу слабой альтернативности бимодуля M. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. *Допустим, что алгебра A находится в условиях леммы 2; $a,b \in A, w = [a,b], x \in M$. Тогда верно равенство*

$$idl_A(w^2) \cdot x_{a,b} = 0.$$

Доказательство. Пусть $r, p \in A$. Во-первых, в силу тождества Тэди (10)

$$((r,w,x_{a,b}),p,w) =$$
$$((r,p,w),w,x_{a,b}) + (r,(w,p,w),x_{a,b}) + (r,w,(x_{a,b},p,w))$$
$$+(r,w,x_{a,b}[p,w]) - (r,w,x_{a,b})[p,w] - (r,w,[p,w])x_{a,b},$$

откуда ввиду ассоциативности A и леммы 2 имеем

$$(r,w,(x_{a,b},p,w)) + (r,w,x_{a,b}[p,w]) = 0.$$

Докажем, что первое слагаемое равно 0:

$$(r,w,(x_{a,b},p,w)) = -(r,w,(x_{a,b},w,p)) = -(r,w,\Delta(x_{a,b},w,p)) = 0,$$

так как обозначая через $X = x_{a,b} \in M$ имеем

$$\Delta(X,w,p) = X_{w,p}, (r,w,\Delta(X,w,p)) = (r,w,X_{w,p}) = 0$$

по лемме 1. Значит,

$$(r,w,x_{a,b}[p,w]) = 0. \tag{19}$$

Заметим, что $w \cdot x_{a,b}[p,w] = 0$. В самом деле, $(w, x_{a,b}, A) = 0$ в силу леммы 2; тогда $w \cdot x_{a,b}[p,w] = (wx_{a,b})[p,w] = 0$ вновь по лемме 2, значит, ввиду (19) верно равенство

$$(rw)(x_{a,b}[p,w]) = 0.$$

Далее, $[p,w]x_{a,b} = 0$ по лемме 2. Значит, из двух последних равенств получаем

$$0 = (rw)(x_{a,b} \circ [p,w]) = (rw)x_{a,b} \cdot [p,w] + (rw)[p,w] \cdot x_{a,b}$$

$$= (rw)[p,w] \cdot x_{a,b} \text{ в силу леммы } 2$$

$$= (rwpw - rw^2 \cdot p)x_{a,b}.$$

Осталось заметить, что $(rwp \cdot w)x_{a,b} = 0$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Допустим, что A — алгебра Кэли; $a, b \in A, w = [a,b], x \in M$. Тогда снова верно равенство $idl_A(w^2) \cdot x_{a,b} = 0$.*

Доказательство. Как и в случае ассоциативной алгебры верно $w * x_{a,b} = 0$. Отсюда в силу слабой альтернативности бимодуля

$$w^2 x_{a,b} = w(wx_{a,b}) = 0$$

и в силу тождества (2)

$$(c, w^2, x_{a,b}) = (c, w, w \circ x_{a,b}) = 0,$$

значит, $(Aw^2)x_{a,b} = 0$. Поскольку $w^2 \in Z(A)$, то $Aw^2 \lhd A$. □

3.2. Завершение доказательства теоремы 1. Мы должны доказать, что для любых элементов $a, b \in A, x \in M$ верно $x_{a,b} = 0$. Из лемм 3 и 4 следует, что для любых операторных слов

$$\xi_i = L_{a_i} R_{b_i},$$

где $L_a, R_b \colon A \to A, cL_a = ac, cR_b = cb$ — операторы умножения на элементы a, b в алгебре A, верно равенство

$$\left(\sum_i [a,b]^4 \xi_i \right) \cdot x_{a,b} = 0. \tag{20}$$

Заметим, что в силу тождества Клейнфелда $([a,b]^4, c, d) = 0$ (см. [15], с. 177) верно $A[a,b]^4 A$ – идеал в A. В частности, верно

$$\left(\sum_i [a,b]^8 \xi_i \right) \cdot x_{a,b} = 0. \tag{21}$$

Применим оператор линеаризации $\delta = \Delta_a^1(c)$ к равенству (21):

$$\left(\sum_i (([a,b]^4)^\delta \cdot [a,b]^4 + [a,b]^4 \cdot ([a,b]^4)^\delta) \xi_i \right) \cdot x_{a,b} + \\ + \left(\sum_i [a,b]^8 \xi_i \right) \cdot x_{c,b} = 0. \tag{22}$$

Слагаемые в верхней строчке равенства (22) равны 0 в силу (20), значит, верно равенство

$$\left(\sum_i [a,b]^8 \xi_i \right) \cdot x_{c,b} = 0. \tag{23}$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$\left(\sum_i [a,b]^{16} \xi_i \right) \cdot x_{c,d} = 0.$$

Если в алгебре A верно тождество $[a,b]^n = 0$, то множество её ниль-элементов совпадает с локально нильпотентным радикалом $\mathcal{L}(A)$ [15], и в силу простоты алгебры A радикал $\mathcal{L}(A) = 0$. Тогда алгебра A коммутативна, что противоречит условию теоремы 1. Отсюда вытекает, что $A = idl_A\{[a,b]^{16} | a, b \in A\}$ и тогда $x_{A,A} = 0$. Теорема 1 доказана.

