S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–144 (2023) УДК 519.214.8
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 60F10

LARGE DEVIATIONS OF FIRST PASSAGE TIME LOWER LEVEL BY RANDOM WALK IN RANDOM ENVIRONMENT

G.A. BAKAI

Представлено П.П. Петровым *(заполняется редактором)*

Abstract: We consider local probabilities of large deviations for random walk

$$S_0 = 0, \quad S_n = S_{n-1} + X_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

in random environment $\boldsymbol{p}$. We assume that $\boldsymbol{p}$ is a sequence of independent identically distributed variables and for fixed $\boldsymbol{\eta}$ and $S_0, \dots, S_n$ the random variable X_{n+1} is equal to 1 or -1 with probability p_{S_n} and $1 - p_{S_n}$. Denote

$$T_0 := 0, \quad T_{-k} := \min\{j \in \mathbb{N} : S_j = -k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

We suppose that $\mathbf{E} \ln((1-p_0)/p_0) < 0$. Under these assumptions, we find the asymptotic representation for local probabilities $\mathbf{P}\,(T_{-n} = k)$ as n tends to infinity and k/n belongs to a fixed compact.

Keywords: terminating compound renewal process, branching procces with immigration, large deviations.

Bakai G.A., Large Deviations of Random Walk in Random Envirionment: Lower Level.

Работа поддержана РНФ (грант №19-11-00111-П).

Поступила 08 июля 2023 г., опубликована ?? ???бря 2023 г.

1 Введение

Пусть $p_i,\ i \in \mathbb{Z},$ – независимые и одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины со значениями в интервале $(0,1)$ и $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Положим $q_i := 1 - p_i$. Пусть $S_0 = 0$,

$$\mathbf{P}(S_{j+1} = i+1 | X_1, \dots, X_j, S_j = i, \mathbf{p}) = p_i,$$
$$\mathbf{P}(S_{j+1} = i-1 | X_1, \dots, X_j, S_j = i, \mathbf{p}) = q_i,\ j \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность случайных величин $\{S_n\}_{n\geq 0}$ называется *случайным блужданием в случайной среде (СБСС)*, а случайный элемент $\mathbf{p}$ называют *случайной средой*.

Первые шаги по исследованию СБСС были предприняты в работе [5], где были получены критерии возвратности и транзиентности блуждания.

Предельные теоремы для СБСС были получены в работе [1]. Принцип больших уклонений (ПБУ) для СБСС впервые получен в работе [2]. Отметим также работу [3], в которой содержатся интересные уточнения результатов работы [2].

Дальнейшее обобщение ПБУ для СБСС содержится в работе [4]. В указанной работе рассмотрен случай, когда среда не является последовательностью н.о.р. величин, в котором получены ПБУ при фиксации среды и без, а также функциональный ПБУ.

Положим

$$\gamma := \mathbf{E} \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \tag{1}$$

и введем последовательность, вообще говоря, несобственных случайных величин

$$T_0 := 0, \quad T_{-n} := \min\{k \in \mathbb{N} :\ S_k = -n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Из результатов работы [5] вытекает, что в случае $\gamma < 0$ величины $T_{-i},\ i \in \mathbb{N}$, с положительной вероятностью принимают значение $+\infty$, а именно

$$\mathbf{P}(T_{-1} = +\infty) = \mathbf{P}(S_i \geq 0, i \geq 0) > 0.$$

Однако, вероятность события $\{T_{-n} = k\}$ положительна (при таких натуральных k, n, что $k \geq n$ и $n - k$ четно) и поддается исследованию.

В работе [6] автора исследовались локальные вероятности больших уклонений для момента T_n, то есть далекого высокого уровня. Результаты текущей работы дополняют это исследование.

В настоящей работе получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений для величин T_{-i}, а именно, доказано соотношение

$$\mathbf{P}(T_{-n} = k) \sim \frac{F(k/n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-L\left(\frac{k}{n}\right)n\right), \quad n \to \infty, \tag{3}$$

которое выполняется равномерно по $k \in \mathbb{N}: \ k/n \in K' \subset B'$ и $n-k$ четно. Здесь K' – произвольный подкомпакт открытого множества B'. Множество B', а также функции F и L будут введены ниже.

Для исследования вероятностей $\mathbf{P}(T_{-n} = k)$ мы покажем, что величины $T_{-k}, k \in \mathbb{N}$, обладают регенерационной структурой (см. раздел 2), причем регенерация является несобственной.

Таким образом, для исследования точных асимптотик вероятностей больших уклонений применимы результаты работы [7]. Данная работа автора дополняет результаты работы [8] в случае несобственной регенерации. В работе [7] получено соотношение (3), однако, необходимое условие Крамера, а также выражения функций F и L получены в терминах совместного распределения некоторого случайного вектора, который в разделе 2 мы назовем циклом регенерации.

Для альтернативного выражения функций F и L в соотношении (3) и проверки условия Крамера мы воспользуемся результатом работы [9].

Работа организована следующим образом. Регенерационная структура последовательности величин $\{T_{-n}\}_{n\geq 0}$ исследуется в разделе 2. В разделе 3 содержатся предварительные сведения и введены основные обозначения. Основная теорема и ее доказательство содержатся в разделе 4. В разделе 5 доказаны вспомогательные утверждения.

