S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том , стр. () УДК 512.554.5

MSC 17A70, 17D15

БИНАРНО $(-1,1)$-БИМОДУЛИ НАД ПОЛУПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ

С.В. ПЧЕЛИНЦЕВ

Abstract. It is proved that the irreducible binary $(-1,1)$-bimodule over simple algebra with a unit is alternative.

A criterion for alternativeness (hence, complete reducibility) of unital binary $(-1,1)$-bimodule over a semisimple finite-dimensional algebra is obtained.

It is proved that every unital strictly $(-1,1)$-bimodule over a finite-dimensional semisimple associative and commutative algebra is associative.

The coordinateization theorem is proved for the matrix algebra $\mathrm{M}_n(\Phi)$ of order $n \geq 3$ in the class of binary $(-1,1)$-algebras.

Finally, the following examples of indecomposable $(-1,1)$-bimodules are constructed: the non-unital bimodule over 1-dimensional algebra Φe; the unital bimodule over a 2-dimensional composition algebra $\Phi e_1 \oplus \Phi e_2$; the unital $(-1,1)$-bimodule over a quadratic extension $\Phi(\sqrt{\lambda})$ of the ground field; the unital strictly $(-1,1)$-bimodule over the field of fractionally rational functions of one variable $\Phi(t)$.

Keywords: strictly $(-1,1)$-algebra, $(-1,1)$-algebra, binary $(-1,1)$-algebra, $\mathfrak{M}$-bimodule, irreducible bimodule, complete reducibility.

Введение

Понятия бимодуля (бипредставления) для произвольного класса алгебр были введены С. Эйленбергом [1]. Наряду с ассоциативными алгебрами и алгебрами Ли теория бипредставлений была развита для других классов алгебр; так для альтернативных алгебр основные результаты получил Р.Д. Шафер [2], для йордановых алгебр - Н. Свартхольм [3] и Н. Джекобсон [4], для алгебр

Pchelintsev, S.V., Бинарно $(-1,1)$-бимодули над полупростыми алгебрами.

Работа выполнена при поддержке гранта FAPESP № 2023/01159-5.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

Мальцева - Р. Карлссон [5] и Е.Н. Кузьмин [6]. Для указанных классов алгебр справедливы теоремы о полной приводимости бимодулей над полупростыми конечномерными алгебрами.

А.М. Слинько и И.П. Шестаков [7] изучали правые представления право-альтернативных алгебр.

Важные результаты о структуре бимодулей в многообразии бинарно лиевых алгебр принадлежат А.Н.Гришкову [8].

Неприводимые правоальтернативные бимодули над алгеброй $\mathrm{M}_2(\Phi)$ матриц 2-го порядка изучали Л.И. Мураками и И.П. Шестаков [9]. В [9] было доказано, что над алгеброй $\mathrm{M}_2(\Phi)$ существует бесконечно много неизоморфных неприводимых правоальтернативных бимодулей и доказано, что не всякий бимодуль над алгеброй $\mathrm{M}_2(\Phi)$ вполне приводим.

В [10] изучались неприводимые бинарно $(-1,1)$-бимодули над простыми конечномерными алгебрами. В частности, было доказано, что всякий неприводимый бинарно $(-1,1)$ бимодуль над алгеброй A альтернативен в каждом из случаев: A — композиционная алгебра; A — конечномерная простая альтернативная алгебра характеристики 0. Там же был поставлен

Вопрос. *Верно ли, что неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль над простой алгеброй (в частности, над алгеброй с делением), является альтернативным.*

В [11] изучались неприводимые альтернативные бимодули над простыми альтернативными супералгебрами.

В [12] изучались альтернативные бимодули над полупростыми альтернативными артиновыми алгебрами. В ней были получены результаты:

1. Пусть A – полупростая альтернативная артинова алгебра, всякий ненулевой гомоморфный образ которой не является ассоциативной алгеброй с делением. Тогда альтернативный A-бимодуль вполне приводим.

2. Приведен пример альтернативного бимодуля над полем, который не является вполне приводимым.

В [13] изучались правоальтернативные бимодули над матричными алгебрами $\mathrm{M}_n(\Phi)$ при $n \geq 3$.

Целью данной статьи является изучение бимодулей над полупростыми алгебрами в некоторых классах бинарно $(-1,1)$-алгебр. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть A — унитальная простая некоммутативная альтернативная алгебра; M — унитальный слабо альтернативный бинарно $(-1,1)$-бимодуль над A. Тогда A-бимодуль M альтернативен.*

Попутно получается

Теорема 2. *Всякий неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль (возможно и неунитальный) над простой альтернативной алгеброй с единицей альтернативен.*

Этот результат дает ответ на сформулированный выше вопрос.

Теорема 3. *Пусть A — конечно порожденная унитальная простая некоммутативная альтернативная алгебра; M — унитальный бинарно $(-1,1)$-бимодуль над алгеброй A. Тогда бимодуль M альтернативен.*

Неизвестно, является ли существенным ограничение конечной порожденности в теореме 3.

Теорема 4. *Всякий строго $(-1,1)$-бимодуль над конечномерной полупростой ассоциативной и коммутативной алгеброй над алгебраически замкнутым полем ассоциативен, значит, вполне приводим.*

Ограничение конечномерности в теореме 4 существенно.

Теорема 5. *Пусть $A = A_1 \oplus ... \oplus A_k$ — прямая сумма идеалов, являющихся простыми альтернативными алгебрами, e_i — единица алгебры A_i; M — унитальный бинарно $(-1,1)$-бимодуль над A. Тогда A-бимодуль M альтернативен тогда и только тогда, когда M альтернативен как A_i-бимодуль для любого $i = 1, ..., k$.*

В [14] была доказана теорема о координатизации расщепляемой алгебры Кэли-Диксона. Мы приводим достаточные условия для выполнения теоремы о координатизации алгебры $M_n(\Phi), n \geq 3$ в рамках правоальтернативных алгебр.

Теорема 6. *Пусть унитальная правоальтернативная алгебра A над полем Φ содержит подалгебру S матриц порядка n над Φ с той же единицей. Предположим также, что A является ассоциативным S-бимодулем. Тогда алгебра A ассоциативна и $A \cong E \otimes S$, где E — ассоциативная и коммутативная алгебра.*

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. *Теорема о координатизации матричной алгебры $M_n(\Phi), n \geq 3$ справедлива для правоальтернативной алгебры A, для которой присоединенная алгебра $A^{(-)}$ бинарно лиева. В частности, теорема о координатизации алгебры $M_n(\Phi), n \geq 3$ справедлива для бинарно $(-1,1)$ алгебр.*

В силу результатов [13] для алгебр матриц $M_n(\Phi), n \geq 2$ теорема о координатизации в рамках правоальтернативных алгебр не имеет места.

Наконец, в работе приведены следующие примеры неразложимых $(-1,1)$-бимодулей:

а) неунитальный бимодуль над 1-мерной алгеброй $\Phi \cdot e$;

б) унитальный бимодуль над 2-мерной расщепляемой композиционной алгеброй $\Phi e_1 \oplus \Phi e_2$;

в) унитальный $(-1,1)$-бимодуль над квадратичным расширением $\Phi(\sqrt{\lambda})$ основного поля;

г) унитальный строго $(-1,1)$-бимодуль над полем дробно-рациональных функций $\Phi(t)$.

