

МАТРИЦА СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ
РЕШЕНИЯ ПАРЫ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ
ЗАПАЗДЫВАНИЯМИИ.Е. Полосков *Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

Abstract: The paper is devoted to obtaining relations for the components of the matrix of auto and cross power spectral density functions for the solution of a system of couple linear stochastic parabolic differential equations with constant coefficients and three delays in the steady state. The problem posed is solved on the basis of a generalization of the S. Guillozic scheme proposed for the analysis of alone linear stochastic ordinary differential equations with constant delays and coefficients. Then we verify the formally constructed matrix components for existence conditions and the presence of standard properties of power spectral densities. In the final part of the paper, an example based on the relations obtained demonstrates a significant difference between the power spectral density functions of systems with and without delay.

Keywords: covariance function delay, parabolic equation, power spectral density function, stochastic partial differential equation.

POLOSKOV, I.E., MATRIX OF STATIONARY SPECTRAL DENSITIES FOR THE SOLUTION OF COUPLE LINEAR STOCHASTIC PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SEVERAL DELAYS.

© 2023 Полосков И.Е.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

1 Введение

Анализ, моделирование и прогнозирование сложных процессов, происходящих в технике, природе, обществе и др., требуют разработки новых инструментов исследования. Между тем в математических моделях большинства процессов мы сталкиваемся с неопределенностью из-за неполноты моделей, ошибок измерений и отсутствия знаний, связанных с входными данными моделей. Выбор моделей с сосредоточенными и распределенными параметрами в форме стохастических дифференциальных уравнений, обыкновенных [1, 2] и в частных производных [1, 3, 4] (СОДУ, СДУвЧП), решениями которых являются случайные процессы [5] и поля [6, 7], дают возможность учета неточных данных и внешних и/или внутренних возмущений в математические модели.

Основными вероятностными характеристиками векторов состояния стохастических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами как с запаздыванием, так и без него являются пространственно-временные плотности распределения [1] и функционалы плотности вероятности [8, 9] этих векторов соответственно. К сожалению, на достигнутом уровне научных исследований для произвольных систем СОДУ и СДУвЧП, не говоря уже о СОДУ и СДУвЧП с запаздыванием, невозможно получить аналитические соотношения для указанных плотностей и функционалов векторов состояния. В ряде случаев задача может быть упрощена, если ограничиться изучением стационарных режимов и вычислением стационарных характеристик, если таковые существуют. Анализ систем еще более упрощается, если рассматриваются линейные СДУ с постоянными коэффициентами и аддитивными возмущениями.

Ряд простых проблем для линейных отдельных СОДУ с одним постоянным запаздыванием был решен У. Кюхлером [10], С. Гийюзиком [11, 12] и Т.Д. Франком [13, 14]. М.С. Киннели (M.S. Kinnally) в своей диссертации [15] получил достаточные условия существования и единственности стационарных распределений для СОДУ с запаздыванием с неотрицательными связями. В работе [16] были получены общие достаточные условия существования инвариантной меры для СОДУ с запаздыванием и экспоненциальной сходимости к равновесию.

Распространение схемы С. Гийюзика [17] построения спектральной плотности решения линейного СОДУ с одним постоянным запаздыванием и постоянными коэффициентами на новые классы отдельных уравнений и систем линейных СОДУ с запаздыванием осуществлено в ряде наших работ [18–20].

Известен ряд публикаций, посвященный разным аспектам стационарных состояний решений детерминированных ДУвЧП с запаздыванием. Отметим две из них: в работе [21] рассматриваются вопросы существования, устойчивости и наличия глобальных аттракторов периодических

во времени решений для системы параболических уравнений в ограниченной области, в [22] – условия устойчивости одиночной локализованной структуры в детерминированной трехкомпонентной реакционно-диффузионной системе.

Важным классом стохастических систем с запаздыванием являются линейные стохастические эволюционные дифференциальные уравнений в частных производных¹ с запаздыванием. Из-за особой сложности анализа таких уравнений особый интерес представляют те редкие модели, форма которых позволяет получить точные вероятностные характеристики соответствующих векторных случайных полей состояния.

В рамках данного направления отметим следующие работы: в [23] получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости решения нейтрального СДУвЧП, в [24] – условия устойчивости для стохастической двумерной системы уравнений Навье–Стокса, в [25] рассматриваются существование и единственность стационарных решений СДУвЧП с запаздыванием и аддитивным шумом.

В настоящей работе произведено обобщение результатов наших предыдущих работ [26–28] для отдельных уравнений и более простых форм систем, которые переносятся на систему двух СДУвЧП с тремя запаздываниями параболического типа с постоянными коэффициентами. Иллюстративный материал готовился в среде пакета Wolfram Mathematica [29].

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему СДУвЧП с запаздываниями следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\ell(x, t)}{\partial t} + \alpha_{\ell 1} U_\ell(x, t) + \alpha_{\ell 2} U_\ell(x, t_{\tau_1}) + \alpha_{\ell 3} U_{3-\ell}(x, t) + \\ + \alpha_{\ell 4} U_{3-\ell}(x, t_{\tau_2}) = \beta_{\ell 1} \frac{\partial^2 U_\ell(x, t)}{\partial x^2} + \beta_{\ell 2} \frac{\partial^2 U_\ell(x, t_{\tau_3})}{\partial x^2} + \gamma_\ell \Xi_\ell(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где t – время ($t \geq 0$), $t_{\tau_j} = t - \tau_j$; $\tau_j > 0$ – постоянные запаздывания ($j = 1, 2, 3$); $x \in \mathbb{R}$ – пространственный аргумент; $U_\ell(x, t)$ – случайные поля второго порядка с неизвестными характеристиками; $\Xi_\ell(x, t)$ – стационарные поля с известными пространственно-временными автоковариационными функциями $\mathcal{C}_{\Xi_\ell \Xi_\ell}(\underline{x}, \underline{t})$ и соответствующими спектральными плотностями $\mathcal{S}_{\Xi_\ell \Xi_\ell}(\omega_1, \omega_2)$, для которых верны двумерные формулы Винера–Хинчина [6, p. 94]

$$\mathcal{S}_{\Xi_k \Xi_\ell}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_1 \underline{x} + \omega_2 \underline{t})} \mathcal{C}_{\Xi_k \Xi_\ell}(\underline{x}, \underline{t}) d\underline{x} d\underline{t}, \quad (2)$$

¹Заметим, что нередко СДУвЧП – это детерминированные ДУвЧП, к которым "добавлены" случайные пространственно-временные возмущения.

$$\mathcal{C}_{\Xi_k \Xi_\ell}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_1 x + \omega_2 t)} \mathcal{S}_{\Xi_k \Xi_\ell}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2; \quad (3)$$

$\alpha_{\ell 1} > 0$, $\alpha_{\ell 2}$, $\alpha_{\ell 3}$, $\alpha_{\ell 4}$, $\beta_{\ell 1} > 0$, $\beta_{\ell 2}$, γ_ℓ – константы; $k, \ell = 1, 2$; i – мнимая единица.

Целью исследования является построение спектральных плотностей компонент векторного случайного поля $\mathbf{U}(x, t) = \{U_1(x, t), U_2(x, t)\}$, определяющего состояние рассматриваемой системы и являющегося решением системы уравнений (1).