2 Регенерационная структура величин T_{-n}

Определение. Будем говорить, что величины $T_{-n}, n \in \mathbb{N}$, *обладают регенерационной структурой*, если найдется такое вероятностное пространство $\left(\widehat{\mathbf{\Omega}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbf{P}}\right)$, на котором заданы:

1) последовательность н.о.р. случайных векторов $(\xi_i, \eta_i), \ i \in \mathbb{N}$;
2) такая последовательность с.в. $\widehat{T}_n, n \in \mathbb{N}$, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ распределения случайных величин T_{-n} и $\widehat{T}_n$ совпадают, причем величины $\widehat{T}_n$ имеют вид:

$$\widehat{T}_n = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i + \zeta_n, \quad N_n := \max\left\{k \in \mathbb{N}: \ \sum_{j=1}^{k} \eta_j \leq n\right\}, \tag{4}$$

где максимум пустого множества полагаем равным нулю;
3) такая последовательность случайных величин $\{\zeta_n\}_{n\geq 0}$, что при каждом натуральном l выполнено соотношение

$$\widehat{\mathbf{P}}\left(\zeta_n = r \middle| (\xi_i, \eta_i) = (x_i, y_i), \ i \leq l, \ \sum_{j=1}^{l} \eta_j = n-k, \ \eta_{l+1} > k\right) =: P_\zeta(r,k),$$

то есть при каждом натуральном n и каждом натуральном l распределение величины ζ_n при условии события

$$\left\{(\xi_i,\eta_i)=(x_i,y_i),\ i\le l,\ \sum_{j=1}^{l}\eta_j=n-k,\ \eta_{l+1}>k\right\},\quad l\in\mathbb{N},$$

зависит только от k, но не от значений $(x_i,y_i), i\le n-k$.

Определение 1. *Регенерацию назовем несобственной, если* η_1 *– это несобственная случайная величина, а именно,*

$$\widehat{\mathbf{P}}(\eta_1<+\infty)\in(0,1).$$

Определение 2. *Распределением цикла регенерации назовем совместное распределение случайного вектора* (ξ_1,η_1).

Покажем, что величины $T_{-n}, n\in\mathbb{N}$, определенные соотношением (2), обладают несобственной регенерацией.

Пусть на пространстве $\left(\widehat{\mathbf{\Omega}},\widehat{\mathcal{F}},\widehat{\mathbf{P}}\right)$ задана такая последовательность н.о.р. случайных величин

$$\widehat{\mathbf{p}}=\{\widehat{p}_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\quad \widehat{q}_k:=1-\widehat{p}_k,\ k\in\mathbb{Z},$$

что $\widehat{p}_0$ совпадает по распределению со случайной величиной p_0, которая, напомним, была ранее определена в разделе 1.

Пусть на пространстве $\left(\widehat{\mathbf{\Omega}},\widehat{\mathcal{F}},\widehat{\mathbf{P}}\right)$ задан случайный процесс $\{Z_k,k\ge 0\}$, который является ветвящимся процессом в случайной среде с иммиграцией в одну частицу, а именно,

$$Z_0:=0,\quad Z_{k+1}:=\sum_{j=1}^{1+Z_k}\kappa_{k,j},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Здесь случайные величины $\kappa_{k,j},\ k,j\ge 0$, при фиксации среды $\widehat{\mathbf{p}}$ независимы и имеют геометрическое распределение

$$\widehat{\mathbf{P}}(\kappa_{k,j}=l|\widehat{\mathbf{p}}):=(\widehat{p}_k)^l\widehat{q}_k,\quad l\in\{0,1,2\ldots\}. \tag{6}$$

Заметим, что процесс $\{Z_k,\ k\ge 0\}$ является однородной цепью Маркова с пространством состояний $\{0,1,2,\ldots\}$.

Введем на пространстве $\left(\widehat{\mathbf{\Omega}},\widehat{\mathcal{F}},\widehat{\mathbf{P}}\right)$ последовательность н.о.р. случайных векторов $(\xi_i,\eta_i),\ i\in\mathbb{N}$. Положим

$$\tau_0:=0,\quad \tau_i:=\min\{k>\tau_{i-1}:Z_k=0\},\ i\in\mathbb{N},$$

$$\eta_i:=\tau_i-\tau_{i-1},\quad \xi_i:=\eta_i+2\sum_{j=\tau_{i-1}}^{\tau_i}Z_j. \tag{7}$$

Замечание. Марковская цепь $\{Z_n,n\ge 0\}$ является невозвратной при $\gamma<0$. Величина γ была определена ранее как

$$\gamma=\mathbf{E}\ln(q_0/p_0)=\widehat{\mathbf{E}}\ln(\widehat{q}_0/\widehat{p}_0).$$

Для определения на пространстве $\left(\widehat{\mathbf{\Omega}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbf{P}}\right)$ величин $\widehat{T}_n$ нам потребуются дополнительные обозначения. Положим при каждом натуральном n

$$Z_k(n) := Z_k, \quad 0 \le k \le n, \quad Z_{k+1}(n) := \sum_{j=2}^{1+Z_k} \kappa_{k,j}, \quad k > n.$$

При каждом натуральном n процесс $\{Z_i(n),\ i \ge 0\}$ является ветвящимся процессом в случайной среде с иммиграцией в одну частицу в первых n поколениях.

Положим

$$\widehat{T}_n := n + 2\sum_{i=0}^{+\infty} Z_i(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

В силу невозвратности цепи $\{Z_n, n \ge 0\}$ величины $\widehat{T}_n$ с положительной вероятностью равны $+\infty$. Однако, конечные значения также принимаются с ненулевой вероятностью, например,

$$\widehat{\mathbf{P}}\left(\widehat{T}_n = n\right) = \widehat{\mathbf{P}}(Z_1 = 0, \ldots, Z_n = 0) =$$
$$= \widehat{\mathbf{E}}\left(\widehat{\mathbf{P}}_{\widehat{\mathbf{p}}}(Z_1 = 0, \ldots, Z_n = 0)\right) = \widehat{\mathbf{E}}\prod_{k=1}^{n} \widehat{q}_k = \left(\widehat{\mathbf{E}}\widehat{q}_0\right)^n > 0.$$

Заметим, что величины $\widehat{T}_n$ допускают представление:

$$\widehat{T}_n = \sum_{j=1}^{N_n} \xi_j + \zeta_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

где в силу марковского свойства цепи $\{Z_n,\ n \ge 0\}$ при каждом натуральном l выполнено

$$\widehat{\mathbf{P}}\left(\zeta_n = r | (\xi_i, \eta_i) = (x_i, y_i), i \le l, \tau_l = n - k, \eta_{l+1} > k\right) =$$
$$= P_\zeta(r, k) = \widehat{\mathbf{P}}\left(\widehat{T}_k = r | k < \eta_1 < +\infty\right). \tag{10}$$

Для доказательства наличия регенерационной структуры величин T_{-n} остается показать, что при каждом n распределения величин T_{-n} и $\widehat{T}_n$ совпадают. Справедливо следующее утверждение (см., например, работу [10]).