Заключительная часть работы над данной статьей была выполнена автором во время визита в университет Сан Пауло (01.04.2023 – 30.06.2023). Автор выражает сердечную благодарность И.П. Шестакову за приглашение, гостеприимство, создание идеальных условий для работы и полезные обсуждения результатов. Автор признателен также А.Н. Гришкову за консультацию по бинарно лиевым алгебрам.

1. Обозначения, известные результаты

1.1. **Правоальтернативные алгебры.** Всюду в работе термин «алгебра» означает линейную алгебру над бесконечным полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3. Бесконечность поля нужна для того, чтобы можно было проводить линеаризации тождеств.

Алгебра называется *унитальной*, если она обладает нейтральным элементом по умножению, который называется *единицей* и обозначается символом 1.

Алгебра называется *правоальтернативной*, если в ней выполнено тождество

$$(ax)y + (ay)x = a(x \circ y) \text{ или } (a,x,y) + (a,y,x) = 0, \tag{1}$$

где $(a,x,y) = (ax)y - a(xy)$ обозначает ассоциатор элементов a, x, y.

Алгебра, антиизоморфная правоальтернативной, называется *левоальтернативной.* Алгебра называется *альтернативной*, если она правоальтернативна и левоальтернативна одновременно. По теореме Артина алгебра альтернативна тогда и только тогда, когда всякая ее 2-порожденная подалгебра ассоциативна (см. [15]).

В правоальтернативной алгебре выполнены тождества (см. [16], [17]):

$$(a,x,y\circ z) + (a,y,z\circ x) + (a,z,x\circ y) = 0, \tag{2}$$

$$(a,x,xy) = (a,x,y)x = 0, \tag{3}$$

$$(a,x,yz) + (a,y,xz) = (a,x,z)y + (a,y,z)x, \tag{4}$$

$$(ab,x,y) + (a,b,[x,y]) = a(b,x,y) + (a,x,y)b, \tag{5}$$

$$((a,x,y),x,y) + (a,x,y)[x,y] = 0, \tag{6}$$

где $[a,b] = ab - ba$ — коммутатор, $a \circ b = ab + ba$ — симметризованное произведение. Тождества (3) и (4) называются *правыми тождествами Муфанг.*

Далее, в в правоальтенативной алгебре справедливы *коммутаторные тождества*:

$$[xy,z] = x[y,z] + [x,z]y + 2(x,y,z) + (z,y,x), \tag{7}$$

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 2S(x,y,z), \tag{8}$$

где $S(x,y,z) = (x,y,z) + (y,z,x) + (z,x,y)$ — циклическая сумма ассоциаторов.

В правоальтенативной алгебре из (4) легко вывести (см. [18])

$$2(a,xy,z) = 2(a,x,z)y + 2(a,y,z)x \tag{9}$$

$$+ (a,[x,y],z) + (a,x,[z,y]) + (a,y,[z,x]). \tag{10}$$

Напомним, что верно также *тождество Тэди* [19]

$$((a,b,c),x,y) = ((a,x,y),b,c) + (a,(b,x,y),c) + (a,b,(c,x,y)) +$$

$$(a,b,c[x,y]) - (a,b,c)[x,y] - (a,b,[x,y])c. \tag{11}$$

Отметим также, что во всякой алгебре верно *основное ассоциаторное тождество*:

$$(ab,c,d) - (a,bc,d) + (a,b,cd) = a(b,c,d) + (a,b,c)d. \tag{12}$$

Заметим, что разность между тождествами (12) и (5) при $x = c, y = d$ имеет вид

$$-(a,bc,d) + (a,b,dc) = (a,b,c)d - (a,c,d)b,$$

которое, по существу, совпадает с (4). Значит, тождество (5) представляет собой другую форму записи тождества Муфанг.

Тождество (5) впервые было доказано в [16].

Напомним, что на основании теорем Алберта [20] и Цорна [21] всякая конечномерная полупростая правоальтернативная алгебра над алгебраически замкнутым полем является прямой суммой идеалов, изоморфных либо матричным алгебрам, либо векторно-матричной алгебре Цорна (расщепляемой алгебре Кэли).

В связи с бесконечномерными простыми правоальтернативными алгебрами приведем замечательную теорему Скосырского [22]: всякая простая правоальтернативная алгебра с единицей альтернативна, и, значит, по теореме Клейнфелда либо ассоциативна, либо является алгеброй Кэли над своим центром [15]. Отметим также удивительный пример Михеева простой правоальтернативной ниль-алгебры индекса 3 [23].

1.2. **Бинарно $(-1,1)$-алгебры.** Напомним, что правоальтернативная алгебра называется

$(-1,1)$-*алгеброй*, если в ней выполнено тождество

$$S(x,y,z)=0; \tag{13}$$

строго $(-1,1)$-*алгеброй*, если в ней выполнено тождество

$$[[x,y],z]=0, \tag{14}$$

называемое тождеством *строгости*;

бинарно $(-1,1)$-*алгеброй*, если в ней выполнено тождество

$$[(x,x,y),y]=0. \tag{15}$$

Заметим, что правоальтернативная алгебра A является $(-1,1)$-алгеброй тогда и только тогда, когда её присоединенная алгебра $A^{(-)}$ является алгеброй Ли.

Кроме того, пересечение многообразий альтернативных и $(-1,1)$-алгебр совпадает с многообразием ассоциативных алгебр.

Известно [28], что всякая 2-порожденная подалгебра бинарно $(-1,1)$-алгебры над полем характеристики нуль является $(-1,1)$-алгеброй.

Введем обозначение, которое полезно в бинарно $(-1,1)$-алгебре:

$$\Delta(x,y,z)=(x,y,r)+(y,x,z).$$

1.3. **Бимодули в произвольном многообразии алгебр $\mathfrak{M}$.** Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр. Общее понятие бимодуля M над алгеброй A в многообразии $\mathfrak{M}$ принадлежит С. Эйленбергу [1]. Допустим, что для каждого $a\in A$ заданы отображения:

$$M\to M,\ m\mapsto am, \qquad M\to M,\ m\mapsto ma.$$

Предполагается, что композиции am, ma билинейны. Рассмотрим расщепляемое нулевое расширение $E(M,A)$ — это векторное пространство $M\oplus A$, на котором задано умножение:

$$(m_1+a_1)(m_2+a_2)=(m_1a_2+a_1m_2)+a_1a_2.$$

Если $E(M,A)\in\mathfrak{M}$, то говорят, что M является $\mathfrak{M}$-*бимодулем над* A.

Например, алгебра $E(M,A)$ ассоциативна тогда и только тогда, когда алгебра A ассоциативна и $(a_1,\,a_2,\,m)=(a_1,\,m,\,a_2)=(m,\,a_1,\,a_2)=0$ для всех $a_1,\,a_2\in A, m\in M$.

Отметим, что M — правоальтернативный бимодуль над правоальтернативной алгеброй A, если для всех $m \in M$ и $a_1,\ a_2 \in A$ выполнены равенства:

$$(m, a_1, a_2) + (m, a_2, a_1) = 0,$$

$$(a_1, m, a_2) + (a_1, a_2, m) = 0.$$

Далее, правоальтернативный A-бимодуль M является бинарно $(-1,1)$-бимодулем, если A является бинарно $(-1,1)$-алгеброй и для всех $m \in M$ и $a_1,\ a_2,\ a_3 \in A$ выполнены линеаризации (15):

$$[\Delta(a_1, a_2, a_3), m] + [\Delta(a_1, a_2, m), a_3] = 0, \tag{16}$$

$$[\Delta(m, a_1, a_2), a_3] + [\Delta(m, a_1, a_3), a_2] = 0. \tag{17}$$

Бимодуль M над алгеброй с единицей 1 называется *унитальным*, если операторы правого R_1 и левого умножения L_1 на 1, действующие на M, совпадают с тождественным отображением M на себя.