3.3. Доказательство теоремы 2. Пусть $Z = Z(A)$ – центр алгебры A. Бимодуль M над A называется *центральным*, если выполнены равенства

$$[M, Z] = (M, Z, A) = (Z, A, M) = (A, M, Z) = 0.$$

В этом случае пространство M можно рассматривать как бимодуль над Z-алгеброй A.

В [10] доказано

Предложение 1. *Пусть A — унитальная простая альтернативная алгебра; M — неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль над A. Тогда*

а) бимодуль M унитален, централен и слабо альтернативен;

б) если A — поле, то бимодуль M ассоциативен;

в) если A — композиционная алгебра, то бимодуль M альтернативен.

Теперь можем перейти к доказательству теоремы 2. Простая альтернативная алгебра A либо ассоциативна, либо является алгеброй Кэли-Диксона над своим центром $Z = Z(A)$ (в этом случае она некоммутативна).

Если алгебра A некоммутативна, то теорема 2 немедленно вытекает из теоремы 1 и предложения 1 а), которое гарантирует унитальность и слабую альтернативность бимодуля M.

Если алгебра A коммутативна, то, поскольку характеристика основного поля отлична от 3, алгебра A ассоциативна и, значит, A — поле (расширение основного поля Φ). Тогда по предложению 1 б) бимодуль M ассоциативен. Теорема 2 доказана.

Замечание. Из теоремы 2 вытекает п. в) предложения 1 (основной результат работы [10]).

4 Доказательство теорем 3 - 5.

4.1. Доказательство теоремы 3.

Предложение 2. *Пусть A — конечно порожденная бинарно $(-1,1)$-алгебра, $K = K(A)$ — ее коммутативный центр. Тогда идеал $St(A)$ действует нильпотентно на идеале, порожденном множеством (K, A, A).*

Это предложение совпадает с теоремой 3 из работы [18].

Всюду в этом параграфе A — унитальная простая конечно порожденная некоммутативная альтернативная алгебра, M — унитальный бинарно $(-1,1)$-бимодуль над алгеброй A.

Лемма 5. *Пусть A и M — указанные ранее алгебра и бимодуль. Тогда*

а) $K(M) = Z(M)$;

б) Если $z \in Z(M)$, $a, b \in A$ и $z[a,b] = 0, [a,b] \neq 0$, то $z = 0$.

Доказательство. а) Пусть $k \in K(M), a, b \in A$. Заметим, что $St(A) \neq 0$ (иначе алгебра была бы ассоциативной с тождеством $[x,y]^2 = 0$, но таких простых алгебр нет [15]), значит, $St(A) = A$ в силу простоты алгебры и $1 \in St(A)$. Применим предложение 2 к алгебре $\mathrm{alg}_S\langle\{(k,a,b)\} \cup A\rangle$, где $S = E(M,A) = M \oplus A$. Тогда получим $(k,a,b) = 0$, значит, $K(M) = Z(M)$.

б) Поскольку $z \in Z(M)$, то $z \cdot idl_A[a,b] = 0$. Учитывая, что алгебра A проста, получаем $z = z \cdot 1 \in zA = z \cdot idl_A[a,b] = 0$. $\square$

Лемма 6. *Бимодуль M над алгеброй A слабо альтернативен.*

Доказательство. Пусть $a, b, c \in A, x \in M$ и $z = (a, a, x)$. В силу (14), $z \in K(M)$ и $z \in Z(M)$ по лемме 5. Поскольку

$$z[a, b] = [za, b] = [(a, a, x)a, b] = [(a, a, ax), b] = 0,$$

то $(a, a, x)[a, b] = 0$. Значит, для любых $a, b, c \in A$ верно

$$(a, a, x)[c, b] + \Delta(a, c, x)[a, b] = 0.$$

Рассмотрим два случая: $a \in Z(A)$ и $a \notin Z(A)$. Поскольку алгебра A альтернативна характеристики не 3, то $Z(A) = K(A)$ [15].

Если $a \in Z(A)$, то $0 = (a, a, x)[c, b]$ и $(a, a, x) = 0$ по лемме 5. Тем самым, доказано, что если $a \in Z(A)$, то $(a, a, x) = 0$.

Если $a \notin Z(A)$, то $(a, a, x)[a, b] = 0$ и $(a, a, x) = 0$.

Итак, в обоих случаях доказано, что для любых $a \in A, x \in M$ верно $(a, a, x) = 0$, т.е. бимодуль слабо альтернативен. $\square$

Из леммы 6 и теоремы 1 следует теорема 3.

4.2. Доказательство теоремы 4. Пусть A — полупростая конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра над алгебраически замкнутым полем Φ, т.е. $A = \Phi e_1 \oplus ... \oplus \Phi e_k$, M — бимодуль над A в многообразии строго $(-1,1)$-алгебр, т.е. расщепляемое нулевое расширение $E(M, A)$ является строго $(-1,1)$-алгеброй. Кроме того, пусть $e \in A$ и $e^2 = e$, $a \in A, x \in M$.