Лемма 1. *При любых $n, k \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(T_{-n} = k) = \widehat{\mathbf{P}}\left(\widehat{T}_n = k\right). \tag{11}$$

Таким образом, наличие регенерационной структуры для величин $T_{-n}, n \in \mathbb{N}$, доказано. Отметим, что регенерация является несобственной, так как цепь $\{Z_n,\ n \ge 0\}$ является невозвратной.

3 Предварительные сведения

Сформулируем полученные ранее результаты об асимптотике вероятностей больших уклонений для величин, обладающих несобственной регенерационной структурой.

Ниже мы приведем элементы общей теории, но чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем использовать обозначения, введенные в разделе 2, которые в дальнейшем применим для частной задачи, поставленной в разделе 1.

Пусть величины $\widehat{T}_n$ обладают несобственной регенерационной структурой вида (4). Положим

$$R(h,t) := \mathbf{E}\left(\exp(h\xi_1 + t\eta_1);\ \eta_1 < +\infty\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(tk)\mathbf{E}\left(\exp(h\xi_1);\ \eta_1 = k\right), \tag{12}$$

$$\widehat{r}_k(h) := \sum_r \exp(hr)P_\zeta(r,k), \quad \widehat{R}(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(tk)\widehat{r}_k(h)\mathbf{P}(k < \eta_1 < +\infty). \tag{13}$$

Введем множество

$$B := \operatorname{int}\{h \in \mathbb{R} :\ \exists t\ 1 < R(h,t) < +\infty\}.$$

На множестве B зададим неявную функцию $t_0(h)$ соотношением:

$$t_0(h) :\ R(h, t_0(h)) = 1, \quad h \in B,$$

и положим

$$\widehat{G}(h) := \widehat{R}(h, t_0(h)).$$

Пусть

$$\widehat{B} := \operatorname{int}\left\{h \in B :\ \widehat{G}(h) < +\infty\right\}, \quad \widehat{B}' := \left\{-t_0'(h) :\ h \in \widehat{B}\right\}.$$

Помимо условий на функции $R(h,t)$ и $\widehat{R}(h,t)$ в работе [7] накладываются условия на носитель распределения вектора (ξ_1, η_1).

Определение 3. *Несобственное распределение вектора (ξ_1,η_1) назовем сильно арифметическим, если выполнены следующие условия.*

1) *распределение невырождено, то есть для произвольных $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, (c_1,c_2) \neq (0,0)$ случайная величина $c_1\xi_1 + c_2\eta_1$ не является константой.*
2) *распределение вектора сильно решетчато, то есть найдутся матрица S и вектор b, что*

$$\mathbf{P}\left((\xi_1,\eta_1) \in b + S\mathbb{Z}^2 | \eta_1 < +\infty\right) = 1.$$

Будем считать, что b и S выбираются таким образом, что S имеет наибольший возможный определитель.

3) *решетка распределения* (ξ_1, η_1) *"вертикальна", то есть матрица* S *может быть выбрана такой, что* $S_{1,2} = S_{2,1} = 0$. *Элемент* $S_{2,2}$ *равен единице, иными словами условное распределение величины* η_1 *при условии события* $\{\eta_1 < +\infty\}$ *является арифметическим. Величину* $S_{1,1}$ *будем обозначать* q_ξ *и называть показателем решетчатости.*
4) *величину* b *в 2) можно выбрать равной* 0.
5) *для произвольного* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *выполнено следующее соотношение: если* $P_\zeta(r, k) > 0$, *то* $r \in q_\xi \mathbb{Z}$.

В работе [7] в определении сильно арифметического распределения не было условия 5), так как не рассматривались более общие регенерационные структуры. Аналогом этого условия является условие LC3) работы [9].

Дополнительно отметим, что условие 3) в работе [7] вводится более общо, нет требования $S_{2,2} = 1$ (в многомерном случае $S_{d+1,d+1} = 1$, где d – размерность вектора ξ_1).

Сформулируем результат работы [7] (теорема 1, часть 2).

Теорема 1. *Пусть величины* $\widehat{T}_n$ *обладают регенерационной структурой вида (4), причем вектор* (ξ_1, η_1) *имеет сильно арифметическое распределение с показателем решетчатости* q_ξ. *Пусть множество* $\widehat{B}'$ *непусто. Тогда справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\left(\widehat{T}_n = k\right) \sim \frac{F\,(k/n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-L\left(\frac{k}{n}\right) n\right), \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Соотношение выполняется равномерно по таким $k = k(n) \in \mathbb{N}: \ k/n \in K'$ *и* $k - n$ *четно, где* K' *– произвольный подкомпакт множества* $\widehat{B}'$.