1.4. **Общие обозначения.** Всюду ниже используются обозначения:

A — бинарно $(-1,1)$-алгебра;

если $X \subseteq A$, то $\langle X \rangle$ — подпространство, порожденное X, и $idl_A\{X\}$ — идеал алгебры A, порожденный X

M — унитальный A-бимодуль в многообразии бинарно $(-1,1)$-алгебр;

$E(M,A)$ — расщепляемое нулевое расширение M и A;

$St(A)$ — идеал алгебры A, порожденный коммутаторами $[[x,y],z]$;

если алгебра A альтернативна, то положим

$$E_0 = \{[[a,b],b] \,|\, a, b \in A\} \quad \text{и} \quad E(A) = E_0 A;$$

поскольку $E_0(A)$ — идеал в алгебре Мальцева $A^{(-)}$ [6], то $E(A) \triangleleft A$ (идеал) и $E(A) \subseteq [A,A] + [A,A]^2$; если A ассоциативна, то $E(A) = St(A)$;

$K(A), N(A)$ и $Z(A)$ — коммутативный, ассоциативный и полный центры алгебры A соответственно:

$$K(A) = \{k \in A | [k, A] = 0\},$$

$$N(A) = \{n \in A | (n, A, A) = (A, n, A) = (A, A, n) = 0\},$$

$$Z(A) = K(A) \cap N(A);$$

$C(M) = C(E(M,A)) \cap M$, где $C \in \{K, N, Z\}$;

$$x, y, m, n \in M; \quad k \in K(M); \quad z \in Z(M);$$
$$a, b, c, w \in A, \quad p, q, r, s, t, u, v \in E(M,A).$$

2. Бинарно $(-1,1)$-бимодули над простыми некоммутативными алгебрами

Целью данного параграфа является доказательство теоремы 1. Нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

2.1. **Свойства элементов вида $x_{a,b}$.** Е. Клейнфелд и Г. Смит [25] доказали, что во всякой бинарно $(-1,1)$-алгебре, в частности, в алгебре $E(M,A)$ верно тождество $[c(a,a,b),a]=0$, значит, для альтернативной алгебры A верно для любых $a,b,c\in A, x\in M$

$$[cx_{a,b},a]=0,\ \text{где}\ x_{a,b}:=\Delta(x,a,b).$$

Линеаризуя $a\to b$, получаем в силу слабой альтернативности M

$$[cx_{a,b},b]=0. \tag{18}$$

Лемма 1. *Пусть A — простая унитальная некоммутативная альтернативная алгебра. Тогда для любых $a,b,c\in A$ верно*

$$(c,b,x_{a,b})=(b,c,x_{a,b})=0.$$

Доказательство. В [27] (см. тождество (15)) доказано тождество

$$(v,b,(a,a,b))=[b,v(a,a,b)],\ \text{где}\ v=[p,q],$$

выполняющееся в любой бинарно $(-1,1)$-алгебре, значит, оно выполняется и в алгебре $E(M,A)$. Следовательно, $(v,b,x_{a,b})=[b,vx_{a,b}]$. Отсюда и из (18) следует $(v,b,x_{a,b})=0$. Ввиду $[b,x_{a,b}]=0$ и тождества (5) имеем

$$\big([A,A]^2,b,x_{a,b}\big)=0.$$

Поскольку A простая некоммутативная альтернативная алгебра, а $E(A)$ - ненулевой идеал в A, то $A=E(A)$ и

$$(A,b,x_{a,b})=(E(A),b,x_{a,b})\subseteq([A,A]+[A,A]^2,b,x_{a,b})=0.$$

Итак, $(c,b,x_{a,b})=0$. Отсюда в силу слабой альтернативности получается равенство $(b,c,x_{a,b})=0$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Допустим, что алгебра A ассоциативна и находится в условиях леммы 1. Пусть $a,b\in A, w=[a,b], x\in M$. Тогда*

$$[A,a]x_{a,b}=0,\quad [A,w]x_{a,b}=0,\quad (A,w,x_{a,b})=0=(w,A,x_{a,b}).$$

Доказательство. В силу тождеств (18), (7) и леммы 1 имеем

$$\begin{gathered}0=[cx_{a,b},b]=c[x_{a,b},b]+[c,b]x_{a,b}\\ +2(c,x_{a,b},b)+(b,x_{a,b},c)=[c,b]x_{a,b},\end{gathered}$$

т.е.

$$[c,b]x_{a,b}=0. \tag{19}$$

Тем самым первое из требуемых в лемме равенств доказано. Отсюда линеаризацией $b\to a$ ввиду слабой альтернативности бимодуля получается равенство $[c,a]x_{a,b}=0$. Из (19), последнего равенства и тождества Якоби следует

$$[c,w]x_{a,b}=[c,[a,b]]x_{a,b}=([[c,a],b]-[[c,b],a])x_{a,b}=0.$$

Осталось проверить справедливость равенства $(A,w,x_{a,b})=0$. Поскольку $[a,b]*(a,a,b)=0$ в алгебре $E(M,A)$ (запись $p*q$ означает любое из произведений pq

или qp), то $w * x_{a,b} = 0$ и достаточно понять, что $(Aw)x_{a,b} = 0$. Ввиду леммы 1 и равенства (19) имеем:

$$(cw)x_{a,b} = (c[a,b])x_{a,b} =$$
$$\{[ca,b] - [c,b]a\} \cdot x_{a,b} = -[c,b]a \cdot x_{a,b} =$$
$$-[c,b] \cdot ax_{a,b} = -[c,b] \cdot x_{a,b}a = -[c,b]x_{a,b} \cdot a = 0.$$

Последнее равенство является следствием доказанного в силу слабой альтернативности бимодуля M. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. *Допустим, что алгебра A находится в условиях леммы 2; $a, b \in A, w = [a,b], x \in M$. Тогда верно равенство*

$$idl_A(w^2) \cdot x_{a,b} = 0.$$

Доказательство. Пусть $r, p \in A$. Во-первых, в силу тождества Тэди (11)

$$((r, w, x_{a,b}), p, w) =$$
$$((r,p,w), w, x_{a,b}) + (r, (w,p,w), x_{a,b}) + (r, w, (x_{a,b}, p, w))$$
$$+(r, w, x_{a,b}[p,w]) - (r, w, x_{a,b})[p,w] - (r, w, [p,w])x_{a,b},$$

откуда ввиду ассоциативности A и леммы 2 имеем

$$(r, w, (x_{a,b}, p, w)) + (r, w, x_{a,b}[p,w]) = 0.$$

Докажем, что первое слагаемое равно 0:

$$(r, w, (x_{a,b}, p, w)) = -(r, w, (x_{a,b}, w, p)) = -(r, w, \Delta(x_{a,b}, w, p)) = 0,$$