3 Построение соотношений

3.1. Уравнения для ковариационных функций в стационарном режиме. Чтобы получить уравнения для полей математического ожидания $m_{U_\ell}(x, t)$, усредним уравнение (1) по пространству элементарных исходов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{U_\ell}(x, t)}{\partial t} + \alpha_{\ell 1} m_{U_\ell}(x, t) + \alpha_{\ell 2} m_{U_\ell}(x, t_{\tau_1}) + \alpha_{\ell 3} m_{U_{3-\ell}}(x, t) + \\ + \alpha_{\ell 4} m_{U_{3-\ell}}(x, t_{\tau_2}) = \beta_{\ell 1} \frac{\partial^2 m_{U_\ell}(x, t)}{\partial x^2} + \beta_{\ell 2} \frac{\partial^2 m_{U_\ell}(x, t_{\tau_3})}{\partial x^2} + \gamma_\ell m_{\Xi_\ell}(x, t). \end{aligned}$$

Вычтем последнее уравнение из уравнения (1), введем обозначения $U_\ell^\circ(x, t) = U_\ell(x, t) - m_{U_\ell}(x, t)$, $\Xi_\ell^\circ(x, t) = \Xi_\ell(x, t) - m_{\Xi_\ell}(x, t)$ и запишем результат так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\ell^\circ(x, t)}{\partial t} + \alpha_{\ell 1} U_\ell^\circ(x, t) + \alpha_{\ell 2} U_\ell^\circ(x, t_{\tau_1}) + \alpha_{\ell 3} U_{3-\ell}(x, t) + \\ + \alpha_{\ell 4} U_{3-\ell}(x, t_{\tau_2}) = \beta_{\ell 1} \frac{\partial^2 U_\ell^\circ(x, t)}{\partial x^2} + \beta_{\ell 2} \frac{\partial^2 U_\ell^\circ(x, t_{\tau_3})}{\partial x^2} + \gamma_\ell \Xi_\ell^\circ(x, t). \end{aligned}$$

Отсюда получим уравнения для моментов времени t_1 и t_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\ell^\circ(x_k, t_k)}{\partial t_k} + \alpha_{\ell 1} U_\ell^\circ(x_k, t_k) + \alpha_{\ell 2} U_\ell^\circ(x_k, t_{k\tau_1}) + \alpha_{\ell 3} U_{3-\ell}(x_k, t_k) + \\ + \alpha_{\ell 4} U_{3-\ell}(x_k, t_{k\tau_2}) = \beta_{\ell 1} \frac{\partial^2 U_\ell^\circ(x_k, t_k)}{\partial x_k^2} + \beta_{\ell 2} \frac{\partial^2 U_\ell^\circ(x_k, t_{k\tau_3})}{\partial x_k^2} + \\ + \gamma_\ell \Xi_\ell^\circ(x_k, t_k), \quad \ell, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

После этого умножим первое и второе ($k = 1$) из уравнений (4) на $U_1^\circ(x_2, t_2)$ и $U_2^\circ(x_2, t_2)$, а третье и четвертое ($k = 2$) – на $\Xi_1^\circ(x_1, t_1)$ и $\Xi_2^\circ(x_1, t_1)$. А затем усредним получившиеся соотношения. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial t_1} + \alpha_{\ell 1} \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x_1, t_1; x_2, t_2) + \alpha_{\ell 2} \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x_1, t_{1\tau_1}; x_2, t_2) + \\ + \alpha_{\ell 3} \mathcal{C}_{U_{3-\ell} U_j}(x_1, t_1; x_2, t_2) + \alpha_{\ell 4} \mathcal{C}_{U_{3-\ell} U_j}(x_1, t_{1\tau_2}; x_2, t_2) = \end{aligned}$$

$$= \beta_{\ell 1} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial x_1^2} + \beta_{\ell 2} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(x_1, t_1 \tau_3; x_2, t_2)}{\partial x_1^2} + \gamma_\ell \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1, t_1; x_2, t_2), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial t_2} + \alpha_{j1} \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1, t_1; x_2, t_2) + \alpha_{j2} \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1, t_1; x_2, t_2 \tau_1) + \\ & + \alpha_{j3} \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(x_1, t_1; x_2, t_2) + \alpha_{j4} \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(x_1, t_1; x_2, t_2 \tau_2) = \\ & = \beta_{j1} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial x_2^2} + \beta_{j2} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(x_1, t_1; x_2, t_2 \tau_3)}{\partial x_2^2} + \\ & + \gamma_j \mathcal{C}_{\Xi_\ell \Xi_j}(x_1, t_1; x_2, t_2), \quad (6) \\ & \ell = 1, 2, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Пусть после завершения переходного режима система находится в стационарном состоянии, а случайные поля $U_1(x, t)$, $U_2(x, t)$, $\Xi_1(x, t)$ и $\Xi_2(x, t)$ можно считать стационарными и стационарно связанными в широком смысле по времени и пространству. Тогда уравнения (5), (6) примут следующую форму:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(\underline{x}, \underline{t})}{\partial \underline{t}} + \alpha_{\ell 1} \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(\underline{x}, \underline{t}) + \alpha_{\ell 2} \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(\underline{x}, \underline{t} + \tau_1) + \\ & + \alpha_{\ell 3} \mathcal{C}_{U_{3-\ell} U_j}(\underline{x}, \underline{t}) + \alpha_{\ell 4} \mathcal{C}_{U_{3-\ell} U_j}(\underline{x}, \underline{t} + \tau_2) = \\ & = \beta_{\ell 1} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(\underline{x}, \underline{t})}{\partial \underline{x}^2} + \beta_{\ell 2} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_\ell U_j}(\underline{x}, \underline{t} + \tau_3)}{\partial \underline{x}^2} + \gamma_\ell \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(\underline{x}, \underline{t}), \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(\underline{x}, \underline{t})}{\partial \underline{t}} + \alpha_{j1} \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(\underline{x}, \underline{t}) + \alpha_{j2} \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(\underline{x}, \underline{t} - \tau_1) + \\ & + \alpha_{j3} \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(\underline{x}, \underline{t}) + \alpha_{j4} \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(\underline{x}, \underline{t} - \tau_2) = \\ & = \beta_{j1} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(\underline{x}, \underline{t})}{\partial \underline{x}^2} + \beta_{j2} \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{\Xi_\ell U_j}(\underline{x}, \underline{t} - \tau_3)}{\partial \underline{x}^2} + \gamma_j \mathcal{C}_{\Xi_\ell \Xi_j}(\underline{x}, \underline{t}), \quad (8) \\ & \ell = 1, 2, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

3.2. Уравнения для спектральных плотностей. Пусть $Y(x, t)$ и $Z(x, t)$ – некоторые стационарные и стационарно связанные случайные поля с известными ковариационными функциями и спектральными плотностями. Тогда для $r \in \mathbb{N}$ верны следующие соотношения:

$$\mathcal{S}_{YZ}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_1 \underline{x} + \omega_2 \underline{t})} \mathcal{C}_{YZ}(\underline{x}, \underline{t}) d\underline{x} d\underline{t}, \quad (9)$$

$$e^{\pm i\omega_2 \tau} \mathcal{S}_{YZ}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_1 \underline{x} + \omega_2 \underline{t})} \mathcal{C}_{YZ}(\underline{x}, \underline{t} \pm \tau) d\underline{x} d\underline{t}, \quad (10)$$

$$(\mathbf{i}\omega_1)^r \mathcal{S}_{YZ}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathbf{i}(\omega_1 \underline{x} + \omega_2 \underline{t})} \frac{\partial^r C_{YZ}(\underline{x}, \underline{t})}{\partial \underline{x}^r} d\underline{x} d\underline{t}, \quad (11)$$

$$(\mathbf{i}\omega_2)^r \mathcal{S}_{YZ}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathbf{i}(\omega_1 \underline{x} + \omega_2 \underline{t})} \frac{\partial^r C_{YZ}(\underline{x}, \underline{t})}{\partial \underline{t}^r} d\underline{x} d\underline{t}, \quad (12)$$

а также $\mathcal{S}_{YZ}(\omega) = \overline{\mathcal{S}_{ZY}(\omega)}$, $\mathcal{S}_{YZ}(\omega) = \mathcal{S}_{ZY}(-\omega)$ [30, 31], где черта сверху означает комплексное сопряжение.