Здесь

$$L(\theta) := \theta h_\theta + t_0(h_\theta), \quad F(\theta) := q_\xi G(h_\theta), \quad h_\theta : \ -t_0'(h_\theta) = \theta, \quad \theta \in \widehat{B}', \tag{15}$$

$$G(h) := \frac{\alpha(h)\widehat{G}(h)}{\sqrt{2\pi(-t_0''(h))}}, \quad \alpha(h) := (R_t'(h,t)|_{h,t_0(h)})^{-1}, \quad h \in \widehat{B}. \tag{16}$$

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема, полученная в работе [9]. Чтобы избежать дополнительных обозначений, сформулируем ее в терминах настоящей статьи. Введем события

$$C_n := \bigsqcup_{j=1}^{+\infty} \{\eta_1 + \ldots + \eta_j = n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Теорема 2. *Пусть случайные величины* $\widehat{T}_n$ *обладают регенерационной структурой вида (4), причем вектор* (ξ_1, η_1) *имеет арифметическое* *распределение с показателем решетчатости q_ξ. Пусть $H \subset \mathbb{R}$ – некоторое открытое множество. Предположим, что для произвольного подкомпакта $K \subset H$ найдется такое $\delta = \delta(K) \in (0,1)$, что выполнены следующие соотношения*

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(h\widehat{T}_n\right);\ C_n\right) = \rho^n(h)(\rho_0(h) + \delta^n o(1)), \tag{18}$$

$$\widehat{r}_n(h)\mathbf{P}(n < \eta_1 < +\infty) = \rho^n(h)(\delta^n o(1)), \quad n \to \infty, \tag{19}$$

где $o(1)$ равномерно мало при $h \in K$, функция $\rho(h)$ положительна и непрерывна на H, а функция $\rho_0(h)$ положительна, ограничена и отделена от нуля на K. Тогда справедливо соотношение (14), и

$$\rho(h) = \exp(-t_0(h)), \quad \alpha(h) = \rho_0(h). \tag{20}$$

В работе [7] рассматривался более частный случай несобственной регенерации, а именно, $P_\zeta(0,k) = 1, k = 0,1,2,\ldots$ или $\widehat{r}_k(h) = 1$. Однако, асимптотика вероятностей $\mathbf{P}\left(\widehat{T}_n = k\right)$ претерпит незначительные изменения: изменится функция $D_2(\theta)$ (заданная в работе [7] соотношением (3.7)), которая приобретет вид

$$q_\xi\sqrt{2\pi(-t_0''(h_\theta))}\alpha(h_\theta)\widehat{G}(h_\theta, t_0(h_\theta)),$$

и зона уклонений, а именно множество допустимых значений $\theta = k/n$. В работе [7] таковой является множество

$$\mathrm{int}\{-t_0'(h):\ t_0(h) < 0,\ h \in B\},$$

то есть множество таких θ, при которых функция $D_2(\theta) < +\infty$. В более общем случае этому множеству соответствует

$$\mathrm{int}\left\{-t_0'(h):\ \widehat{G}(h, t_0(h)) < +\infty,\ h \in B\right\} = \widehat{B}'.$$

Отметим, что введенные в разделе 2 случайный вектор (ξ_1, η_1) и распределения $\{P_\zeta(r,k),\ r \in \mathbb{Z}\}, k \geq 0$, не удовлетворяют определению сильной арифметичности. Однако, переходя от величин $\widehat{T}_n$ к $\widehat{T}_n - n$, нетрудно показать, что величины $\widehat{T}_n - n$ обладают регенерационной структурой, то есть могут быть представлены в следующем виде:

$$\widehat{T}_n - n = \sum_{i=1}^{N_n} \widetilde{\xi}_i + \widetilde{\zeta}_n, \quad N_n = \max\left\{k \in \mathbb{N}:\ \sum_{j=1}^{k} \eta_j \leq n\right\}.$$

Здесь для произвольного $i \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\widetilde{\xi}_i = \xi_i - \eta_i = 2\sum_{j=\eta_{i-1}}^{\eta_i} Z_j, \quad P_{\widetilde{\zeta}}(r,k) = P_\zeta(k+r,k) = \widehat{P}\left(\widehat{T}_k - k = r \,\middle|\, k < \eta_1 < +\infty\right).$$

Случайный вектор $\left(\widetilde{\xi}_1, \eta_1\right)$ и набор распределений $P_{\widetilde{\zeta}}(r,k)$ удовлетворяют определению сильной арифметичности, и показатель решетчатости равен 2, следовательно, для доказательства соотношения (3) и отыскания фигурирующих в нем функций F и L применимы теоремы 1 и 2.

Таким образом, доказательство основного соотношения (3) сводится к проверке условий теоремы 2, так как наличие несобственной регенерационной структуры величин $\{T_{-n}\}_{n\geq 0}$ уже доказано в разделе 2.

4 Основная теорема

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть последовательность случайных величин $\{T_{-n}\}_{n\geq 0}$ задана соотношением (2) и $\mathbf{E}\ln(q_0/p_0) < 0$. Тогда при $n \to \infty$ выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}(T_{-n} = k) \sim \frac{F(k/n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-L\left(\frac{k}{n}\right)n\right), \tag{21}$$

соотношение выполнено равномерно по таким k, что $(n-k)$ – четно при всех n и отношение k/n принадлежит некоторому компакту $K' \subset B'$. Здесь, как и прежде,

$$L(\theta) = \theta h_\theta - \ln\rho\,(h_\theta)\,, \quad h_\theta: \ (\ln\rho)'(h_\theta) = \theta, \quad \theta \in B', \tag{22}$$

$$B' := \{(\ln\rho)'(h): \ h < 0\}, \quad F(\theta) = \frac{2G(h_\theta)}{\sqrt{2\pi((\ln\rho)''(h_\theta))}}, \tag{23}$$

$$G(h) = \rho_0(h)\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^{-k}(h)\widehat{\mathbf{E}}\exp\left(h\widehat{T}_k;\ k < \eta_1 < +\infty\right). \tag{24}$$

Функции $\rho(h)$ и $\rho_0(h)$ определены соотношением (39), фигурирующие в нем функция $\lambda(h)$ и элементы ψ_h и f_h определены соотношением (35).

Отметим, что выражения для функций уклонений $L(\theta)$ могут быть получены из теоремы 2 работы [2].