так как обозначая через $X = x_{a,b} \in M$ имеем

$$\Delta(X, w, p) = X_{w,p}, (r, w, \Delta(X, w, p)) = (r, w, X_{w,p}) = 0$$

по лемме 1. Значит,

$$(r, w, x_{a,b}[p,w]) = 0. \tag{20}$$

Заметим, что $w \cdot x_{a,b}[p,w] = 0$. В самом деле, $(w, x_{a,b}, A) = 0$ в силу леммы 2; тогда $w \cdot x_{a,b}[p,w] = (wx_{a,b})[p,w] = 0$ вновь по лемме 2, значит, ввиду (20) верно равенство

$$(rw)(x_{a,b}[p,w]) = 0.$$

Далее, $[p,w]x_{a,b} = 0$ по лемме 2. Значит, из двух последних равенств получаем

$$0 = (rw)(x_{a,b} \circ [p,w]) = (rw)x_{a,b} \cdot [p,w] + (rw)[p,w] \cdot x_{a,b}$$
$$= (rw)[p,w] \cdot x_{a,b} \text{ в силу леммы 2}$$
$$= (rwpw - rw^2 \cdot p)x_{a,b}.$$

Осталось заметить, что $(rwp \cdot w)x_{a,b} = 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Допустим, что A — алгебра Кэли; $a, b \in A, w = [a,b], x \in M$. Тогда снова верно равенство $idl_A(w^2) \cdot x_{a,b} = 0$.*

Доказательство. Как и в случае ассоциативной алгебры верно $w * x_{a,b} = 0$. Отсюда в силу слабой альтернативности бимодуля

$$w^2 x_{a,b} = w(wx_{a,b}) = 0$$

и в силу тождества (2)

$$(c, w^2, x_{a,b}) = (c, w, w \circ x_{a,b}) = 0,$$

значит, $(Aw^2)x_{a,b} = 0$. Поскольку $w^2 \in Z(A)$, то $Aw^2 \triangleleft A$. □

2.2. **Завершение доказательства теоремы 1.** Мы должны доказать, что для любых элементов $a, b \in A, x \in M$ верно $x_{a,b} = 0$. Из лемм 3 и 4 следует, что для любых операторных слов

$$\xi_i = L_{a_i} R_{b_i},$$

где $L_a, R_b \colon A \to A, cL_a = ac, cR_b = cb$ — операторы умножения на элементы a, b в алгебре A, верно равенство

$$\left(\sum_i [a,b]^4 \xi_i\right) \cdot x_{a,b} = 0. \tag{21}$$

Заметим, что в силу тождества Клейнфелда $([a,b]^4, c, d) = 0$ (см. [15], с. 177) верно $A[a,b]^4 A$ – идеал в A. В частности, верно

$$\left(\sum_i [a,b]^8 \xi_i\right) \cdot x_{a,b} = 0. \tag{22}$$

Применим оператор линеаризации $\delta = \Delta_a^1(c)$ к равенству (22):

$$\left(\sum_i (([a,b]^4)^\delta \cdot [a,b]^4 + [a,b]^4 \cdot ([a,b]^4)^\delta)\xi_i\right) \cdot x_{a,b} +$$

$$+ \left(\sum_i [a,b]^8 \xi_i\right) \cdot x_{c,b} = 0. \tag{23}$$

Слагаемые в верхней строчке равенства (23) равны 0 в силу (21), значит, верно равенство

$$\left(\sum_i [a,b]^8 \xi_i\right) \cdot x_{c,b} = 0. \tag{24}$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$\left(\sum_i [a,b]^{16} \xi_i\right) \cdot x_{c,d} = 0.$$

Если в алгебре A верно тождество $[a,b]^n = 0$, то множество её ниль-элементов совпадает с локально нильпотентным радикалом $\mathcal{L}(A)$ [15], и в силу простоты алгебры A радикал $\mathcal{L}(A) = 0$. Тогда алгебра A коммутативна, что противоречит условию теоремы 1. Отсюда вытекает, что $A = idl_A\{[a,b]^{16} | a, b \in A\}$ и тогда $x_{A,A} = 0$. Теорема 1 доказана.

2.3. **Доказательство теоремы 2.**

Определение 1. *=Бимодуль M называется* слабо альтернативным*, если для любых $a \in A, m \in M$ верно равенство $(a, a, m) = 0$.*

Определение 2. *Пусть $Z = Z(A)$ – центр алгебры A. Бимодуль M над A называется* центральным*, если выполнены равенства*

$$[M, Z] = (M, Z, A) = (Z, A, M) = (A, M, Z) = 0.$$

В этом случае пространство M можно рассматривать как бимодуль над Z-алгеброй A.

В [10] доказано, что

Предложение 1. *Пусть A — унитальная простая альтернативная алгебра; M — неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль над A. Тогда*

а) бимодуль M унитален, централен и слабо альтернативен;

б) если A — поле, то бимодуль M ассоциативен;

в) если A — композиционная алгебра, то бимодуль M альтернативен.

Теперь можем перейти к доказательству теоремы 2. Простая альтернативная алгебра A либо ассоциативна, либо является алгеброй Кэли-Диксона над своим центром $Z = Z(A)$ (в этом случае она некоммутативна).

Если алгебра A некоммутативна, то теорема 2 немедленно вытекает из теоремы 1 и предложения 1 а), которое гарантирует унитальность и слабую альтернативность бимодуля M.

Если алгебра A коммутативна, то поскольку характеристика основного поля отлична от 3 алгебра A ассоциативна и, значит, A — поле (расширение основного поля Φ). Тогда по предложению 1 б) бимодуль M ассоциативен. Теорема 2 доказана.

Замечание. Из теоремы 2 вытекает п. в) предложения 1 (основной результат работы [10]).

3. Доказательство теорем 3 - 5.

3.1. **Доказательство теоремы 3.**

Предложение 2. *Пусть A — конечно порожденная бинарно $(-1,1)$-алгебра, $K = K(A)$ — ее коммутативный центр. Тогда идеал $St(A)$ действует нильпотентно на идеале, порожденном множеством (K, A, A).*

Это предложение совпадает с теоремой 3 из работы [18].

Всюду в этом параграфе A — унитальная простая конечно порожденная некоммутативная альтернативная алгебра, M — унитальный бинарно $(-1,1)$-бимодуль над алгеброй A.

Лемма 5. *Пусть A и M — указанные ранее алгебра и бимодуль. Тогда*

а) $K(M) = Z(M)$;

б) Если $z \in Z(M)$, $a, b \in A$ и $z[a,b] = 0, [a,b] \neq 0$, то $z = 0$.

Доказательство. а) Пусть $k \in K(M), a, b \in A$. Заметим, что $St(A) \neq 0$ (иначе алгебра была бы ассоциативной с тождеством $[x,y]^2 = 0$, но таких простых алгебр нет [15]), значит, $St(A) = A$ в силу простоты алгебры и $1 \in St(A)$. Применим предложение 2 к алгебре $\mathrm{alg}_S\langle\{(k,a,b)\} \cup A\rangle$, где $S = E(M,A) = M \oplus A$. Тогда получим $(k,a,b) = 0$, значит, $K(M) = Z(M)$.

б) Поскольку $z \in Z(M)$, то $z \cdot idl_A[a,b] = 0$. Учитывая, что алгебра A проста, получаем $z = z \cdot 1 \in zA = z \cdot idl_A[a,b] = 0$. □

Лемма 6. *Бимодуль M над алгеброй A слабо альтернативен.*

Доказательство. Пусть $a, b, c \in A, x \in M$ и $z = (a,a,x)$. В силу (15): $z \in K(M)$ и $z \in Z(M)$ по лемме 5. Поскольку

$$z[a,b] = [za,b] = [(a,a,x)a,b] = [(a,a,ax),b] = 0,$$

т.е. $(a,a,x)[a,b] = 0$. Значит, для любых $a, b, c \in A$ верно

$$(a,a,x)[c,b] + \Delta(a,c,x)[a,b] = 0.$$

Рассмотрим два случая: $a \in Z(A)$ и $a \notin Z(A)$. Поскольку алгебра A альтернативна характеристики не 3, то $Z(A) = K(A)$ [15].