На основании соотношений (9)–(12) в уравнениях (7), (8) перейдем к спектральным плотностям. Тогда получим:

$$\begin{aligned} & -\mathbf{i}\omega_2 \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \alpha_{\ell 1} \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \alpha_{\ell 2} e^{\mathbf{i}\omega_2 \tau_1} \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \\ & + \alpha_{\ell 3} \mathcal{S}_{U_{3-\ell} U_j}(\omega_1, \omega_2) + \alpha_{\ell 4} e^{\mathbf{i}\omega_2 \tau_2} \mathcal{S}_{U_{3-\ell} U_j}(\omega_1, \omega_2) = \beta_{\ell 1} (\mathbf{i}\omega_1)^2 \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \\ & + \beta_{\ell 2} (\mathbf{i}\omega_1)^2 e^{\mathbf{i}\omega_2 \tau_3} \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \gamma_\ell \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2), \\ & \mathbf{i}\omega_2 \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \alpha_{j 1} \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \alpha_{j 2} e^{-\mathbf{i}\omega_2 \tau_1} \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \\ & + \alpha_{j 3} \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(\omega_1, \omega_2) + \alpha_{j 4} e^{-\mathbf{i}\omega_2 \tau_2} \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(\omega_1, \omega_2) = \beta_{j 1} (\mathbf{i}\omega_1)^2 \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \\ & + \beta_{j 2} (\mathbf{i}\omega_1)^2 e^{-\mathbf{i}\omega_2 \tau_3} \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \gamma_j \mathcal{S}_{\Xi_\ell \Xi_j}(\omega_1, \omega_2), \\ & \ell = 1, 2, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (\beta_{\ell 1} \omega_1^2 + \beta_{\ell 2} \omega_1^2 e^{\mathbf{i}\omega_2 \tau_3} + \alpha_{\ell 1} + \alpha_{\ell 2} e^{\mathbf{i}\omega_2 \tau_1} - \mathbf{i}\omega_2) \mathcal{S}_{U_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \\ & (\alpha_{\ell 3} + \alpha_{\ell 4} e^{\mathbf{i}\omega_2 \tau_2}) \mathcal{S}_{U_{3-\ell} U_j}(\omega_1, \omega_2) = \gamma_\ell \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2), \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\beta_{j 1} \omega_1^2 + \beta_{j 2} \omega_1^2 e^{-\mathbf{i}\omega_2 \tau_3} + \alpha_{j 1} + \alpha_{j 2} e^{-\mathbf{i}\omega_2 \tau_1} + \mathbf{i}\omega_2) \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_j}(\omega_1, \omega_2) + \\ & + (\alpha_{j 3} + \alpha_{j 4} e^{-\mathbf{i}\omega_2 \tau_2}) \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_{3-j}}(\omega_1, \omega_2) = \gamma_j \mathcal{S}_{\Xi_\ell \Xi_j}(\omega_1, \omega_2). \quad (14) \end{aligned}$$

3.3. Формальные соотношения для спектральных плотностей.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} h_\ell &= \beta_{\ell 1} \omega_1^2 + \beta_{\ell 2} \omega_1^2 e^{\mathbf{i}\omega_2 \tau_3} + \alpha_{\ell 1} + \alpha_{\ell 2} e^{\mathbf{i}\omega_2 \tau_1} - \mathbf{i}\omega_2 \equiv h_{\ell 1} + h_{\ell 2} \mathbf{i}, \\ h_{\ell+2} &= \alpha_{\ell 3} + \alpha_{\ell 4} e^{\mathbf{i}\omega_2 \tau_2} \equiv h_{\ell+2, 1} + h_{\ell+2, 2} \mathbf{i}, \quad \ell = 1, 2 \end{aligned}$$

(явные соотношения для h_{ij} , $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2$, приведены в приложении). Учитывая эти обозначения, систему линейных алгебраических уравнений (13), (14) для неизвестных спектральных плотностей можно записать так:

$$\begin{aligned} h_\ell \mathcal{S}_{U_\ell U_1}(\omega_1, \omega_2) + h_{\ell+2} \mathcal{S}_{U_{3-\ell} U_1}(\omega_1, \omega_2) &= \gamma_\ell \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_1}(\omega_1, \omega_2), \\ h_\ell \mathcal{S}_{U_\ell U_2}(\omega_1, \omega_2) + h_{\ell+2} \mathcal{S}_{U_{3-\ell} U_2}(\omega_1, \omega_2) &= \gamma_\ell \mathcal{S}_{\Xi_\ell U_2}(\omega_1, \omega_2), \\ \bar{h}_\ell \mathcal{S}_{\Xi_1 U_\ell}(\omega_1, \omega_2) + \bar{h}_{\ell+2} \mathcal{S}_{\Xi_1 U_{3-\ell}}(\omega_1, \omega_2) &= \gamma_\ell \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_\ell}(\omega_1, \omega_2), \\ \bar{h}_\ell \mathcal{S}_{\Xi_2 U_\ell}(\omega_1, \omega_2) + \bar{h}_{\ell+2} \mathcal{S}_{\Xi_2 U_{3-\ell}}(\omega_1, \omega_2) &= \gamma_\ell \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_\ell}(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Несложно увидеть, что эта система распадается на четыре группы по паре уравнений. Найдем решения независимых третьей и четвертой групп:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\Xi_1 U_1}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{\gamma_1 \bar{h}_2 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_2 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2)}{\bar{h}_1 \bar{h}_2 - \bar{h}_3 \bar{h}_4}, \\ \mathcal{S}_{\Xi_1 U_2}(\omega_1, \omega_2) &= -\frac{\gamma_1 \bar{h}_4 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_2 \bar{h}_1 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2)}{\bar{h}_1 \bar{h}_2 - \bar{h}_3 \bar{h}_4}, \\ \mathcal{S}_{\Xi_2 U_1}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{\gamma_1 \bar{h}_2 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_2 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2)}{\bar{h}_1 \bar{h}_2 - \bar{h}_3 \bar{h}_4}, \\ \mathcal{S}_{\Xi_2 U_2}(\omega_1, \omega_2) &= -\frac{\gamma_1 \bar{h}_4 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_2 \bar{h}_1 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2)}{\bar{h}_1 \bar{h}_2 - \bar{h}_3 \bar{h}_4}.\end{aligned}$$

Подставляя эти функции в правые части уравнений первой и второй групп, находим:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{\gamma_1 h_2 \mathcal{S}_{\Xi_1 U_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_2 h_3 \mathcal{S}_{\Xi_2 U_1}(\omega_1, \omega_2)}{h_1 h_2 - h_3 h_4} = \frac{H_1}{H_0}, \\ \mathcal{S}_{U_1 U_2}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{\gamma_1 h_2 \mathcal{S}_{\Xi_1 U_2}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_2 h_3 \mathcal{S}_{\Xi_2 U_2}(\omega_1, \omega_2)}{h_1 h_2 - h_3 h_4} = \frac{H_2}{H_0}, \\ \mathcal{S}_{U_2 U_1}(\omega_1, \omega_2) &= -\frac{\gamma_1 h_4 \mathcal{S}_{\Xi_1 U_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_2 h_1 \mathcal{S}_{\Xi_2 U_1}(\omega_1, \omega_2)}{h_1 h_2 - h_3 h_4} = \frac{H_3}{H_0}, \\ \mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_1, \omega_2) &= -\frac{\gamma_1 h_4 \mathcal{S}_{\Xi_1 U_2}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_2 h_1 \mathcal{S}_{\Xi_2 U_2}(\omega_1, \omega_2)}{h_1 h_2 - h_3 h_4} = \frac{H_4}{H_0},\end{aligned}\quad (15)$$

где

$$H_0 = (h_1 h_2 - h_3 h_4)(\bar{h}_1 \bar{h}_2 - \bar{h}_3 \bar{h}_4) = \quad (16)$$

$$= (h_{12} h_{21} + h_{11} h_{22} - h_{32} h_{41} - h_{31} h_{42})^2 + \quad (17)$$

$$+ (h_{11} h_{21} - h_{12} h_{22} - h_{31} h_{41} + h_{32} h_{42})^2 \equiv H_{01}^2 + H_{02}^2; \quad (18)$$

$$\begin{aligned}H_1 &= \gamma_1^2 h_2 \bar{h}_2 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_1 \gamma_2 h_2 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2) - \\ &\quad - \gamma_1 \gamma_2 h_3 \bar{h}_2 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) + \gamma_2^2 h_3 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_2 &= -\gamma_1^2 h_4 \bar{h}_2 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) + \gamma_1 \gamma_2 h_4 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2) + \\ &\quad + \gamma_1 \gamma_2 h_1 \bar{h}_2 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_2^2 h_1 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2); \end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}H_3 &= -\gamma_1^2 h_2 \bar{h}_4 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_1 \gamma_2 h_2 \bar{h}_1 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2) - \\ &\quad - \gamma_1 \gamma_2 h_3 \bar{h}_4 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) + \gamma_2^2 h_3 \bar{h}_1 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_4 &= \gamma_1^2 h_4 \bar{h}_4 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_1 \gamma_2 h_4 \bar{h}_1 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2) - \\ &\quad - \gamma_1 \gamma_2 h_1 \bar{h}_4 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) + \gamma_2^2 h_1 \bar{h}_1 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2).\end{aligned}$$

4 Анализ полученных соотношений

Вследствие того, что соотношения для функций $\mathcal{S}_{U_k U_\ell(\omega_1, \omega_2)}$, $k, \ell = 1, 2$, были получены в результате формальных выкладок, необходимо показать, что области определения этих функций не пусты, и они имеют основные свойства спектральных плотностей [30, 31].