Докажем ряд соотношений в алгебре $E(M, A)$. Необходимые рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1^0. Докажем, что $(e, e, [a, x]) = 0$. Применяя тождество (5), тождество строгости и (14), имеем

$$(e, e, [a, x]) = e \circ (e, e, [a, x]) = 2(e, e, [a, x])e,$$

откуда и вытекает требуемое.

2^0. Верно, что $(e, e, x) = 0$. Достаточно применить тождество (5) и п. 1^0.

3^0. Докажем, что $[(e, a, x), e] = 0$. Используя тождество

$$[(x, y, x), z] = 2[x, (x, y, z)],$$

доказанное в [24], получаем $0 = [(e, a, e), x] = 2[e, (e, a, x)]$.

4^0. Докажем, что $(e, a, x) = 0$. Достаточно применить снова (5) и п. 3^0.

5^0. Наконец, покажем, что $(x, e, a) = 0$. В силу тождеств (2) и (3) имеем $(x, e, a) = (x, e^2, a) = (x, e, e \circ a) = 2(x, e, ea) = 2(x, e, a)e$, откуда следует $(x, e, a) = 0$.

Из пп. 4^0 и 5^0 следует ассоциативность A-бимодуля M. Теорема 4 доказана.

4.3. Доказательство теоремы 5. Если бимодуль M альтернативен над алгеброй $A = A_1 \oplus ... \oplus A_k$, то он альтернативен и как бимодуль над каждой из алгебр $A_1, ..., A_k$.

Обратно, пусть M — альтернативный бимодуль над каждой из алгебр A_i. Тогда для завершения доказательства теоремы 5 достаточно проверить, что $(x, a_1, a_2) = 0$, $(a_1, a_2, x) = 0$ для любых $a_i \in A_i (i = 1, 2), x \in M$. Доказательство этого факта представим в виде трех лемм.

Лемма 7. *Верно равенство* $(a_1, a_2, x) = (a_2, a_1, x)$.

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [28]), что в любой бинарно $(-1,1)$-алгебре верно тождество:

$$(a^2, a, x) = (a, a^2, x). \tag{24}$$

Линеаризации этого тождества имеют вид:

$$(a^2, b, x) + (a \circ b, a, x) = (a, a \circ b, x) + (b, a^2, x), \tag{25}$$

$$\begin{gathered}(a \circ b, c, x) + (b \circ c, a, x) + (c \circ a, b, x) = \\ (a, b \circ c, x) + (b, c \circ a, x) + (c, a \circ b, x).\end{gathered} \tag{26}$$

Положим $a = a_1, b = a_2$ в (25); тогда

$$(a_1^2, a_2, x) + (a_1 \circ a_2, a_1, x) = (a_1, a_1 \circ a_2, x) + (a_2, a_1^2, x),$$

значит, в силу равенств $A_i A_j = 0$, если $i \neq j$, имеем

$$(a_1^2, a_2, x) = (a_2, a_1^2, x).$$

В частности,

$$(e_1, a_2, x) = (a_2, e_1, x).$$

Используя (26), аналогично получаем

$$(a_1 \circ e_1, a_2, x) = (a_2, a_1 \circ e_1, x),$$

откуда $2(a_1, a_2, x) = 2(a_2, a_1, x)$, что и требовалось. □

Лемма 8. *Справедливы равенства:*

a) $(x, e_i, A) = 0$; b) $(e_i, A, x) = (A, e_i, x) = 0$.

Доказательство. a) Равенство $(x, e_i, A) = 0$ следует из тождеств (1), (2) и центральности элемента e_i в алгебре A:

$$(x, e_1, a_1) = (x, e_1^2, a_1) = (x, e_1, e_1 \circ a_1) = 2(x, e_1, a_1),$$

$$(x, e_1, a_2) = (x, e_1^2, a_2) = (x, e_1, e_1 \circ a_2) = 0.$$

b) Проверим теперь, что $(e_1, a_1, x) = 0$. Поскольку A_1-бимодуль M альтернативен, то в силу п. a)

$$(e_1, a_1, x) = (x, e_1, a_1) = 0. \tag{27}$$

Для доказательства остальных требуемых в лемме равенств в силу леммы 7 достаточно понять, что

$$(e_1, a_2, x) = 0. \tag{28}$$

Учитывая равенство $(x, e_1, a_2) = 0$, справедливое в силу п. а), и линеаризацию тождества $[a, (a, a, b)] = 0$, имеем

$$[e_1, (e_1, x, a_2)] = [e_1, (e_1, x, a_2) + (x, e_1, a_2)] = -[x, (e_1, e_1, a_2)] = 0. \quad (29)$$

В силу (5), (27) и (29) имеем

$$(e_1, a_2, x) = (e_1^2, a_2, x) = e_1(e_1, a_2, x) + (e_1, a_2, x)e_1 = 2(e_1, a_2, x)e_1,$$