Если $a \in Z(A)$, то $0 = (a, a, x)[c, b]$ и $(a, a, x) = 0$ по лемме 5. Тем самым, доказано, что если $a \in Z(A)$, то $(a, a, x) = 0$.

Если $a \notin Z(A)$, то $(a, a, x)[a, b] = 0$ и $(a, a, x) = 0$.

Итак, в обоих случаях доказано, что для любых $a \in A, x \in M$ верно $(a, a, x) = 0$, т.е. бимодуль слабо альтернативен. □

Из леммы 6 и теоремы 1 следует теорема 3.

3.2. **Доказательство теоремы 4.** Положим A — полупростая конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра над алгебраически замкнутым полем Φ, т.е. $A = \Phi e_1 \oplus ... \oplus \Phi e_k$, M - бимодуль над A в многообразии строго $(-1,1)$-алгебр, т.е. расщепляемое нулевое расширение $E(M, A)$ является строго $(-1,1)$-алгеброй. Кроме того, пусть $e \in A$ и $e^2 = e$, $a \in A, x \in M$.

Докажем ряд соотношений в алгебре $E(M, A)$. Необходимые рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1^0. Докажем, что $(e, e, [a, x]) = 0$. Применяя тождество (5), тождество строгости и (15), имеем

$$(e, e, [a, x]) = e \circ (e, e, [a, x]) = 2(e, e, [a, x])e,$$

откуда и вытекает требуемое.

2^0. Верно, что $(e, e, x) = 0$. Достаточно применить тождество (5) и п. 1^0.

3^0. Докажем, что $[(e, a, x), e] = 0$. Используя тождество

$$[(x, y, x), z] = 2[x, (x, y, z)],$$

доказанное в [26], получаем $0 = [(e, a, e), x] = 2[e, (e, a, x)]$.

4^0. Докажем, что $(e, a, x) = 0$. Достаточно применить снова (5) и п. 3^0.

5^0. Наконец, покажем, что $(x, e, a) = 0$. В силу тождеств (2) и (3) имеем $(x, e, a) = (x, e^2, a) = (x, e, e \circ a) = 2(x, e, ea) = 2(x, e, a)e$, откуда следует $(x, e, a) = 0$.

Из пп. 4^0 и 5^0 следует ассоциативность A-бимодуля M. Теорема 4 доказана.

3.3. **Доказательство теоремы 5.** Если бимодуль M альтернативен над алгеброй $A = A_1 \oplus ... \oplus A_k$, то он альтернативен и как бимодуль над каждой из алгебр $A_1, ..., A_k$.

Обратно, пусть M — альтернативный бимодуль над каждой из алгебр A_i. Тогда для завершения доказательства теоремы 5 достаточно проверить, что $(x, a_1, a_2) = 0,\ (a_1, a_2, x) = 0$ для любых $a_i \in A_i (i = 1, 2), x \in M$. Доказательство этого факта представим в виде трех лемм.

Лемма 7. *Верно равенство* $(a_1, a_2, x) = (a_2, a_1, x)$.

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [27]), что в любой бинарно $(-1,1)$-алгебре верно тождество:

$$(a^2, a, x) = (a, a^2, x). \tag{25}$$

Линеаризации этого тождества имеют вид:

$$(a^2, b, x) + (a \circ b, a, x) = (a, a \circ b, x) + (b, a^2, x), \tag{26}$$

$$(a \circ b, c, x) + (b \circ c, a, x) + (c \circ a, b, x) =$$
$$(a, b \circ c, x) + (b, c \circ a, x) + (c, a \circ b, x). \tag{27}$$

Положим $a = a_1, b = a_2$ в (26); тогда

$$(a_1^2, a_2, x) + (a_1 \circ a_2, a_1, x) = (a_1, a_1 \circ a_2, x) + (a_2, a_1^2, x),$$

значит, в силу равенств $A_iA_j = 0$, если $i \neq j$, имеем

$$(a_1^2, a_2, x) = (a_2, a_1^2, x).$$

В частности,

$$(e_1, a_2, x) = (a_2, e_1, x).$$

Используя (27), аналогично получаем

$$(a_1 \circ e_1, a_2, x) = (a_2, a_1 \circ e_1, x),$$

откуда $2(a_1, a_2, x) = 2(a_2, a_1, x)$, что и требовалось. □

Лемма 8. *Справедливы равенства:*

$$\text{a) } (x, e_i, A) = 0; \qquad \text{b) } (e_i, A, x) = (A, e_i, x) = 0.$$

Доказательство. а) Равенство $(x, e_i, A) = 0$ следует из тождеств (1), (2) и центральности элемента e_i в алгебре A:

$$(x, e_1, a_1) = (x, e_1^2, a_1) = (x, e_1, e_1 \circ a_1) = 2(x, e_1, a_1),$$
$$(x, e_1, a_2) = (x, e_1^2, a_2) = (x, e_1, e_1 \circ a_2) = 0.$$

b) Проверим теперь, что $(e_1, a_1, x) = 0$. Поскольку A_1-бимодуль M альтернативен, то в силу п. а)

$$(e_1, a_1, x) = (x, e_1, a_1) = 0. \tag{28}$$

Для доказательства остальных требуемых в лемме равенств в силу леммы 7 достаточно понять, что

$$(e_1, a_2, x) = 0. \tag{29}$$

Учитывая равенство $(x, e_1, a_2) = 0$, справедливое в силу п. а), и линеаризацию тождества $[a, (a, a, b)] = 0$, имеем

$$[e_1, (e_1, x, a_2)] = [e_1, (e_1, x, a_2) + (x, e_1, e_2)] = -[x, (e_1, e_1, a_2)] = 0. \tag{30}$$

В силу (5), (28) и (30) имеем

$$(e_1, a_2, x) = (e_1^2, a_2, x) = e_1(e_1, a_2, x) + (e_1, a_2, x)e_1 = 2(e_1, a_2, x)e_1,$$

откуда и вытекает требуемое равенство (29). □

Лемма 9. *Верны равенства* $(x, a_1, a_2) = 0$, $(a_1, a_2, x) = 0$.

Доказательство. Первое равенство следует из (2) и центральности e_1:

$$2(x, a_1, a_2) = (x, a_1 \circ e_1, a_2) = (x, a_1, e_1 \circ a_2) + (x, e_1, a_1 \circ a_2) = 0.$$

Для доказательства второго равенства ввиду унитальности бимодуля достаточно проверить, что

$$(a_1, a_2, x)e_i = 0 \,\text{при всех}\, i = 1, ..., k. \tag{31}$$

Если $i \neq 1$, то на основании тождества (5) и леммы 8 б) имеем

$$(a_1, a_2, x)e_i = (a_1e_i, a_2, x) + (a_1, e_i, [a_2, x]) - a_1(e_i, a_2, x) = 0.$$

Если же $i = 1$, то в силу доказанного и леммы 7

$$(a_1, a_2, x)e_1 = (a_2, a_1, x)e_1 = 0.$$

Тема самым, равенство (31), а с ним и леммы доказаны. □

Из леммы 9 немедленно вытекает альтернативность A-бимодуля M, что завершает доказательство теоремы 5.