4.1. Структура знаменателя H_0 . Исследуем знаменатель H_0 дробей в правых частях равенств (15), нули которого образуют множество точек, где $\mathcal{S}_{U_k U_\ell(\omega_1, \omega_2)}$, $k, \ell = 1, 2$, не существуют.

Прежде сего заметим, что из представления (18) следует, что H_0 – вещественная функция, а также то, что обратиться в нуль функция H_0 переменных ω_1, ω_2 и множества параметров уравнений (1) может тогда и только тогда, когда выражения H_{01} и H_{02} при одних и тех же значениях переменных и параметров примут одно и то же нулевое значение. Проанализируем структуру этих функций. Несложно увидеть, что они являются квадратными квазиполиномами относительно ω_1^2 и ω_2 , причем коэффициенты этих квазиполиномов – линейные функции синусов и косинусов различных периодов с отличающимися коэффициентами, зависящими от параметров задачи. Можно предполагать, что при таких характеристиках единственными возможными множествами точек на плоскости $O\Omega_1\Omega_2$, в которых H_{01} и H_{02} могут обращаться в ноль, являются прямые $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$ и параллельные последней вследствие наличия тригонометрических функций.

Для получения соотношений, обеспечивающих отличие знаменателя H_0 от нуля, будем использовать условие обращения квазиполиномов в нуль, которым является наличие у них действительных корней, а также учитывать, что по постановке задачи $\alpha_{\ell 1} > 0$, $\beta_{\ell 1} > 0$, $\ell = 1, 2$.

Рассмотрим H_{01} и H_{02} как квадратные квазиполиномы ω_1^2 и ω_2 (см. Приложение). На прямой $\omega_2 = 0$ эти функции примут следующий вид:

$$\begin{aligned} H_{01}(\omega_1, 0) &= [(\alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{21} + \alpha_{22}) - (\alpha_{13} + \alpha_{14})(\alpha_{23} + \alpha_{24})] + \\ &+ [(\alpha_{11} + \alpha_{12})(\beta_{21} + \beta_{22}) + (\alpha_{21} + \alpha_{22})(\beta_{11} + \beta_{12})] \omega_1^2 + \\ &+ (\beta_{11} + \beta_{22})(\beta_{21} + \beta_{22}) \omega_1^4 \equiv H_{010} + H_{011} \omega_1^2 + H_{012} \omega_1^4; \\ H_{02}(\omega_1, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Вследствие того, что $H_{02}(\omega_1, 0) \equiv 0$, здесь условия отсутствия действительных корней у уравнения $H_{01}(\omega_1, 0) = 0$ и соответственно у H_0 могут быть получены из критерия Рауса–Гурвица: если коэффициенты биквадратного уравнения положительны, то оба решения соответствующего квадратного уравнения относительно $z = \omega_1^2$ отрицательны, а следовательно, соответствующие ω_1 – комплексные числа. Для этого достаточно выполнения следующих неравенств:

$$\alpha_{11} > |\alpha_{12}|, \quad \alpha_{21} > |\alpha_{22}|, \quad \beta_{11} > |\beta_{12}|, \quad \beta_{21} > |\beta_{22}|, \quad (20)$$

$$(\alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{21} + \alpha_{22}) > (\alpha_{13} + \alpha_{14})(\alpha_{23} + \alpha_{24}). \quad (21)$$

На прямой $\omega_1 = 0$ функции H_{01} и H_{02} примут следующий вид:

$$\begin{aligned} H_{01}(0, \omega_2) &= [\alpha_{11} \alpha_{21} - \alpha_{13} \alpha_{23} + (\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21}) \cos(\tau_1 \omega_2) + \\ &\quad + \alpha_{12} \alpha_{22} \cos(2 \tau_1 \omega_2) - \alpha_{14} \alpha_{24} \cos(2 \tau_2 \omega_2) - (\alpha_{13} \alpha_{24} + \\ &\quad + \alpha_{14} \alpha_{23}) \cos(\tau_2 \omega_2)] + (\alpha_{12} + \alpha_{22}) \sin(\tau_1 \omega_2) \omega_2 - \omega_2^2; \\ H_{02}(0, \omega_2) &= [(\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21}) \sin(\tau_1 \omega_2) + \alpha_{12} \alpha_{22} \sin(2 \tau_1 \omega_2) - \\ &\quad - (\alpha_{13} \alpha_{24} + \alpha_{14} \alpha_{23}) \sin(\tau_2 \omega_2) - \alpha_{14} \alpha_{24} \sin(2 \tau_2 \omega_2)] - \\ &\quad - [\alpha_{11} + \alpha_{21} + (\alpha_{12} + \alpha_{22}) \cos(\tau_1 \omega_2)] \omega_2. \end{aligned}$$

Пусть $\omega_2 = 0$. Тогда в точке $(0, 0)$ будем иметь:

$$\begin{aligned} H_{01}(0, 0) &= (\alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{21} + \alpha_{22}) - (\alpha_{13} + \alpha_{14})(\alpha_{23} + \alpha_{24}); \\ H_{02}(0, 0) &= 0, \end{aligned}$$

а следовательно, при условии (21) функция H_0 будет отличной от нуля.

Рассмотрим общий случай. Но проверить, обращаются ли одновременно H_{01} и H_{02} в нуль при их сложной структуре затруднительно. Поэтому анализ можно построить на следующем соображении: если эти функции ни при каких значениях аргументов и параметров не равны друг другу, то они не могут обратиться в нуль одновременно. Для использования этого соображения формально приравняем ненулевые коэффициенты при линейно независимых термах $(\omega_1^2)^k \omega_2^\ell$, $k, \ell = 0, 1, 2$, в H_{01} и H_{02} , а после приравнивания соберем все слагаемые в левых частях получившихся равенств, что приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} (\omega_1^2)^0 \omega_2^0 &: \alpha_{11} \alpha_{21} - \alpha_{13} \alpha_{23} + (\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21}) [\cos(\tau_1 \omega_2) - \sin(\tau_1 \omega_2)] + \\ &\quad + \alpha_{12} \alpha_{22} [\cos(2 \tau_1 \omega_2) - \sin(2 \tau_1 \omega_2)] + \\ &\quad + (\alpha_{13} \alpha_{24} + \alpha_{14} \alpha_{23}) [\sin(\tau_2 \omega_2) - \cos(\tau_2 \omega_2)] + \\ &\quad + \alpha_{14} \alpha_{24} [\sin(2 \tau_2 \omega_2) - \cos(2 \tau_2 \omega_2)] = 0; \\ (\omega_1^2)^0 \omega_2^1 &: \alpha_{11} + \alpha_{21} + (\alpha_{12} + \alpha_{22}) [\sin(\tau_1 \omega_2) + \cos(\tau_1 \omega_2)] = 0; \\ (\omega_1^2)^1 \omega_2^0 &: \alpha_{11} \beta_{21} + \alpha_{21} \beta_{11} + (\alpha_{12} \beta_{21} + \alpha_{22} \beta_{11}) [\cos(\tau_1 \omega_2) - \sin(\tau_1 \omega_2)] + \\ &\quad + (\alpha_{11} \beta_{22} + \alpha_{21} \beta_{12}) [\cos(\tau_3 \omega_2) - \sin(\tau_3 \omega_2)] + \\ &\quad + (\alpha_{12} \beta_{22} + \alpha_{22} \beta_{12}) [\cos(\tau_1 \omega_2 + \tau_3 \omega_2) - \sin(\tau_1 \omega_2 + \tau_3 \omega_2)] = 0; \\ (\omega_1^2)^1 \omega_2^1 &: \beta_{11} + \beta_{21} + (\beta_{12} + \beta_{22}) [\sin(\tau_3 \omega_2) + \cos(\tau_3 \omega_2)] = 0; \\ (\omega_1^2)^2 \omega_2^0 &: \beta_{11} \beta_{21} + (\beta_{11} \beta_{22} + \beta_{12} \beta_{21}) [\cos(\tau_3 \omega_2) - \sin(\tau_3 \omega_2)] + \\ &\quad + \beta_{12} \beta_{22} [\cos(2 \tau_3 \omega_2) - \sin(2 \tau_3 \omega_2)] = 0 \end{aligned}$$