откуда и вытекает требуемое равенство (28). □

Лемма 9. *Верны равенства* $(x, a_1, a_2) = 0, \ (a_1, a_2, x) = 0.$

Доказательство. Первое равенство следует из (2) и центральности e_1:

$$2(x, a_1, a_2) = (x, a_1 \circ e_1, a_2) = (x, a_1, e_1 \circ a_2) + (x, e_1, a_1 \circ a_2) = 0.$$

Для доказательства второго равенства ввиду унитальности бимодуля достаточно проверить, что

$$(a_1, a_2, x)e_i = 0 \,\text{при всех}\, i = 1, ..., k. \quad (30)$$

Если $i \neq 1$, то на основании тождества (5) и леммы 8 б) имеем

$$(a_1, a_2, x)e_i = (a_1 e_i, a_2, x) + (a_1, e_i, [a_2, x]) - a_1(e_i, a_2, x) = 0.$$

Если же $i = 1$, то в силу доказанного и леммы 7

$$(a_1, a_2, x)e_1 = (a_2, a_1, x)e_1 = 0.$$

Тема самым, равенство (30), а с ним и леммы доказаны. □

Из леммы 9 немедленно вытекает альтернативность A-бимодуля M, что завершает доказательство теоремы 5.

5 Теорема о координатизации

Пусть унитальная правоальтернативная алгебра A над полем Φ содержит подалгебру $S = M_n(\Phi), n \geq 3$, матриц над Φ с общей единицей. Допустим, что A — ассоциативный S-бимодуль. Тогда он является прямой суммой регулярных S-бимодулей

$$A = \bigoplus_i S e_i,$$

где $[e_i, S] = 0, (e_i, S, S) = (S, e_i, S) = 0$. Обозначим Φ-подпространство, порожденное всеми элементами e_i, через E. Легко видеть, что

$$E = \{e \in A | [e, S] = 0\}.$$

Сделаем одно замечание, которое будет использовано ниже без дополнительных пояснений.

Поскольку $e_{12} = [e_{12}, e_{11}]$ и $e_{11} - e_{22} = [e_{12}, e_{21}]$, то пространство $[S, S]$ порождается элементами $e_{11} - e_{ii}, e_{jk}, i \neq 1, j \neq k$. Этих элементов ровно $n^2 - 1$ и они линейно независимы, поэтому $S = \Phi 1 + [S, S]$. Это означает, что $S = \Phi 1 + [[S, S], S]$.

Лемма 10. *Верно равенство*

$$(A, A, S) = 0. \tag{31}$$

Доказательство. Всюду ниже $x, y \in A, a, b \in S$. В силу (5) и ассоциативности S-бимодуля A получаем

$$(x, y, [a, b]) = 0.$$

Поскольку $(x, y, 1) = 0$, то в силу равенства $S = \Phi 1 + [S, S]$ получаем требуемое. □

Лемма 11. *Верно равенство*

$$(A, E, E) = 0. \tag{32}$$

Доказательство. Всюду ниже $e, e' \in E, a, b \in S, x \in A$. В силу линеаризованного тождества (6) и (31) имеем

$$0 = ((x, e, e'), a, b) + ((x, a, e'), e, b) + ((x, e, b), a, e') + ((x, a, b), e, e')$$
$$+(x, e, e')[a, b] + (x, a, e')[e, b] + (x, e, b)[a, e'] + (x, a, b)[e, e']$$
$$= (x, e, e')[a, b].$$

Тогда верно равенство $(x, e, e')S' = 0$, где S' — коммутаторный идеал алгебры S, значит, $(x, e, e') = 0$. □

Лемма 12. *Верно равенство*

$$(A, A, A) = 0.$$

Доказательство. Применяя (9), (31) и (32), мы получаем

$$2(x, ae, e') = 2(x, e, e')a + 2(x, a, e')e + (x, [a, e], e')$$
$$+(x, a, [e', e]) + (x, e, [e', a]) = 0,$$

откуда

$$(A, A, E) = 0. \tag{33}$$

Наконец, в силу равенств (4), (31) и (33) имеем

$$(x, ae, be') = -(x, be' \cdot e, a) + (x, e, be')a + (x, e, a)be' = 0,$$

что доказывает лемму. □

Итак, мы доказали, что алгебра A ассоциативна. Тогда векторное пространство E является подалгеброй в A, и $A \cong S \otimes E$. Теорема 6 доказана.

Теперь мы можем доказать следствие из теоремы 6.

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие правоальтернативных алгебр, удовлетворяющих тождеству

$$(x, y, [x, y])_\sigma = 0. \tag{34}$$

Заметим, что правоальтернативная алгебра A удовлетворяет тождеству (34) тогда и только тогда, когда ее присоединенная алгебра $A^{(-)}$ бинарно лиева.