4. Теорема о координатизации

Пусть унитальная правоальтернативная алгебра A над полем Φ содержит подалгебру $S = M_n(\Phi), n \geq 3$ матриц над Φ с общей единицей. Допустим, что A — ассоциативный S-бимодулем. Тогда он является прямой суммой регулярных S-бимодулей

$$A = \bigoplus_i Se_i,$$

где $[e_i, S] = 0, (e_i S, S) = (S, e_i, S) = 0$. Обозначим Φ-подпространство, порожденное всеми элементами e_i, через E. Легко видеть, что

$$E = \{e \in A | [e, S] = 0\}.$$

Сделаем одно замечание, которое будет использовано ниже без дополнительных пояснений.

Поскольку $e_{12} = [e_{12}, e_{11}]$ и $e_{11} - e_{22} = [e_{12}, e_{21}]$, то пространство $[S, S]$ порождается элементами $e_{11} - e_{ii}, e_{jk}, i \neq 1, j \neq k$. Этих элементов ровно $n^2 - 1$ и они линейно независимы, поэтому $S = \Phi 1 + [S, S]$. Это означает, что $S = \Phi 1 + [[S, S], S]$.

Лемма 10. *Верно равенство*

$$(A, A, S) = 0. \tag{32}$$

Доказательство. Всюду ниже $x, y \in A, a, b \in S$. В силу (5) и ассоциативности S-бимодуля A получаем

$$(x, y, [a, b]) = 0.$$

Поскольку $(x, y, 1) = 0$, то в силу равенства $S = \Phi 1 + [S, S]$ получаем требуемое. □

Лемма 11. *Верно равенство*

$$(A, E, E) = 0. \tag{33}$$

Доказательство. Всюду ниже $e, e' \in E, a, b \in S, x \in A$. В силу линеаризованного тождества (6) и (32), (33) имеем

$$\begin{aligned} 0 = ((x, e, e'), a, b) + ((x, a, e'), e, b) + ((x, e, b), a, e') + ((x, a, b), e, e') \\ +((x, e, e')[a, b]) + (x, a, e')[e, b] + (x, e, b)[a, e'] + (x, a, b)[e, e'] \\ = ((x, e, e')[a, b]), \end{aligned}$$

откуда следует $((x, e, e')S' = 0$ и $((x, e, e') = 0$. □

Лемма 12. *Верно равенство*

$$(A, A, A) = 0.$$

Доказательство. Применяя (9), (32) и (33), мы получаем

$$\begin{aligned} 2(x, ae, e') = 2(x, e, e')a + 2(x, a, e')e + (x, [a, e], e') \\ +(x, a, [e', e]) + (x, e, [e', a]) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$(A, A, E) = 0. \tag{34}$$

Наконец, в силу линеаризованных равенств (4), (32) и (34) имеем

$$(x, ae, be') = -(x, be'e, a) + (x, e, be')a + (x, e, a)be' = 0,$$

что доказывает лемму. □

Итак, мы доказали, что алгебра A ассоциативна. Тогда векторное пространство E является подалгеброй в A, и $A \cong S \otimes E$. Теорема 6 доказана.

Теперь мы можем доказать следствие из теоремы 6.

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие правоальтернативных алгебр, удовлетворяющих тождеству

$$S(x, y, [x, y]) = 0. \tag{35}$$

Заметим, что правоальтернативная алгебра A удовлетворяет тождеству (35) тогда и только тогда, когда ее присоединенная алгебра $A^{(-)}$ бинарно лиева.

Рассмотрим унитальный $\mathfrak{M}$-бимодуль M над алгеброй $S = M_n(\Phi), n \geq 3$. Докажем, что M ассоциативен. Обозначим через S^* подалгебру в алгебре линейных преобразований $\mathrm{End}_\Phi(M)$, порожденную операторами правого и левого умножения на элементы из S. Введем произвольным образом порядок на множестве матричных единиц алгебры S. Используя лемму 4 из [28], легко понять, что алгебра S^* конечномерна. Возьмем $m \in M$ и рассмотрим бимодуль mS^* над S. Тогда mS^* является также конечномерным бинарно лиевым бимодулем над простой алгеброй Ли $[S, S]$ бесследных матриц порядка $n \geq 3$. В силу [8], лемма 11, бимодуль mS^* над алгеброй $[S, S]$ является лиевым. Тогда в силу тождества (8) он является $(-1,1)$-бимодулем над алгеброй S и по теореме 3 он альтернативен, значит, ассоциативен. Тем самым, доказано, что бимодуль M над алгеброй S также ассоциативен.

Из сказанного и теоремы 6 немедленно вытекает указанное следствие.

5. Контрпримеры

5.1. **Неразложимый неунитальный $(-1,1)$-бимодуль над основным полем Φ.** Напомним, что бимодуль называется *неразложимым*, если он не представим в виде прямой суммы своих собственных подмодулей.

Рассмотрим полупростую алгебру $A = \Phi{\cdot}e$ с единицей e и 2-мерное векторное пространство V с базисом v_1, v_2 и действием

$$\begin{aligned} (\alpha e)\cdot v_1 &= \alpha v_2, & (\alpha e)\cdot v_2 &= 0,\\ v_1\cdot(\alpha e) &= \alpha(v_1+v_2), & v_2\cdot(\alpha e) &= 0, \end{aligned}$$

где $\alpha \in \Phi$. Полагая $L = L_e,\ \ R = R_e$, и используя правую форму записи, укажем матрицы этих операторов в базисе v_1, v_2 (мы не делаем различий в обозначениях операторов и их матриц):

$$L = e_{12}, \qquad R = e_{11} + e_{12}, \quad \text{где } e_{ij} \text{ — матричные единицы.}$$

Для проверки правой альтернативности бимодуля достаточно для любого $v \in V$ доказать равенства

$$(v, e, e) = 0, \qquad (e, e, v) + (e, v, e) = 0. \tag{36}$$

В операторной форме они принимают вид $R^2 = R$ и

$$L - L^2 + LR - RL = e_{12} + e_{12}(e_{11} + e_{12}) - (e_{11} + e_{12})e_{12} = 0,$$

значит, бимодуль V правоальтернативен. Кроме того, легко понять, что V является $(-1,1)$-бимодулем над A. В самом деле, определяющее соотношение (13): $(v,a,b)+(a,b,v)+(b,v,a)=0$ сводится к проверке второго равенства из (36).

Заметим, что бимодуль V неальтернативен: $L-L^2=L\neq 0$.

Покажем, что он неразложим; у него имеется единственный подмодуль, совпадающий с одномерным подпространством, порожденным вектором v_2. Допустим, что одномерное пространство U с базисным элементом $v_1+\beta v_2$ является A-подмодулем. Тогда U содержит элементы

$$(v_1+\beta v_2)e=v_1+v_2, \quad e(v_1+\beta v_2)=v_2,$$

что противоречит одномерности U.