(заметим, что коэффициенты, при $(\omega_1^2)^0 \omega_2^2$ изначально не могут быть одинаковыми). Несложно установить, что эти равенства никогда не будут выполняться, если:

$$\begin{aligned} (\omega_1^2)^0 \omega_2^0 &: \alpha_{11} \alpha_{21} > |\alpha_{12} \alpha_{22}| + |\alpha_{13} \alpha_{23}| + |\alpha_{14} \alpha_{24}| + \\ &\quad + |\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21}| + |\alpha_{13} \alpha_{24} + \alpha_{14} \alpha_{23}|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\omega_1^2)^0 \omega_2^1 &: \alpha_{11} > |\alpha_{12}|, \quad \alpha_{21} > |\alpha_{22}|; \\
 (\omega_1^2)^1 \omega_2^0 &: \alpha_{11} \beta_{21} + \alpha_{21} \beta_{11} > |\alpha_{12} \beta_{21} + \alpha_{22} \beta_{11}| + \\
 &+ |\alpha_{11} \beta_{22} + \alpha_{21} \beta_{12}| + |\alpha_{12} \beta_{22} + \alpha_{22} \beta_{12}|; \\
 (\omega_1^2)^1 \omega_2^1 &: \beta_{11} > |\beta_{12}|, \quad \beta_{21} > |\beta_{22}|; \\
 (\omega_1^2)^2 \omega_2^0 &: \beta_{11} \beta_{21} > |\beta_{11} \beta_{22} + \beta_{12} \beta_{21}| + |\beta_{12} \beta_{22}|,
 \end{aligned}$$

т. е. при полученных условиях функция H_0 в нуль не обращается, и соответствующие функции (15) существуют при любых ω_1 и ω_2 . В частности, если запаздывания отсутствуют, то все неравенства будут истинны.

4.2. Анализ функций $\mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_1, \omega_2)$ и $\mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_1, \omega_2)$. Докажем, что $\mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_1, \omega_2)$ – вещественная функция. Действительно, $\mathcal{S}_{U_1 U_1} = H_1/H_0$, причем из вещественности $H_0(\omega_1, \omega_2)$, $\mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2)$ и $\mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2)$ следует то, что

$$\begin{aligned}
 H_0(\omega_1, \omega_2) &= \overline{H_0}(\omega_1, \omega_2), \quad \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) = \overline{\mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2}}(\omega_1, \omega_2), \\
 \mathcal{S}_{U_2 U_2}(\omega_1, \omega_2) &= \overline{\mathcal{S}_{U_2 U_2}}(\omega_1, \omega_2).
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 H_1(\omega_1, \omega_2) &= \gamma_1^2 h_2 \bar{h}_2 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_1 \gamma_2 h_2 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2) - \\
 &- \gamma_1 \gamma_2 h_3 \bar{h}_2 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) + \gamma_2^2 h_3 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2) = \\
 &= \gamma_1^2 \overline{h_2 \bar{h}_2 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2)} - \gamma_1 \gamma_2 \overline{\bar{h}_2 h_3 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2)} - \\
 &- \gamma_1 \gamma_2 \overline{h_2 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2)} + \gamma_2^2 \overline{h_3 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2)} = \overline{H_1}(\omega_1, \omega_2).
 \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что $\mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_1, \omega_2) = \overline{\mathcal{S}_{U_1 U_1}}(\omega_1, \omega_2)$, а следовательно, $\mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_1, \omega_2)$ – вещественная функция.

Кроме того, из свойств ковариационных функций [30, 31] и несобственных интегралов с бесконечными пределами [32, 33], зависящих от параметров, можно установить, что функция $\mathcal{S}_{U_1 U_1}(\omega_1, \omega_2)$ неотрицательна.

Далее, из представления функций $H_{01}(\omega_1, \omega_2)$ и $H_{02}(\omega_1, \omega_2)$ (см. приложение) приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}
 H_{01}(\omega_1, \omega_2) &= H_{01}(-\omega_1, \omega_2) = H_{01}(\omega_1, -\omega_2) = H_{01}(-\omega_1, -\omega_2), \\
 H_{02}(\omega_1, \omega_2) &= H_{02}(-\omega_1, \omega_2) = H_{02}(\omega_1, -\omega_2) = H_{02}(-\omega_1, -\omega_2),
 \end{aligned}$$

а следовательно, $H_0(\omega_1, \omega_2)$ четна по аргументам ω_1 и ω_2 .

Теперь выясним наличие четности у функции $H_1(\omega_1, \omega_2)$:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \gamma_1^2 (h_{21}^2 + h_{22}^2) \mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1}(\omega_1, \omega_2) + \gamma_2^2 (h_{31}^2 + h_{32}^2) \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2) + \\
 &+ 2 \gamma_1 \gamma_2 [(h_{21} h_{31} - h_{22} h_{32}) \operatorname{Re} [\mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2)] + \\
 &+ (h_{21} h_{32} - h_{22} h_{31}) \operatorname{Im} [\mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2)]]],
 \end{aligned}$$

С учетом того, что h_{i1} – четные по аргументам ω_1 и ω_2 функции, h_{i1} – четные по ω_1 и нечетные по ω_2 , $i = 1, 2, 3, 4$ (см. приложение), а $\operatorname{Re} [\mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2)]$ и $\operatorname{Im} [\mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}(\omega_1, \omega_2)]$ – четная и нечетная по ω_1 и ω_2

функции соответственно, заключаем, что H_1 – четная по обоим аргументам, а следовательно, и функция $\mathcal{S}_{U_1U_1}$ четная по ω_1 и ω_2 .

Доказательство вещественности, неотрицательности и четности функции $\mathcal{S}_{U_2U_2}(\omega_1, \omega_2) = H_4/H_0$ аналогично.

4.3. Анализ функций $\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1, \omega_2)$ и $\mathcal{S}_{U_2U_1}(\omega_1, \omega_2)$. Докажем, что для этих комплекснозначных функций выполняется основное соотношение взаимных спектральных плотностей [31, р. 83]. Действительно,

$$\begin{aligned} H_2 &= -\gamma_1^2 h_4 \bar{h}_2 \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1, \omega_2) + \gamma_1 \gamma_2 h_4 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1, \omega_2) + \\ &\quad + \gamma_1 \gamma_2 h_1 \bar{h}_2 \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1, \omega_2) - \gamma_2^2 h_1 \bar{h}_3 \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1, \omega_2); \\ &= -\gamma_1^2 h_2 \overline{\bar{h}_4 \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_1}(\omega_1, \omega_2)} - \gamma_1 \gamma_2 h_2 \overline{\bar{h}_1 \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_1}(\omega_1, \omega_2)} - \\ &\quad - \gamma_1 \gamma_2 h_3 \overline{\bar{h}_4 \mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1, \omega_2)} + \gamma_2^2 h_3 \overline{\bar{h}_1 \mathcal{S}_{\Xi_2\Xi_2}(\omega_1, \omega_2)} = \overline{H_3}, \end{aligned}$$

а следовательно, с учетом вещественности H_0 и равенств $\mathcal{S}_{U_1U_2} = H_2/H_0$, $\mathcal{S}_{U_2U_1} = H_3/H_0$ получаем, что

$$\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1, \omega_2) = \overline{\mathcal{S}_{U_2U_1}(\omega_1, \omega_2)}.$$