Доказательство основной теоремы 3. Для доказательства теоремы достаточно получить точные асимптотики вероятностей больших уклонений для величин $\widehat{T}_n$, введенных в разделе 2, а именно,

$$\widehat{\mathbf{P}}\left(\widehat{T}_n = k\right).$$

Действительно, в силу леммы 1 вероятности $\widehat{\mathbf{P}}\left(\widehat{T}_n = k\right)$ и $\mathbf{P}(T_{-n} = k)$ совпадают при всех натуральных k.

Мы покажем, что из условий теоремы 3 вытекает справедливость условий теоремы 2. Несобственная регенерационная структура величин $T_{-n}, n \geq 0$, напомним, уже была показана в разделе 2.

Выберем в качестве множества H луч $(-\infty, 0)$ и докажем справедливость соотношения (18). Заметим, что в силу определения величин

$\eta_i, i \geq 1$, (соотношение (7)), событие C_n может быть представлено следующим образом:

$$C_n = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \{\eta_1 + \ldots + \eta_k = n\} = \{Z_n = 0\}.$$

Принимая во внимание (8), получаем, что выражение в левой части соотношения (18) может быть представлено в виде:

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\exp\left(h\widehat{T}_n\right);\ C_n\right) = \widehat{\mathbf{E}}\left(\exp\left(h\left(n + 2\sum_{i=0}^{n} Z_i\right)\right);\ Z_n = 0\right), \quad h < 0. \tag{25}$$

Покажем, что правую часть тождества (25) можно вычислить как действие n-ой степени некоторого оператора на некоторые вектор и ковектор.

Введем на пространстве

$$l^1 := \left\{x = (x_0, x_1, \ldots) :\ \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| < \infty\right\}, \quad ||x|| := \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|,$$

следующие операторы:

$$P_{tr} : l^1 \to l^1; \quad (xP_{tr})_j := \sum_{i=0}^{+\infty} x_i (P_{tr})_{i,j}, \quad (P_{tr})_{i,j} := \widehat{\mathbf{P}}(Z_2 = j | Z_1 = i), \tag{26}$$

$$e^{hG} : l^1 \to l^1; \quad \left(xe^{hG}\right)_j := x_j \exp(h(1 + 2j)), \quad i, j \geq 0, \tag{27}$$

$$Q(h) := P_{tr} e^{hG}, Q(h) : l^1 \to l^1, \quad xQ(h) := (xP_{tr})e^{hG},\ x \in l^1. \tag{28}$$

Оператор P_{tr} есть переходный оператор цепи $\{Z_i,\ i \geq 0\}$, оператор $\exp(hG)$ является диагональным. Отметим, что сопряженный к $Q(h)$ оператор действует на пространстве l^∞ следующим образом:

$$Q(h)[f](i) = \widehat{\mathbf{E}}(\exp(h(1 + 2Z_1))f(Z_1) | Z_0 = i), \quad f \in l^\infty.$$

Здесь и далее во избежание дополнительных обозначений для сопряженных операторов действие на пространстве l^1 будем записывать как $xQ(h)$, то есть умножать на "строку" x слева. А действие сопряженного к $Q(h)$ на пространстве l^∞ будем записывать $Q(h)f$, то есть умножать на "столбец" f справа.

Воспользуемся введенными операторами для вычисления правой части соотношения (25). Имеем,

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\exp\left(h\left(n+2\sum_{i=0}^{n} Z_i\right)\right);\ Z_n=0\right)=\langle \pi_0 Q^n(h), e_0\rangle\,, \tag{29}$$

$$\pi_0=(1,0,0\ldots)\in l_1,\quad e_0=(1,0,0\ldots)\in l^\infty. \tag{30}$$

Исследуем левую часть соотношения (19). Введем события

$$B_Z(n):=\{Z_1>0,\ldots,Z_n>0\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что при всех натуральных n и $h<0$ выполнено

$$\widehat{r}_n(h)\widehat{\mathbf{P}}(n<\eta_1<+\infty)=\widehat{\mathbf{E}}\left(\exp(h\widehat{T}_n); B_Z(n),\ \eta_1<+\infty\right)=$$

$$=\widehat{\mathbf{E}}\left(\exp(h\widehat{T}_n); B_Z(n)\right)\le \widehat{\mathbf{E}}\left(\exp\left(h\left(n+2\sum_{i=0}^{n} Z_i\right)\right); B_Z(n)\right), \tag{31}$$

так как величина $\widehat{T}_n$ равна $+\infty$ на событии $\{\eta_1=+\infty\}$.

Покажем, что правую часть соотношения (31) также можно представить как действие n-ой степени некоторого оператора на некоторые вектор и ковектор. Введем на пространстве l^1 оператор

$$\widehat{P}_{tr,0}: l^1\to l^1;\quad \left(x\widehat{P}_{tr,0}\right)_j:=\sum_{i=0}^{+\infty} x_i\left(\widehat{P}_{tr,0}\right)_{i,j},\quad \left(\widehat{P}_{tr,0}\right)_{i,0}:=0, \tag{32}$$

$$\left(\widehat{P}_{tr,0}\right)_{i,j}:=(P_{tr})_{i,j},\ i\ge 0, j\in\mathbb{N},$$

$$\widehat{Q}_0(h):=\widehat{P}_{tr,0}e^{hG},\quad x\widehat{Q}_0(h)=\left(x\widehat{P}_{tr,0}\right)e^{hG},\ x\in l^1. \tag{33}$$

Сопряженный к $\widehat{Q}_0(h)$ оператор на пространстве l^∞ действует следущим образом:

$$\widehat{Q}_0(h)[f](i)=\widehat{\mathbf{E}}(\exp(h(1+2Z_1))I(Z_1>0)f(Z_1)|Z_0=i),\quad f\in l^\infty.$$

Тогда правая часть соотношения (31) принимает следующий вид:

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\exp\left(h\left(n+2\sum_{i=0}^{n} Z_i\right)\right); B_Z(n)\right)=\left\langle \pi_0\widehat{Q}_0^n(h), e_1\right\rangle,\ e_1:=(1,1,1,\ldots). \tag{34}$$

Мы показали, что левая часть соотношения (18) совпадает с правой частью соотношения (29), а левая часть соотношения (19) оценивается сверху правой частью соотношения (34).