5.2. **Неразложимый унитальный $(-1,1)$-бимодуль над 2-мерной расщепляемой композиционной алгеброй.** Рассмотрим полупростую алгебру $A=\Phi e_1\oplus\Phi e_2$ (прямая сумма двух полей), 2-мерное векторное пространство V с базисом v_1,v_2 и действием

$$v_1L=v_2, \quad v_2L=0, \quad v_1R=v_1+v_2, \quad v_2R=0,$$

где $L=L_{e_1},\ R=R_{e_1},\ 1=e_1+e_2$ действует унитально, т.е. $v\cdot 1=1\cdot v=v$. Далее,

$$L=e_{12}, \quad R=e_{11}+e_{12}.$$

Легко понять, что V является $(-1,1)$-бимодулем над A. Как правая альтернативность бимодуля, так и проверка равенства (13) сводится к проверке следующих соотношений для произвольного $v\in V$:

$$(v,e_1,e_1)=0, \qquad (e_1,e_1,v)+(e_1,v,e_1)=0.$$

Имеем в операторной форме $R^2=R$ и

$$L-L^2+[L,R]=e_{12}+[e_{12},e_{11}+e_{12}]=e_{12}+[e_{12},e_{11}]=0.$$

Докажем, что бимодуль V неразложим. Заметим, что Φv_2 является одномерным подбимодулем над A. Пусть U – подмодуль, порожденный элементом $u=v_1+\alpha v_2$, где $\alpha\in F$. Тогда $uL=v_1L+\alpha v_2L=v_2\in U$, откуда следует, что $U=V$. Тем самым, доказано, что A-бимодуль V неразложим.

Заметим, что бимодуль V не является слабо альтернативным:

$$(e_1,e_1,v_1)=e_1v_1-e_1(e_1v_1)=v_2-e_1v_2=v_2;$$

он также не является строго $(-1,1)$-бимодулем, так как

$$[v_1,e_1]=(v_1+v_2)-v_2=v_1.$$

5.3. **Неразложимый унитальный $(-1,1)$-бимодуль над квадратичным расширением $\Phi(\sqrt{\lambda})$.** Рассмотрим 6-мерное векторное пространство над основным полем Φ с базисом $e_1,\dots,e_6$. Превратим его в бимодуль над алгеброй $A=\Phi(c)$, где $c^2=\lambda\cdot 1$ и $\lambda\in\Phi$ (A — поле, являющееся квадратичным расширением поля Φ), считая, что 1 действует (справа и слева) как тождественное отображение, а умножение на элемент c заданно матрицами (относительно данного базиса):

$$R_c = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_c = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки правой альтернативности бимодуля необходимо проверить равенства

$$R_c^2 = R_{c^2}, \qquad L_{c^2} - L_c^2 + [L_c, R_c] = 0.$$

Эти проверка проводится непосредственно. Из указанных равенств вытекает, что для расщепляемого расширения $E(V,A)$ выполнено соотношение (13), т.е. бимодуль V является $(-1,1)$-бимодулем. Если бимодуль V вполне приводим, то он является прямой суммой неприводимых бимодулей, а каждый такой бимодуль альтернативен в силу теоремы 2, значит, ассоциативен; но это не так. Таким образом, конечное расширение поля Φ обладает $(-1,1)$-бимодулем, который не является прямой суммой неприводимых подбимодулей.

На самом деле указанный бимодуль неразложим. Для проверки этого факта запишем сначала таблицу умножения бимодуля в явном виде:

$$\begin{aligned} &e_1c = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3, && ce_1 = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3, \\ &e_2c = ce_2 = \lambda e_1 + e_4, && \\ &e_3c = -\lambda e_1 + e_4, && ce_3 = \lambda e_1 - e_4 - 2e_5, \\ &e_4c = \frac{\lambda}{2}(e_2 + e_3), && ce_4 = \frac{\lambda}{2}(e_2 - e_3), \\ &e_5c = ce_5 = e_6, && e_6c = ce_6 = \lambda e_5. \end{aligned}$$

Обозначим через φ оператор $v\varphi = (c,c,v)$; тогда

$$e_1\varphi = e_5,\ e_3\varphi = 2e_6,\ e_4\varphi = -2e_5,\ e_i\varphi = 0\,(i = 2,5,6). \tag{37}$$

Найдем наибольший по включению ассоциативный подбимодуль W_a. Бимодуль W над алгеброй A ассоциативен тогда и только тогда, когда он φ — инвариантен. Заметим, что $e_2, e_5, e_6 \in W_a$.

Если $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i e_i \in W_a$, где $\alpha_i \in \Phi$, то $\alpha_1 e_1 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 \in W_a$ и

$$0 = \alpha_1 e_1\varphi + \alpha_3 e_3\varphi + \alpha_4 e_4\varphi = \alpha_1 e_5 + 2\alpha_3 e_6 - 2\alpha_4 e_5$$

в силу соотношений (37). Значит, $\alpha_1 = 2\alpha_4$, $\alpha_3 = 0$ и $W_a = \langle g, e_2, e_5, e_6\rangle$, где $g = 2e_1 + e_4$. Поскольку

$$[g,c] = -2e_3 + \lambda e_2, \quad [\langle e_2, e_5, e_6\rangle, c] = 0,$$

то

$$W_a \subseteq \langle e_2, e_5, e_6\rangle. \tag{38}$$

Если W — неассоциативный подмодуль в V, то $W\varphi \subseteq W$, значит, W содержит ненулевой элемент $w = \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6$, где $\alpha_i \in \Phi$. Поскольку $wc = \lambda\alpha_6 e_5 + \alpha_5 e_6$, то либо элементы w, wc пропорциональны, либо $e_5, e_6 \in W$. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \lambda\alpha_6 & \alpha_5 \end{vmatrix} = \alpha_5^2 - \lambda\alpha_6^2.$$

Так как хотя бы один из скаляров $\alpha_5, \alpha_6 \in \Phi$ отличен от нуля, то указанный определитель также отличен от нуля. Значит, любой неассоциативный подмодуль содержит векторы e_5, e_6.

Допустим, что $V = V_1 \oplus V_2$ — прямая сумма двух собственных подбимодулей. По доказанному они не могут быть одновременно оба ассоциативны, либо оба неассоциативны. Пусть V_1 неассоциативен, V_2 ассоциативен. Тогда $e_5, e_6 \in V_1$ и в силу (38) любой вектор пространства V_2 может быть записан в виде $\beta_2 e_2 + \beta_5 e_5 + \beta_6 e_6$, где $\beta_i \in \Phi$. Тогда V_2 содержит элемент

$$(e_2 + \beta_5 e_5 + \beta_6 e_6)c = 2e_1 + e_4 + 2\beta_6 e_5 + \beta_5 e_6,$$

что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство неразложимости бимодуля V.

5.4. **Неразложимый унитальный строго $(-1, 1)$-бимодуль над полем $\Phi(t)$ рациональных функций.** Пусть $\Phi(t)$ — поле дробно-рациональных функций над Φ; кроме того, пусть $f, g, h, ..., \xi, \eta \in \Phi(t)$; V — линейное пространство над Φ с базисом x, y, z. Рассмотрим линейное пространство $M = V \otimes_\Phi \Phi(t)$ над полем Φ; будем писать xf вместо $x \otimes f$. Превратим M в бимодуль над $\Phi(t)$, определив действия:

$$x\eta \cdot \xi = x(\xi\eta), \qquad \xi \cdot x\eta = x(\xi\eta) + y(\xi'\eta) + z(\xi''\eta + \xi'\eta'),$$
$$y\eta \cdot \xi = \xi \cdot y\eta = y(\xi\eta), \qquad z\eta \cdot \xi = \xi \cdot z\eta = z(\xi\eta),$$

где f' — производная функции f по переменной t. Заметим, что бимодуль M унитален.