Выделим действительную и мнимую части функции $\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1, \omega_2)$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} [\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1, \omega_2)] = \\ &= -\gamma_1 \gamma_2 [(h_{11} h_{21} + h_{12} h_{22} + h_{31} h_{41} + h_{32} h_{42}) \operatorname{Re} [\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1, \omega_2)] + \\ &\quad + (h_{12} h_{21} - h_{11} h_{22} + h_{32} h_{41} - h_{31} h_{42}) \operatorname{Im} [\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1, \omega_2)]] + \\ &+ \gamma_1^2 (h_{21} h_{41} + h_{22} h_{42}) \mathcal{S}_{U_1U_1}(\omega_1, \omega_2) + \gamma_2^2 (h_{11} h_{31} + h_{12} h_{32}) \mathcal{S}_{U_2U_2}(\omega_1, \omega_2); \\ &\operatorname{Im} [\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1, \omega_2)] = \\ &= \gamma_1 \gamma_2 [(h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} + h_{32} h_{41} - h_{31} h_{42}) \operatorname{Re} [\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1, \omega_2)] + \\ &\quad + (h_{12} h_{22} + h_{11} h_{21} - h_{31} h_{41} - h_{32} h_{42}) \operatorname{Im} [\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1, \omega_2)]] + \\ &+ \gamma_1^2 (h_{21} h_{42} - h_{22} h_{41}) \mathcal{S}_{U_1U_1}(\omega_1, \omega_2) + \gamma_2^2 (h_{12} h_{31} - h_{11} h_{32}) \mathcal{S}_{U_2U_2}(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

С учетом того, что функция $\operatorname{Re} [\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1, \omega_2)]$ четна по обоим аргументам, а $\operatorname{Im} [\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1, \omega_2)]$ четна по первому аргументу и нечетна по второму, то анализ составляющих термов показывает, что действительная и мнимая части функции $\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1, \omega_2)$ имеет такие же характеристики четности и нечетности, что и $\mathcal{S}_{\Xi_1\Xi_2}(\omega_1, \omega_2)$. Аналогичные выводы можно сказать и про функцию $\mathcal{S}_{U_2U_1}(\omega_1, \omega_2)$.

5 Пример

Продемонстрируем форму функций $\mathcal{S}_{U_1U_1}(\omega_1, \omega_2)$ (I), $\operatorname{Re} [\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1, \omega_2)]$ (II), $\operatorname{Im} [\mathcal{S}_{U_1U_2}(\omega_1, \omega_2)]$ (III), $\mathcal{S}_{U_2U_2}(\omega_1, \omega_2)$ (IV) для некоторых значений параметров.

5.1. Первая группа графиков относится к ситуации, когда запаздывания отсутствуют, т.е.

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0, \quad \alpha_{12} = \alpha_{14} = \alpha_{22} = \alpha_{24} = \beta_{12} = \beta_{22} = 0.$$

Остальные параметры визуализации имели следующие значения:

$$\alpha_{11} = 2, \quad \alpha_{13} = 1, \quad \alpha_{21} = 3/2, \quad \alpha_{23} = -1/2, \\ \beta_{11} = 1/50, \quad \beta_{21} = 1/100, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1/2.$$

Для расчетов применялись спектральные плотности полей вида:

$$\mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_1} = \frac{1}{1 + \omega_1^2 + 2\omega_2^2}, \quad \mathcal{S}_{\Xi_2 \Xi_2} = \frac{1}{1 + 2\omega_1^2 + \omega_2^2} \\ \operatorname{Re} [\mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}] = \frac{1}{2 + 2\omega_1^4 + 2\omega_2^4}, \quad \operatorname{Im} [\mathcal{S}_{\Xi_1 \Xi_2}] = \frac{\omega_2}{2 + 2\omega_1^4 + 2\omega_2^4}.$$

На рис. 1 – 4 изображены соответствующие линии уровня в данном случае (на рис. 3 высота $h_{-\ell}$ линии с номером $-\ell$ равна $-h_\ell$, $\ell = \overline{1, 9}$).

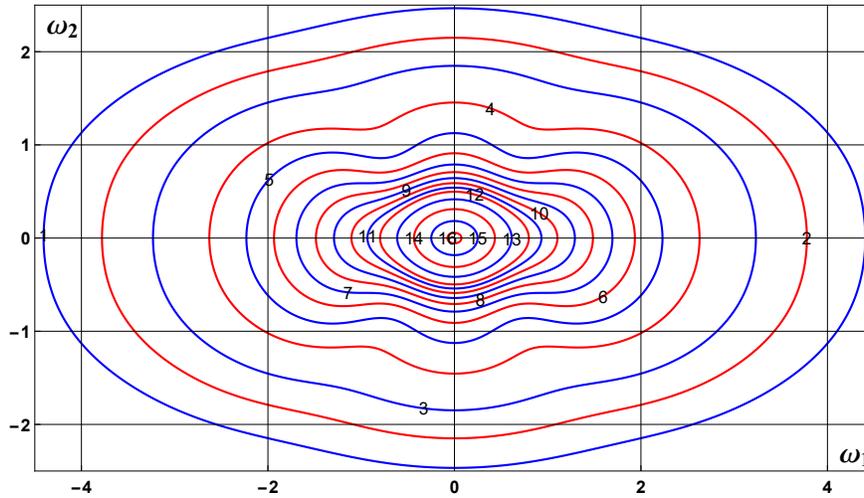


Рис. 1. Линии уровня функции I: 1 – 0.007, 2 – 0.01, 3 – 0.014, 4 – 0.021, 5 – 0.028, 6 – 0.035, 7 – 0.042, 8 – 0.049, 9 – 0.056, 10 – 0.063, 11 – 0.07, 12 – 0.077, 13 – 0.091, 14 – 0.11, 15 – 0.13, 16 – 0.1415

5.2. Теперь пусть запаздывания присутствуют. Выберем следующие значения:

$$\tau_1 = 1, \tau_2 = 2, \tau_3 = 4, \quad \alpha_{12} = 1/2, \quad \alpha_{14} = -1/2, \quad \alpha_{22} = 1, \quad \alpha_{24} = 1/4, \quad \beta_{12} = 1/100, \beta_{22} = 1/20$$

Остальные расчетные параметры те же, что и в подразделе 1°. На рис. 5 – 8 представлены линии уровня функций I – IV, соответствующие выбранным значениям параметров (на рис. 7 высота $h_{-\ell}$ линии с номером $-\ell$ равна $-h_\ell$, $\ell = \overline{1, 12}$).

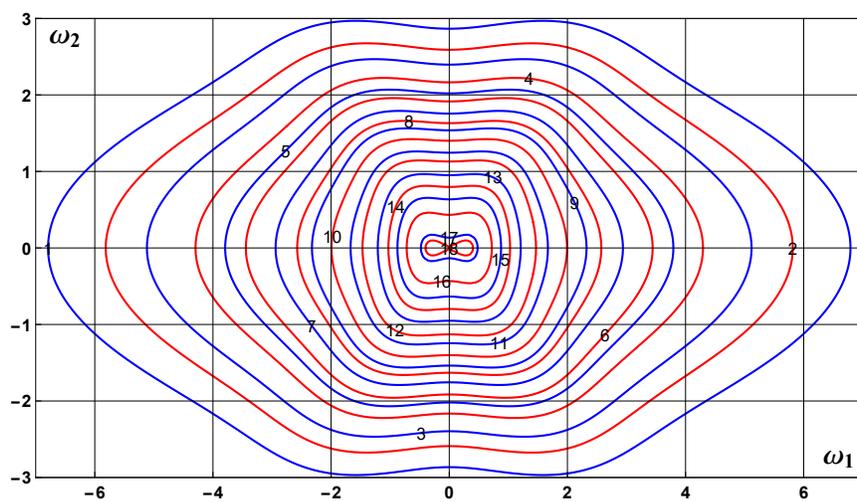


Рис. 2. Линии уровня функции II: 1 – 0.00035, 2 – 0.0006, 3 – 0.0009, 4 – 0.0015, 5 – 0.0021, 6 – 0.0027, 7 – 0.004, 8 – 0.0055, 9 – 0.007, 10 – 0.01, 11 – 0.015, 12 – 0.02, 13 – 0.03, 14 – 0.04, 15 – 0.05, 16 – 0.06, 17 – 0.07, 18 – 0.0714