Положим

$$K_+:=\{x\in l^1:\ x_i\ge 0,\ i\ge 0\},\quad K_+^0:=\{x\in l^1:\ x_i>0,\ i\ge 0\},$$

$$K_+^*:=\{y\in l^\infty:\ y_i\ge 0,\ i\ge 0\},\quad \left(K_+^0\right)^*:=\{y\in l^\infty:\ y_i>0,\ i\ge 0\}.$$

Пусть

$$\lambda(h) := \max\{|z| : \ z \in \operatorname{spec}(Q(h))\}, \quad \lambda_0(h) := \max\left\{|z| : \ z \in \operatorname{spec}\left(\widehat{Q}_0\,(h)\right)\right\}.$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуется лемма, доказательство которой проведем позднее.

Лемма 2. *Пусть на пространстве l^1 при $h \in H$ заданы семейства операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ со следующими условиями.*

(1) *Операторы $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ непрерывно зависят от h.*
(2) *При каждом $h \in H$ оператор $Q(h)$ компактен.*
(3) *При каждом $h \in H$ для произвольного $x \in K_+$ выполнены соотношения:*

$$xQ(h) \in K_+, \quad x\left(Q(h) - \widehat{Q}_0(h)\right) \in K_+$$

и найдется такой $x_0 \in K_+ \backslash \{0\}$, что $x_0 Q(h) \neq x_0 \widehat{Q}_0(h)$.
(4) *При каждом $h \in H$ найдется $\lambda : \ \lambda > \lambda(h)$, что для произвольного ненулевого $x \in K_+$ и $d \in \mathbb{N}$*

$$x \sum_{n=1}^{+\infty} Q^{dn}(h) \lambda^{-dn} \in K_+^0.$$

(5) *При каждом $h \in H$ найдутся такие $x_0(h) \in K_+$ и $\varepsilon(h) > 0$, что выполнено соотношение*

$$(x_0(h)Q(h) - \varepsilon(h)x_0(h)) \in K_+^0.$$

Тогда

a) *при каждом $h \in H$ величина $\lambda(h)$ положительна и найдутся такие $\psi_h \in K_+^0$ и $f_h \in \left(K_+^0\right)^*$, что выполнены соотношения:*

$$\psi_h Q(h) = \lambda(h)\psi_h, \ Q(h) f_h = \lambda(h) f_h, \ \langle \psi_h, f_h \rangle = 1, \quad \lambda(h) > \lambda_0(h); \quad (35)$$

b) *собственное значение $\lambda(h)$ оператора $Q(h)$ имеет геометрическую кратность 1 и непрерывно зависит от h;*
c) *проектор $\psi_h \langle \cdot, f_h \rangle$ непрерывно зависит от h, в частности, для произвольных $x \in l^1$ и $y \in l^\infty$ функция*

$$\langle x, f_h \rangle \langle \psi_h, y \rangle$$

непрерывна по h;
d) *для произвольного $K \subset H$ – компактного подмножества, найдется такое $\delta_0 = \delta_0(K) \in (0,1)$, что при $h \in K$ выполнены соотношения*

$$\lambda_0(h) < \delta_0 \lambda(h), \ \lambda_J(h) < \delta_0 \lambda(h), \quad \lambda_J(h) := \max\{|z| : \ z \in \operatorname{spec}(J(h))\}, \quad (36)$$

$$J(h) : \ l^1 \to l^1, \ xJ(h) := xQ(h) - \lambda(h)\psi_h \langle x, f_h \rangle, \ x \in l^1. \quad (37)$$

Справедливо следующее утверждение, доказательство которого мы проведем позднее.

Лемма 3. *Пусть семейства операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ определены соотношениями (28) и (33) при $h \in (-\infty, 0)$. Тогда данные операторы удовлетворяют лемме 2.*

В силу определения оператора $J(h)$ имеем

$$xQ^n(h) = xJ^n(h) + \lambda^n(h)\psi_h\langle x, f_h\rangle, \quad x \in l^1,\ n \in \mathbb{N},$$

откуда

$$\langle \pi_0 Q^n(h), e_0\rangle = \lambda^n(h)\,\langle \pi_0, f_h\rangle\,\langle \psi_h, e_0\rangle + \langle \pi_0 J^n(h), e_0\rangle\,.$$

Таким образом, в силу соотношения (36) при $h \in K$ при некотором $\delta \in (\delta_0, 1)$ справедливо соотношение

$$\langle \pi_0 Q^n(h), e_0\rangle = \lambda^n(h)\,(\langle \pi_0, f_h\rangle\,\langle \psi_h, e_0\rangle + \delta^n o(1))\,, \tag{38}$$

где $o(1)$ равномерно мало при $h \in K$.

Для доказательства соотношения (18) остается положить

$$\rho(h) := \lambda(h), \quad \rho_0(h) := \langle \pi_0, f_h\rangle\,\langle \psi_h, e_0\rangle = f_h(0)\psi_h(0). \tag{39}$$

Здесь как и прежде $\pi_0 = (1, 0, 0, \dots) \in l^1$ и $e_0 = (1, 0, 0, \dots) \in l^\infty$.

Функции $\rho(h)$ и $\rho_0(h)$ положительны и непрерывны на H.