Тем самым, расщепляемое нулевое расширение $S = M \oplus \Phi(t)$ является линейной алгеброй над полем Φ. Докажем, что S — строго $(-1, 1)$-алгебра. Ясно, что $y\xi, z\xi \in Z(S)$. Значит, $[S, S] = [M, \Phi(t)] \subseteq y\Phi(t) + z\Phi(t) \subseteq Z(S)$, значит, $[[S, S], S] = 0$. Кроме того, $\Phi(t)$-бимодуль $M \otimes_\Phi \Phi(t)$ ассоциативен справа. Следовательно, для проверки правой альтернативности алгебры S достаточно понять, что

$$(f, xg, h) + (f, h, xg) = 0.$$

Вычислим каждый из этих ассоциаторов:

$$\begin{aligned}(f, xg, h) = (f \cdot xg) \cdot h - f \cdot x(gh) = \\ x(fgh) + y(f'gh) + z(f"gh + f'g'h) \\ - (x(fgh) + y(f'gh) + z(f''gh + f'(gh)')) = \\ z(f'g'h - f'(gh)') = -z(f'gh'),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(f,h,xg) = (fh)\cdot(xg) - f\cdot(h\cdot(xg)) = \\
x(fhg) + y\left((fh)'g\right) + z\left((fh)''g + (fh)'g'\right) \\
- f\cdot\left(x(hg) + y(h'g) + z(h''g + h'g')\right) = \\
x(fgh) + y\left((fh)''g + (fh)'g'\right) \\
- x(fgh) - y(f'hg) - z\left(f''hg + f'(hg)'\right) \\
- y(fh'g) - z(fh''g) - z(fh''g + fh'g') = \\
z(f''hg + 2f'h'g + fh''g + f'hg' + fh'g' \\
- f''hg - f'h'g - f'hg' - fh''g - fh'g') = z(f'h'g).
\end{aligned}
$$

Значит, алгебра S правоальтернативна, и тем самым доказано, она строго $(-1,1)$-алгебра. Заметим, что алгебра S неассоциативна. Для этого вычислим ассоциатор (t,t,x). Поскольку

$$t^2\cdot x = t^2\cdot x1 = xt^2 + 2yt + 2z, \qquad t(tx) = xt^2 + 2yt + z,$$

то $(t,t,x) = z$.

По теореме 1 неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль над простой альтернативной алгеброй альтернативен, значит, строго $(-1,1)$-бимодуль над полем ассоциативен. Это означает, что $\Phi(t)$-бимодуль M не является вполне приводимым.

Покажем, что $\Phi(t)$-бимодуль M неразложим. Пусть N — подбимодуль в M, содержащий элемент $n = xf+u \in N, 0 \neq f \in A = \Phi(t)$, где $u \in Z(M) = yA+zA$. Тогда $n' = nf^{-1} = x + u' \in N, u' \in Z(A)$. Поскольку $[t,x] = y$, $(t,t,x) = z$, то $y = [t,n'], z = (t,t,n') \in N$, значит, $Z(M) \subseteq N$. Тогда $x \in N$ и $N = M$.

Отметим, что $\Phi(t)$-бимодуль M не является слабо альтернативным.

References

[1] S. Eilenberg, Extensions of general algebras, *Ann. Soc. Polonaise Math.*,**21** (1948), 125–134.

[2] R.D. Schafer, Representations of alternative algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** (1952), 1–17.

[3] N. Svartholm, On the algebras of relativistic quantum mechanics, *Proc. of the Royal Physiographical Soc. of Lond.*,**12** (1942), 94-108.

[4] N. Jacobson, Structure of alternative and Jordan bimodules, *Osaka J. Math.* **6** (1954), 1–71.

[5] R. Carlsson, Malcev–Moduln, *J. Reine Angew. Math.* **281** (1976), 199–210.

[6] E.N. Kuzmin, Maltsev Algebras and Their Representations, *Algebra and Logic,* **7** (1968), 48–69.

[7] A.M. Slinko, I.P. Shestakov, Right representations of algebras,*Algebra and Logic***13** (1974), 312–333.

[8] A.N. Grishkov, Structure and representations of binary Lie algebras, *Izv. RAN. Mathematical Series,***44**:5 (1980), 999–1030. (Russian)

[9] L.I. Murakami and I.P. Shestakov, Irreducible unital right alternative bimodules, *J. Algebra*, **246** (2001), 897–914.

[10] S.V. Pchelintsev, Irreducible binary (-1,1) bimodules over simpler finite-dimensional algebras, *Sib. Math. J.*, **47**: 5 (2006), 934–939.

[11] I. Shestakov and M. Trushina, Irreducible bimodules over alternative algebras and superalgebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **368** (7) (2016), 4657–4684.

[12] L.R. Borisova, S.V. Pchelintsev, On the structure of alternative bimodules over semisimple Artinian algebras, *Izvestiya vuzov. Mathematics*, **8** (2020), 3–10. (Russian)

[13] L.I. Murakami, S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, Right alternative unital bimodules over the matrics algebras of order $n \geq 3$, *Sib. Math. J.*, **63**: 4 (2022), 743–757.

[14] S.V. Pchelintsev, O.V. Shashkov, I.P. Shestakov, Right alternative bimodules over Cayley algebra and coordinatization theorem, *J. Algebra*, **572** (2021), 111—128.
[15] K.A. Zhevlakov, A.M. Slin'ko, I.P. Shestakov, A.I. Shirshov, Rings that are nearly associative, Pure Appl. Math., 104, Academic Press, Inc., New York–London, 1982, 371 pp.
[16] L.A. Skornyakov, Right alternative bodies, *Izv. AN THE USSR. Ser. Mat.*, **15**: 2 (1951), 177–184. (Russian)
[17] E. Kleinfeld, Right alternative rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 939–944.
[18] S.V. Pchelintsev, On central ideals of finitely generated binary (-1,1) algebras, *Math. Sb.*, **193**: 4 (2002), 113–134 (Russian).
[19] A. Thedy, Right alternative rings, *J. Algebra*, **37**:1 (1975), 1–43.
[20] A.A. Albert, The structure of right alternative algebras, *Ann. of Math.*, **59** (1954), 408–417.
[21] M. Zorn, Theorie der alternative Ringe, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universitat*, **8** (1930), 123–147.
[22] V.G. Skosyrskii, Right alternative algebras, *Algebra and Logic*, **23**:2 (1984), 131—136.
[23] I.M. Miheev, Simple right alternative rings, *Algebra and Logic*, **16**:6 (1977), 456—476.
[24] S.V. Pchelintsev, Defining identities of a variety of right alternative algebras, *Mat. Zametki*, **20**: 2 (1976), 161–176 (Russian).
[25] E. Kleinfeld and H.F. Smith, Locally $(-1,1)$ rings, *Com. Algebra*, **3** (1975), 219–237.
[26] I.R. Hentzel, The characterization of $(-1,1)$-rings, *J. Algebra*, **30** (1974), 236–258.
[27] I.R. Hentzel and H.F. Smith, Simple locally $(-1,1)$ nil rings, *J. Algebra*, **101** (1986), 262–272.
[28] S.V. Pchelintsev, On a locally nilpotent radical in some classes of right alternative rings, *Sib. Math. Zh.*, **17**: 2 (1976), 340–360 (Russian).

Sergey Valentinovich Pchelintsev
Department of Mathematics, Finance University under the Government of the Russian Federation,
Leningradsky prospect 49,
125993, Moscow,Russia
E-mail address: pchelinzev@mail.ru