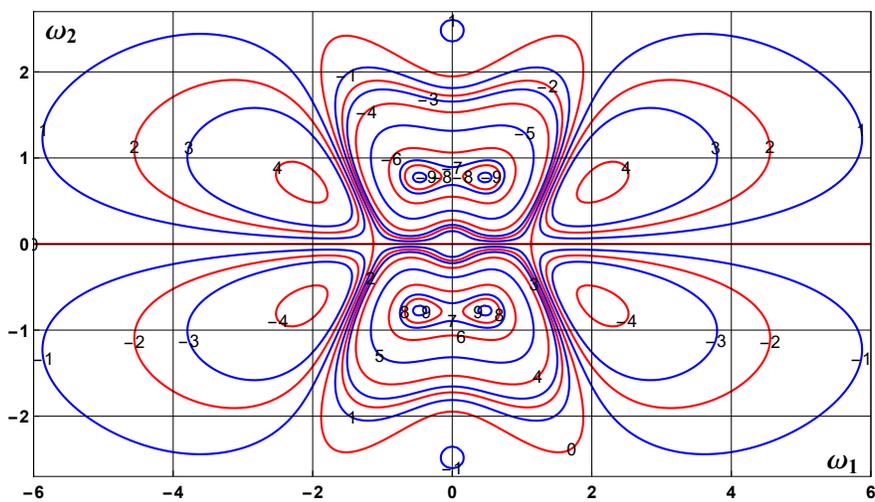


Рис. 3. Линии уровня функции III: 0 – 0.00, 1 – 0.0004, 2 – 0.0008, 3 – 0.0012, 4 – 0.0022, 5 – 0.005, 6 – 0.01, 7 – 0.013, 8 – 0.014, 9 – 0.015

По графикам видно, что появление запаздываний привело к существенным изменениям в формах функций I – IV.

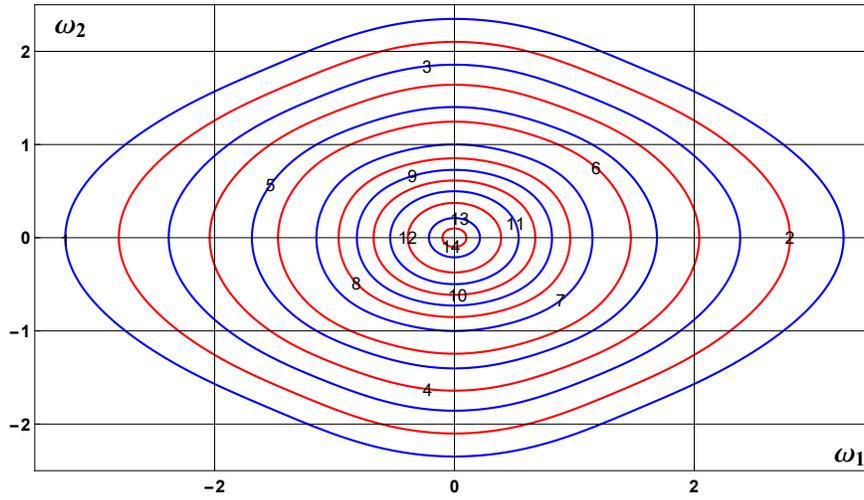


Рис. 4. Линии уровня функции IV: 1 – 0.005, 2 – 0.007, 3 – 0.01, 4 – 0.014, 5 – 0.021, 6 – 0.028, 7 – 0.045, 8 – 0.06, 9 – 0.075, 10 – 0.09, 11 – 0.105, 12 – 0.12, 13 – 0.135, 14 – 0.141

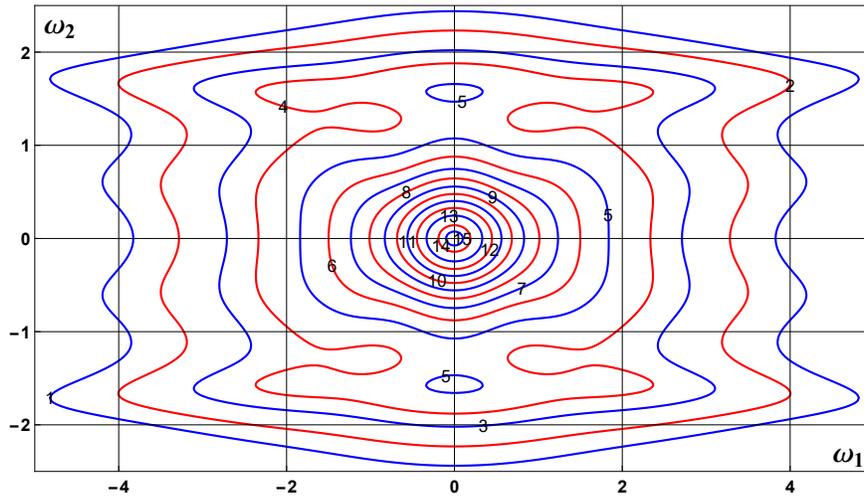


Рис. 5. Линии уровня функции I: 1 – 0.007, 2 – 0.01, 3 – 0.015, 4 – 0.02, 5 – 0.03, 6 – 0.04, 7 – 0.05, 8 – 0.06, 9 – 0.07, 10 – 0.08, 11 – 0.09, 12 – 0.10, 13 – 0.11, 14 – 0.12, 15 – 0.124

Приложение

Соотношения для h_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$h_{11} = \alpha_{11} + \alpha_{12} \cos(\tau_1 \omega_2) + \beta_{11} \omega_1^2 + \beta_{12} \omega_1^2 \cos(\tau_3 \omega_2),$$

$$h_{12} = \alpha_{12} \sin(\tau_1 \omega_2) + \beta_{12} \omega_1^2 \sin(\tau_3 \omega_2) - \omega_2,$$

$$h_{21} = \alpha_{21} + \alpha_{22} \cos(\tau_1 \omega_2) + \beta_{21} \omega_1^2 + \beta_{22} \omega_1^2 \cos(\tau_3 \omega_2),$$

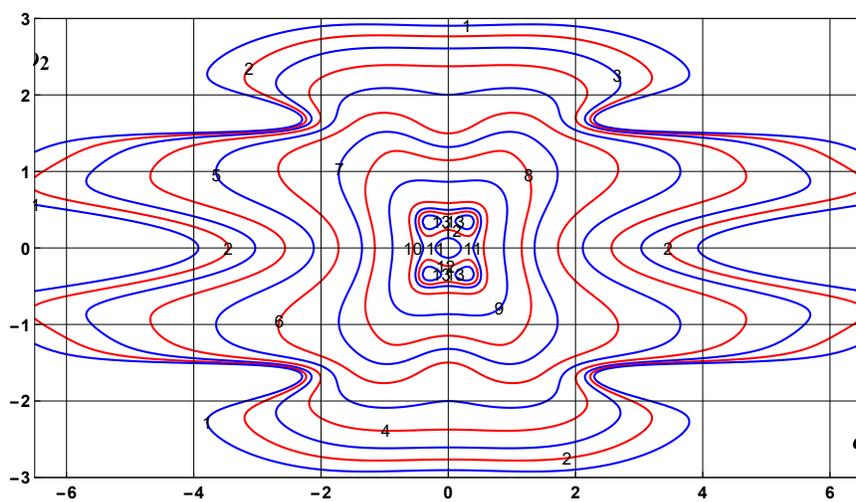


Рис. 6. Линии уровня функции II: 1 – 0.0004, 2 – 0.0006, 3 – 0.0009, 4 – 0.0015, 5 – 0.0027, 6 – 0.005, 7 – 0.01, 8 – 0.015, 9 – 0.025, 10 – 0.035, 11 – 0.0375, 12 – 0.0380