Остается доказать справедливость соотношения (19). В силу соотношений (31) и (34) имеем

$$\widehat{r}_n(h)\widehat{\mathbf{P}}(n < \eta_1 < +\infty) \le \left\langle \pi_0 \widehat{Q}_0^n(h), e_1 \right\rangle,$$

откуда, в силу соотношения (36), справедливо соотношение

$$\widehat{r}_n(h)\widehat{\mathbf{P}}(n < \eta_1 < +\infty) = \lambda^n(h)\delta^n o(1), \quad n \to \infty,\ h \in K, \tag{40}$$

при некотором $\delta \in (\delta_0, 1)$, где $o(1)$ равномерно мало при $h \in K$.

Следовательно, доказано, что в условиях теоремы 3 выполнены условия теоремы 2, откуда вытекает справедливость соотношения (21). $\square$

5 Доказательства вспомогательных утверждений

Доказательство леммы 2. Данное утверждение является собранными воедино леммами 2-5 работы [6], последние же в свою очередь суть следствия результатов работ [11] (лемма 2), [12] (лемма 4) и [13] (леммы 3 и 5).

В силу условия 2, при каждом $h \in H$ оператор $Q(h)$ компактен, соответственно, ненулевые значения спектра являются собственными значениями конечной кратности. Условие 3 влечет неотрицательность оператора, из которой вытекает, что величина

$$\lambda(h) = \max\{|z| :\ z \in \mathrm{spec}(Q(h))\}$$

принадлежит спектру (предложение 1 работы [11]). Условие 5 гарантирует положительность величины $\lambda(h)$ в силу предложения 3 работы [11]. Таким образом, при каждом $h \in H$ величина $\lambda(h)$ принадлежит спектру компактного оператора $Q(h)$ и является положительной, откуда $\lambda(h)$ является собственным значением оператора $Q(h)$.

Условие 4 означает неразложимость ("quazi-interior" в терминологии работы [11]) любой степени оператора $Q(h)$, в частности, первой степени. Отсюда вытекает, что применима теорема 2 работы [11], которая гарантирует существование элементов f_h и ψ_h с положительными координатами и простоту собственного значения $\lambda(h)$ оператора $Q(h)$. Таким образом, доказана первая часть леммы.

Для любого натурального d применяя ту же теорему для оператора $Q^d(h)$, получаем, что $\lambda^d(h)$ является простым, то есть имеет геометрическую кратность 1 и, разумеется, те же собственные векторы ψ_h и f_h.

Покажем, что простота $\lambda^d(h)$ как собственного значения оператора $Q^d(h)$ при каждом $h \in H$ и произвольном натуральном d означает, что у оператора $Q(h)$ нет собственных значений вида $\exp(2i\pi\alpha)\lambda(h)$ при $\alpha \in \mathbb{Q}$, где i – мнимая единица. Действительно, предположим противное: пусть есть такое рациональное число $\alpha = m/l,\ l \in \mathbb{N}$, что $\exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)$ лежит в спектре $Q(h)$. Тогда найдется такой $x_\alpha \in l^1$, что

$$x_\alpha Q(h) = \exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)x_\alpha,$$

откуда

$$x_\alpha Q^l(h) = \exp(2\pi i\alpha l)\lambda^l(h)x_\alpha = \exp(2\pi i m)\lambda^l(h)x_\alpha = \lambda^l(h)x_\alpha, \quad x_\alpha \neq 0.$$

Таким образом, вектор x_α является собственным для оператора $Q^l(h)$ с собственным значением $\lambda^l(h)$, что противоречит простоте этого собственного значения.

Для доказательства того, что оператор $Q(h)$ не имеет собственных значений вида $\exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)$ при иррациональных α воспользуемся результатом работы [14], а именно теоремой 1 и ее следствием. Сформулируем ее в терминах данной работы.

Теорема 4. *Пусть на пространстве l^1 задан неотрицательный оператор Y со спектральным радиусом 1. Здесь неотрицательность означает, что выполнено соотношение*

$$\forall\ x \in K_+ \quad xY \in K_+.$$

Предположим также, что найдется такой $u \in (K_+^0)^*$, что $(u - Yu) \in (K_+)^*$, или, что то же самое, $(Yu)_j \leq u_j,\ j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда если число $\beta \in \mathbb{C},\ |\beta| = 1$ является собственным для оператора Y, а именно, найдется такой элемент $0 \neq x \in l^1$, что

$$xY = \beta x,\ x = (x_0, x_1, \ldots)$$

то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ значение β^n так же является собственным, и более того,

$$|x|g^n Y = \beta^n |x| g^n, \quad |x| = (|x_0|, |x_1|, \dots), \ |x|g^n = (|x_0|g_0^n, |x_1|g_1^n, \dots) \in l^1.$$

Здесь g – некоторый вектор из l^∞, такой, что выполнено соотношение $|g_i| = 1, \ i = 0, 1, 2, \dots$.

Применим данную теорему для доказательства того, что оператор $Q(h)$ не имеет собственных значений вида $\exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)$ при иррациональных α. Предположим противное. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\exp((2\pi i\alpha)n) \in \operatorname{spec}\left\{\lambda^{-1}(h)Q(h)\right\}.$$

Множество $\{\exp((2\pi i\alpha)n), \ n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно на окружности радиуса 1, откуда спектр $\lambda^{-1}(h)Q(h)$, будучи компактным подмножеством $\mathbb{C}$, обязан содержать всю окружность. А это противоречит компактности оператора $Q(h)$.

Таким образом, условия 1, 2, 4, 5 леммы 2 гарантируют, что на окружности

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = \lambda(h)\}$$

оператор $Q(h)$ имеет единственное и простое собственное значение $\lambda(h)$.

Утверждение теоремы 2, что $\lambda_0(h)$ меньше $\lambda(h)$, где, как и прежде,

$$\lambda_0(h) = \max\left\{|z| : \ z \in \operatorname{spec}\left(\widehat{Q}_0(h)\right)\right\}$$

есть следствие теоремы 4.3 работы [12].