Рассмотрим унитальный $\mathfrak{M}$-бимодуль M над алгеброй $S = M_n(\Phi), n \geq 3$. Докажем, что M ассоциативен. Обозначим через S^* подалгебру в алгебре линейных преобразований $\mathrm{End}_\Phi(M)$, порожденную операторами правого и левого умножения на элементы из S. Введем произвольным образом порядок на множестве матричных единиц алгебры S. Используя лемму 4 из [?], легко понять, что алгебра S^* конечномерна. Возьмем $m \in M$ и рассмотрим бимодуль mS^* над S. Тогда mS^* является также конечномерным бинарно лиевым бимодулем над простой алгеброй Ли $[S, S]$ бесследных матриц порядка $n \geq 3$. В силу [8], лемма 11, бимодуль mS^* над алгеброй $[S, S]$ является лиевым. Тогда в силу тождества (8) он является $(-1, 1)$-бимодулем над алгеброй S и по теореме 3 он альтернативен, значит, ассоциативен. Тем самым, доказано, что бимодуль M над алгеброй S также ассоциативен.

Из сказанного и теоремы 6 немедленно вытекает указанное следствие.

6 Контрпримеры

6.1. Неразложимый неунитальный $(-1, 1)$-бимодуль над основным полем Φ. Напомним, что бимодуль называется *неразложимым*, если он не представим в виде прямой суммы своих собственных подмодулей.

Рассмотрим полупростую алгебру $A = \Phi \cdot e$ с единицей e и 2-мерное векторное пространство V с базисом v_1, v_2 и действием

$$\begin{aligned} (\alpha e) \cdot v_1 &= \alpha v_2, & (\alpha e) \cdot v_2 &= 0, \\ v_1 \cdot (\alpha e) &= \alpha(v_1 + v_2), & v_2 \cdot (\alpha e) &= 0, \end{aligned}$$

где $\alpha \in \Phi$. Полагая $L = L_e,\ R = R_e$, и используя правую форму записи, укажем матрицы этих операторов в базисе v_1, v_2 (мы не делаем различий в обозначениях операторов и их матриц):

$$L = e_{12}, \qquad R = e_{11} + e_{12}, \quad \text{где } e_{ij} \text{ — матричные единицы.}$$

Для проверки правой альтернативности бимодуля достаточно для любого $v \in V$ доказать равенства

$$(v, e, e) = 0, \qquad (e, e, v) + (e, v, e) = 0. \tag{35}$$

В операторной форме они принимают вид $R^2 = R$ и

$$L - L^2 + LR - RL = e_{12} + e_{12}(e_{11} + e_{12}) - (e_{11} + e_{12})e_{12} = 0,$$

значит, бимодуль V правоальтернативен. Кроме того, легко понять, что V является $(-1, 1)$-бимодулем над A. В самом деле, определяющее соотношение (12): $(v, a, b) + (a, b, v) + (b, v, a) = 0$ сводится к проверке второго равенства из (35).

Заметим, что бимодуль V неальтернативен: $L - L^2 = L \neq 0$.

Покажем, что он неразложим; у него имеется единственный подмодуль, совпадающий с одномерным подпространством, порожденным вектором v_2. Допустим, что одномерное пространство U с базисным элементом $v_1+\beta v_2$ является A-подмодулем. Тогда U содержит элементы

$$(v_1+\beta v_2)e = v_1+v_2, \quad e(v_1+\beta v_2) = v_2,$$

что противоречит одномерности U.

6.2. Неразложимый унитальный $(-1,1)$-бимодуль над 2-мерной расщепляемой композиционной алгеброй. Рассмотрим полупростую алгебру $A = \Phi e_1 \oplus \Phi e_2$ (прямая сумма двух полей), 2-мерное векторное пространство V с базисом v_1, v_2 и действием

$$v_1 L = v_2, \quad v_2 L = 0, \quad v_1 R = v_1+v_2, \quad v_2 R = 0,$$

где $L = L_{e_1}$, $R = R_{e_1}$, $1 = e_1+e_2$ действует унитально, т.е. $v\cdot 1 = 1\cdot v = v$. Далее,

$$L = e_{12}, \quad R = e_{11} + e_{12}.$$

Легко понять, что V является $(-1,1)$-бимодулем над A. Как правая альтернативность бимодуля, так и проверка равенства (12) сводится к проверке следующих соотношений для произвольного $v \in V$:

$$(v, e_1, e_1) = 0, \qquad (e_1, e_1, v) + (e_1, v, e_1) = 0.$$

Имеем в операторной форме $R^2 = R$ и

$$L - L^2 + [L, R] = e_{12} + [e_{12}, e_{11} + e_{12}] = e_{12} + [e_{12}, e_{11}] = 0.$$

Докажем, что бимодуль V неразложим. Заметим, что Φv_2 является одномерным подбимодулем над A. Пусть U – подмодуль, порожденный элементом $u = v_1 + \alpha v_2$, где $\alpha \in F$. Тогда $uL = v_1 L + \alpha v_2 L = v_2 \in U$, откуда следует, что $U = V$. Тем самым, доказано, что A-бимодуль V неразложим.

Заметим, что бимодуль V не является слабо альтернативным:

$$(e_1, e_1, v_1) = e_1 v_1 - e_1(e_1 v_1) = v_2 - e_1 v_2 = v_2;$$

он также не является строго $(-1,1)$-бимодулем, так как

$$[v_1, e_1] = (v_1+v_2) - v_2 = v_1.$$

6.3. Неразложимый унитальный $(-1,1)$-бимодуль над квадратичным расширением $\Phi(\sqrt{\lambda})$. Пусть $A = \Phi(c)$ — поле, являющееся квадратичным расширением основного поля Φ), где $c^2 = \lambda \cdot 1$ и $\lambda \in \Phi, c \notin \Phi$. Расщепляемое нулевое расширение в многообразии (-1,1)-алгебр 1-мерного пространства $\Phi \cdot x$ и алгебры A, действующей унитально, является 6-мерным векторным пространством V_0 с базисом $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2$:

$$f_1 = x, \quad f_2 = [c, x], \quad g_1 = (c\circ x)c, \quad g_2 = x \circ c,$$
$$h_1 = (c, c, x), \quad h_2 = (c, c, x)c.$$

Умножение на элемент c заданно правилами:

$$
\begin{aligned}
&f_1c=-\frac{1}{2}f_2+\frac{1}{2}g_2, &&cf_1=\frac{1}{2}f_2+\frac{1}{2}g_2,\\
&f_2c=-2\lambda f_1+g_1, &&cf_2=2\lambda f_1-g_1-2h_1,\\
&g_1c=cg_1=\lambda g_2, &&g_2c=cg_2=g_1,\\
&h_1c=ch_1=h_2, &&h_2c=ch_2=\lambda h_1.
\end{aligned}
$$

Если бы A-бимодуль V_0 был вполне приводим, то он являлся бы прямой суммой неприводимых A-подбимодулей, а каждый такой бимодуль альтернативен в силу теоремы 2, значит, ассоциативен; но это не так. Таким образом, конечное расширение поля Φ обладает $(-1,1)$-бимодулем, который не является прямой суммой неприводимых подбимодулей.

Кроме того, всякий A-бимодуль (для любой алгебры A) является прямой суммой неразложимых A-подбимодулей, значит, существуют неассоциативные неразложимые A-бимодули. Укажем такой 4-мерный бимодуль.

Покажем, что A-бимодуль V_0 разложим, т.е. $V_0=V\oplus V'$, где

$$V=\langle e_1,\dots,e_4\rangle,\qquad V'=\langle g_1,g_2\rangle,$$

$$e_1:=-2\lambda f_1+g_1,\quad e_2:=f_2,\quad e_3:=h_1,\quad e_4:=h_2.$$

Ясно, что $V\cap V'=0$. Кроме того, V' является A-подбимодулем. Поскольку справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
&e_1c=\lambda e_2, &&ce_1=-\lambda e_2,\\
&e_2c=e_1, &&ce_2=-e_1-2e_3,\\
&e_3c=ce_3=e_4, &&e_4c=ce_4=\lambda e_3.
\end{aligned}
$$

то V также является A-подбимодулем. Докажем, что A-бимодуль V неразложим. Обозначим через φ оператор $v\varphi=(c,c,v)$; тогда справедливы равенства

$$e_1\varphi=-2\lambda e_3,\quad e_2\varphi=2e_4,\quad e_i\varphi=0\,(i=3,4). \tag{36}$$

Проверим только первое соотношение:

$$
\begin{aligned}
e_1\varphi=(c,c,e_1)&=c^2e_1-c(ce_1)=\lambda e_1-c(-\lambda e_2)\\
&=\lambda e_1+\lambda(ce_2)=\lambda e_1+\lambda(-e_1-2e_3)=-2\lambda e_3.
\end{aligned}
$$

1^0. Положим $U=\langle e_3,e_4\rangle$. Докажем, что $\mathrm{Ker}(\varphi)=U$.

В силу (36) имеем: $e_3,e_4\in\mathrm{Ker}(\varphi)$. Докажем обратное включение. Если $v:=\sum_{i=1}^4\alpha_ie_i\in\mathrm{Ker}(\varphi)$, где $\alpha_i\in\Phi$, то $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2\in\mathrm{Ker}(\varphi)$ и в силу (36)

$$0=\alpha_1e_1\varphi+\alpha_2e_2\varphi=-2\alpha_1\lambda e_3+2\alpha_2e_4.$$

Значит, $\alpha_1=\alpha_2=0$ и $v=\alpha_3e_2+\alpha_4e_4$, то есть $\mathrm{Ker}(\varphi)\subseteq\langle e_3,e_4\rangle$.

Итак, $\mathrm{Ker}(\varphi)=U$. Заметим, что U является A-подбимодулем в V.

2^0. Докажем, что V не имеет одномерных (над Φ) A-подбимодулей.

Пусть $\langle v\rangle$ — одномерный A-бимодуль. Тогда $vc=\gamma v$, $cv=\delta v$ для некоторых $\gamma,\delta\in\Phi$. Имеем:

$$(c,v,c)=(cv)c-c(vc)=\gamma\delta v-\delta\gamma v=0.$$

Далее, $\lambda v=vc^2=(vc)c=\gamma vc=\gamma^2 v$, значит, $\lambda=\gamma^2$, что невозможно. П. 2^0 доказан.