Утверждения теоремы о непрерывности $\lambda(h)$, проектора на корневое подпространство, равномерное преводсходство величины $\lambda(h)$ над $\widehat{\lambda}_0(h)$ есть следствие результатов работы [13] (глава 3, стр. 264-271). Отметим, что в работе автора [6] этот вывод был проделан. □

Доказательство леммы 3. Проверим, что операторы $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ удовлетворяют лемме 2.

Покажем что оператор $Q(h)$ сходится по операторной норме к $Q(h_0)$ при $h \to h_0$. На пространстве l^1 норма оператора Y определяется соотношением:

$$||Y|| := \sup_{i \geq 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} |Y_{ij}|\right), \quad (xT)_j = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i Y_{ij}, \ x \in l^1.$$

Имеем в силу определений операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ (соотношения (28) и (33)):

$$Q(h) = P_{tr} e^{hG}, \quad \widehat{Q}_0(h) = \widehat{P}_{tr,0} e^{hG}, \quad h < 0,$$

таким образом, для непрерывной зависимости семейств операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ достаточно доказать сходимость e^{hG} к e^{h_0G}. Имеем,

$$\left|\left|e^{hG} - e^{h_0G}\right|\right| = \sup_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left|(e^{hG})_{ij} - (e^{h_0G})_{ij}\right|\right) = \sup_{i\geq 0}\left(\left|e^{h(1+2i)} - e^{h_0(1+2i)}\right|\right).$$

Величина в правой части последнего соотношения стремится к нулю, так как $h \to h_0 < 0$ и последовательность отрицательна. Непрерывная зависимость семейства $\widehat{Q}_0(h)$ проверяется аналогично.

Докажем компактность $Q(h)$ при каждом $h < 0$. Оператор $Q(h)$ является композицией непрерывного оператора P_{tr} и компактного e^{hG}. Компактность последнего следует из того, что его можно приблизить конечномерными. Действительно, положим

$$e^{hG_n}:\ l^1 \to l^1, \quad \left(xe^{hG_n}\right)_i := x_ie^{h(1+2i)},\ i < n, \quad \left(xe^{hG_n}\right)_i := 0,\ i \geq n.$$

Имеем,

$$\left|\left|e^{hG} - e^{h_0G_n}\right|\right| = \sup_{i\geq n}\left|e^{h(1+2i)}\right| \to 0,\ h < 0.$$

Условие 3 леммы 2 очевидно выполнено.

Выполнение условия 4 вытекает из строгой положительности оператора $Q(h)$, а именно выполнено сотношение:

$$(Q(h))_{i,j} = (P_{tr})_{i,j}e^{h(1+2j)} > 0,\ i,j \geq 0.$$

Остается проверить условие 5. Положим

$$x_0(h) := e_0 = (1, 0, 0, \ldots).$$

Тогда для выполнения условия 5 достаточно показать, что нулевая координата вектора $e_0Q(h)$ положительна. Действительно,

$$(e_0Q(h))_0 = \mathbf{E}\left(e^{h(1+2Z_1)}I(Z_1 = 0)\right) = e^h\mathbf{E}q_0 =: \varepsilon(h).$$

в силу определения процесса $\{Z_k,\ k \geq 0\}$ (см. соотношение (5)). Таким образом, $(x_0(h)Q(h) - \varepsilon(h)x_0(h)) \in K_+$, что и требовалось доказать.

Таким образом, мы показали, что семейства $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ удовлетворяют условиям леммы 2. □

References

[1] H. Kesten, M.V. Kozlov, F. Spitzer, *A limit law for random walk in a random environment*, Compositio mathematica, **30**:2 (1975), 145–168.

[2] A. Greven, F. den Hollander, *Large deviations for a random walk in random environment*, The Annals of Probability, **22**:3 (1994), 1381–1428.

[3] A. Dembo, Y. Peres, O. Zeitouni, *Tail estimates for one-dimensional random walk in random environment*, Communications in mathematical physics, **181**:3 (1996), 667–683.

[4] F. Comets, N. Gantert, O. Zeitouni, *Quenched, annealed and functional large deviations for one-dimensional random walk in random environment*, Probability theory and related fields, **118**:1 (2000), 65–114.

[5] F. Solomon, *Random walks in a random environment*, The Annals of Probability, **3**:1 (1975), 1–31.

[6] G.A. Bakai, *Large deviations for the first moment RWRE reaching higher level*, Diskretnaya Matematika, **34**:4 (2022), 3–13.

[7] G.A. Bakai, *Large deviations for a terminating compound renewal process*, Theory Probab. Appl., **66**:2 (2021), 261—283.

[8] A.A. Mogulskii, *Local theorems for arithmetic compound renewal processes when Cramer's condition holds*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 21–41.

[9] G.A. Bakai, *Characterization of large deviation probabilities for regenerative sequences*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **316** (2022), 40–56.

[10] V.I. Afanasiev, *Local lower deviations of strictly supercritical branching process in random environment with geometric number of descendants*, Diskretnaya Matematika, **34**:4 (2022), 14–27.

[11] H. Schaefer, *Some spectral properties of positive linear operators*, Pacific Journal of Mathematics, **10**:3 (1960), 1009–1019.

[12] I. Marek, *Frobenius theory of positive operators: Comparison theorems and applications*, SIAM Journal on Applied Mathematics, **19**:3 (1970), 607–628.

[13] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Moscow, 1972.

[14] H. Schaefer, *On the point spectrum of positive operators*, Proceedings of the American Mathematical Society, **15**:1 (1964), 56–60.

Gavriil Andreevich Bakai
Steklov Mathematical Institute of RAS,
Gubkin St., 8,
119991, Moscow, Russia
E-mail address: gavrik_lur_bakay@mail.ru