Заметим, что бимодуль W над алгеброй A ассоциативен тогда и только тогда, когда $W\subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. Из пп. 1^0, 2^0 вытекает

3^0. Бимодуль V содержит единственный собственный ассоциативный подбимодуль U.

4^0. Докажем, что всякий неассоциативный подбимодуль W в V содержит U. В самом деле, $0\neq W\varphi\subseteq W\cap U$. Отсюда в силу п. 2^0 получаем требуемое.

5^0. Теперь можем доказать неразложимость бимодуля V. Допустим, что $V=V_1\oplus V_2$ является прямой суммой ненулевых подбимодулей V_1 и V_2. Эти подмодули 2-мерны как подпространства над Φ. Но тогда в силу пп. 3^0 и 4^0 каждый из них совпадает с U, что невозможно.

6.4. Неразложимый унитальный строго $(-1,1)$-бимодуль над полем $\Phi(t)$ рациональных функций. Пусть $\Phi(t)$ — поле дробно-рациональных функций над Φ; кроме того, пусть $f,g,h,...,\xi,\eta\in\Phi(t)$; V — векторное пространство над Φ с базисом x,y,z. Рассмотрим векторное пространство $M=V\otimes_\Phi\Phi(t)$ над полем Φ; будем писать xf вместо $x\otimes f$. Превратим M в бимодуль над $\Phi(t)$, определив действия:

$$\begin{aligned}
&x\eta\cdot\xi=x(\xi\eta), &&\xi\cdot x\eta=x(\xi\eta)+y(\xi'\eta)+z(\xi''\eta+\xi'\eta'),\\
&y\eta\cdot\xi=\xi\cdot y\eta=y(\xi\eta), &&z\eta\cdot\xi=\xi\cdot z\eta=z(\xi\eta),
\end{aligned}$$

где f' — производная функции f по переменной t. Заметим, что бимодуль M унитален.

Тем самым, расщепляемое нулевое расширение $S=M\oplus\Phi(t)$ является линейной алгеброй над полем Φ. Докажем, что S — строго $(-1,1)$-алгебра. Ясно, что $y\xi,z\xi\in Z(S)$. Значит, $[S,S]=[M,\Phi(t)]\subseteq y\Phi(t)+z\Phi(t)\subseteq Z(S)$, откуда $[[S,S],S]=0$. Кроме того, $\Phi(t)$-бимодуль $M\otimes_\Phi\Phi(t)$ ассоциативен справа. Следовательно, для проверки правой альтернативности алгебры S достаточно понять, что

$$(f,xg,h)+(f,h,xg)=0.$$

Вычислим каждый из этих ассоциаторов:

$$\begin{aligned}
(f,xg,h)&=(f\cdot xg)\cdot h-f\cdot x(gh)=\\
&\quad x(fgh)+y(f'gh)+z(f''gh+f'g'h)\\
&\qquad-\big(x(fgh)+y(f'gh)+z(f''gh+f'(gh)')\big)=\\
&\qquad z(f'g'h-f'(gh)')=-z(f'gh'),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(f,h,xg) = (fh)\cdot(xg) - f\cdot(h\cdot(xg)) = \\
& x(fhg) + y\left((fh)'g\right) + z\left((fh)''g + (fh)'g'\right) \\
& \qquad - f\cdot\left(x(hg) + y(h'g) + z(h''g + h'g')\right) = \\
& z(f''hg + 2f'h'g + fh''g + f'hg' + fh'g' \\
& \; - f''hg - f'h'g - f'hg' - fh''g - fh'g') = z(f'h'g).
\end{aligned}
$$

Значит, алгебра S правоальтернативна, и тем самым доказано, она строго $(-1,1)$-алгебра. Заметим, что алгебра S неассоциативна. Для этого вычислим ассоциатор (t,t,x). Поскольку

$$
t^2\cdot x = t^2\cdot x1 = xt^2 + 2yt + 2z, \qquad t(tx) = xt^2 + 2yt + z,
$$

то $(t,t,x) = z$.

По теореме 1 неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль над простой альтернативной алгеброй альтернативен, значит, строго $(-1,1)$-бимодуль над полем ассоциативен. Это означает, что $\Phi(t)$-бимодуль M не является вполне приводимым.

Покажем, что $\Phi(t)$-бимодуль M неразложим. Пусть N — подбимодуль в M, содержащий элемент $n = xf + u \in N, 0 \neq f \in A = \Phi(t)$, где $u \in Z(M) = yA + zA$. Тогда $n' = nf^{-1} = x + u' \in N, u' \in Z(A)$. Поскольку $[t,x] = y$, $(t,t,x) = z$, то $y = [t,n'], z = (t,t,n') \in N$, значит, $Z(M) \subseteq N$. Тогда $x \in N$ и $N = M$.

Отметим, что $\Phi(t)$-бимодуль M не является слабо альтернативным.

References

[1] S. Eilenberg, *Extensions of general algebras*, Ann. Soc. Polon. Math., **21** (1948), 125–134. Zbl 0031.34303

[2] R.D. Schafer, *Representations of alternative algebras*, Trans. Am. Math. Soc., **72** (1952), 1–17. Zbl 0046.03503

[3] N. Svartholm, *On the algebras of relativistic quantum theories*, Fysiogr. Sällsk. Lund Förh., **12**:9 (1942), 94–108. Zbl 0060.45305

[4] N. Jacobson, *Structure of alternative and Jordan bimodules*, Osaka Math. J., **6** (1954), 1–71. Zbl 0059.02902

[5] R. Carlsson, *Malcev–Moduln*, J. Reine Angew. Math., **281** (1976), 199–210. Zbl 0326.17010

[6] E.N. Kuz'min, *Mal'cev algebras and their representations*, Algebra Logic, **7** (1968), 48–69. Zbl 0204.36104

[7] A.M. Slinko, I.P. Shestakov, *Right representations of algebras*, Algebra Logic, **13** (1975), 312–333. Zbl 0342.17003

[8] A.N. Grishkov, *Structure and representations of binary-Lie algebras*, Math. USSR, Izv., **17** (1981), 243–269. Zbl 0468.17007

[9] L. Ikemoto Murakami, I.P. Shestakov, *Irreducible unital right alternative bimodules*, J. Algebra, **246**:2 (2001), 897–914. Zbl 1002.17018

[10] S.V. Pchelintsev, *Irreducible binary (-1,1)-bimodules over simple finite-dimensional algebras*, Sib. Math. J., **47**:5 (2006), 934–939. Zbl 1150.17025

[11] I. Shestakov, M. Trushina, *Irreducible bimodules over alternative algebras and superalgebras*, Trans. Am. Math. Soc., **368**:7 (2016), 4657–4684. Zbl 1397.17006

[12] L.R. Borisova, S.V. Pchelintsev, *On the structure of alternative bimodules over semisimple Artinian algebras*, Russ. Math., **64**:8 (2020), 1–7. Zbl 1475.17050

[13] L.I. Murakami, S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, *Right alternative unital bimodules over the matrix algebras of order* $\geq$ 3, Sib. Math. J., **63**:4 (2022), 743–757. Zbl 1498.17051

[14] S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, I.P. Shestakov, *Right alternative bimodules over Cayley algebra and coordinatization theorem*, J. Algebra, **572** (2021), 111–128. Zbl 1475.17052

[15] K.A. Zhevlakov, A.M. Slin'ko, I.P. Shestakov, A.I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Pure and Applied Mathematics, **104**, Academic Press, Inc., New York etc., 1982. Zbl 0487.17001

[16] L.A. Skornyakov, *Right-alternative skew-filds*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **15**:2 (1951), 177–184. Zbl 0042.03501

[17] E. Kleinfeld, *Right alternative rings*, Proc. Am. Math. Soc., **4** (1953), 939–944. Zbl 0052.26703

[18] S.V. Pchelintsev, *On central ideals of finitely generated binary (-1,1)-algebras*, Sb. Math., **193**:4 (2002), 585–607. Zbl 1035.17044

[19] A. Thedy, *Right alternative rings*, J. Algebra, **37**:1 (1975), 1–43. Zbl 0318.17011

[20] A.A. Albert, *The structure of right alternative algebras*, Ann. Math. (2), **59** (1954), 408–417. Zbl 0055.26501

[21] M. Zorn, *Theorie der alternativen Ringe*, Abhandlungen Hamburg, **8** (1930), 123–147. JFM 56.0140.01

[22] V.G. Skosyrskii, *Right alternative algebras*, Algebra Logic, **23** (1984), 131–136. Zbl 0572.17013

[23] I.M. Miheev, *Simple right alternative rings*, Algebra Logic, **16** (1978), 456–476. Zbl 0401.17009

[24] I.R. Hentzel, *The characterization of* $(-1,1)$-*rings*, J. Algebra, **30** (1974), 236–258. Zbl 0284.17001

[25] E. Kleinfeld, H.F. Smith, *Locally* $(-1,1)$-*rings*, Commun. Algebra, **3** (1975), 219–237. Zbl 0302.17001

[26] S.V. Pchelintsev, *Defining identities of a variety of right alternative algebras*, Mat. Zametki, **20**:2 (1976), 161–176. Zbl 0341.17006

[27] S.V. Pchelintsev, *Prime alternative algebras that are nearly commutative*, Izv. Math., **68**:1 (2004), 181–204. Zbl 1071.17024

[28] I.R. Hentzel, H.F. Smith, *Simple locally* $(-1,1)$ *nil rings*, J. Algebra, **101** (1986), 262–272. Zbl 0588.17022

Sergey Valentinovich Pchelintsev
Department of Mathematics, Finance University under the Government of the Russian Federation,
Leningradsky prospect 49,
125993, Moscow, Russia
Email address: pchelinzev@mail.ru