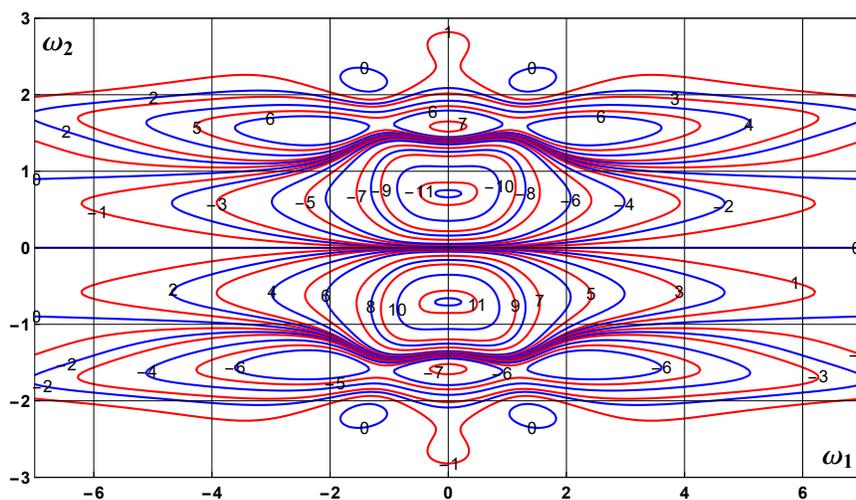


Рис. 7. Линии уровня функции III: 0 – 0.0, 1 – 0.0004, 2 – 0.0008, 3 – 0.0012, 4 – 0.0022, 5 – 0.0035, 6 – 0.005, 7 – 0.01, 8 – 0.015, 9 – 0.020, 10 – 0.030, 11 – 0.040, 12 – 0.042

$$h_{22} = \alpha_{22} \sin(\tau_1 \omega_2) + \beta_{22} \omega_1^2 \sin(\tau_3 \omega_2) - \omega_2,$$

$$h_{31} = \alpha_{13} + \alpha_{14} \cos(\tau_2 \omega_2),$$

$$h_{32} = \alpha_{14} \sin(\tau_2 \omega_2),$$

$$h_{41} = \alpha_{23} + \alpha_{24} \cos(\tau_2 \omega_2),$$

$$h_{42} = \alpha_{24} \sin(\tau_2 \omega_2).$$

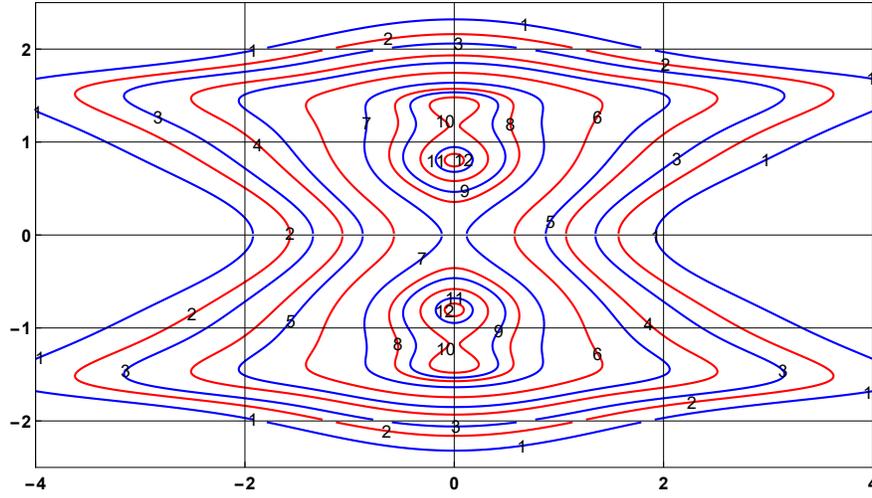


Рис. 8. Линии уровня функции IV: 1 – 0.005, 2 – 0.0075, 3 – 0.010, 4 – 0.015, 5 – 0.020, 6 – 0.030, 7 – 0.045, 8 – 0.055, 9 – 0.060, 10 – 0.065, 11 – 0.068, 12 – 0.069

Форма функций H_{01} и H_{02} как квадратных квазиполиномов ω_1^2 и ω_2 :

$$\begin{aligned}
 H_{01} = & \left[\left[\alpha_{11} \alpha_{21} - \alpha_{13} \alpha_{23} + (\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21}) \cos(\tau_1 \omega_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \alpha_{12} \alpha_{22} \cos(2 \tau_1 \omega_2) - \alpha_{14} \alpha_{24} \cos(2 \tau_2 \omega_2) - (\alpha_{13} \alpha_{24} + \alpha_{14} \alpha_{23}) \cos(\tau_2 \omega_2) \right] + \right. \\
 & \left. + (\alpha_{12} + \alpha_{22}) \sin(\tau_1 \omega_2) \omega_2 - \omega_2^2 \right] + \\
 & \left[\left[\alpha_{11} \beta_{21} + \alpha_{21} \beta_{11} + (\alpha_{12} \beta_{22} + \alpha_{22} \beta_{12}) \cos(\tau_1 \omega_2 + \tau_3 \omega_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\alpha_{11} \beta_{22} + \alpha_{21} \beta_{12}) \cos(\tau_3 \omega_2) + (\alpha_{12} \beta_{21} + \alpha_{22} \beta_{11}) \cos(\tau_1 \omega_2) \right] + \right. \\
 & \left. + (\beta_{12} + \beta_{22}) \sin(\tau_3 \omega_2) \omega_2 \right] \omega_1^2 + \\
 & \left[\left[\beta_{11} \beta_{21} + (\beta_{11} \beta_{22} + \beta_{12} \beta_{21}) \cos(\tau_3 \omega_2) + \beta_{12} \beta_{22} \cos(2 \tau_3 \omega_2) \right] \right] \omega_1^4; \\
 H_{02} = & \left[\left[(\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21}) \sin(\tau_1 \omega_2) + \alpha_{12} \alpha_{22} \sin(2 \tau_1 \omega_2) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (\alpha_{13} \alpha_{24} + \alpha_{14} \alpha_{23}) \sin(\tau_2 \omega_2) - \alpha_{14} \alpha_{24} \sin(2 \tau_2 \omega_2) \right] - \right. \\
 & \left. - [\alpha_{11} + \alpha_{21} + (\alpha_{12} + \alpha_{22}) \cos(\tau_1 \omega_2)] \omega_2 \right] + \\
 & \left[\left[(\alpha_{12} \beta_{21} + \alpha_{22} \beta_{11}) \sin(\tau_1 \omega_2) + (\alpha_{11} \beta_{22} + \alpha_{21} \beta_{12}) \sin(\tau_3 \omega_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\alpha_{12} \beta_{22} + \alpha_{22} \beta_{12}) \sin(\tau_1 \omega_2 + \tau_3 \omega_2) \right] - \right. \\
 & \left. - [\beta_{11} + \beta_{21} + (\beta_{12} + \beta_{22}) \cos(\tau_3 \omega_2)] \omega_2 \right] \omega_1^2 + \\
 & \left[\left[(\beta_{11} \beta_{22} + \beta_{12} \beta_{21}) \sin(\tau_3 \omega_2) + \beta_{12} \beta_{22} \sin(2 \tau_3 \omega_2) \right] \right] \omega_1^4.
 \end{aligned}$$

References

- [1] D. Henderson, P. Plaschko, *Stochastic Differential Equations in Science and Engineering*, World Scientific, Singapore, 2006.

- [2] X. Mao, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Horwood Publishing, Chichester (UK), 2007.
- [3] P.-L. Chow, *Stochastic Partial Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (FL), 2015.
- [4] T.E. Govindan, *Yosida Approximations of Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions and Applications*, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2016.
- [5] A.N. Borodin, *Stochastic Processes*, Springer, Cham (Switzerland), 2017.
- [6] E. VanMarcke, *Random Fields: Analysis and Synthesis*, MIT Press, Cambridge, 1983.
- [7] V.S. Mandrekar, L. Gawarecki, *Stochastic Analysis for Gaussian Random Processes and Fields: With Applications*, Taylor & Francis Group, Boca Raton (FL), 2016.
- [8] A.B. Shmelev, *Fundamentals of the Markov Theory of Nonlinear Processing of Random Fields*, MIPT Publishing House, Moscow, 1998.
- [9] H. Haken, *Synergetics: Introduction and Advanced Topics*, Springer, Berlin, 2004.
- [10] U. Küchler, B. Mensch, *Langevin's stochastic differential equation extended by a time-delayed term*, *Stoch. and Stoch. Rep.*, **40**:1–2 (1992), 23–42.
- [11] S. Guillouzie, I. L'Heureux, A. Longtin, *Small delay approximation of stochastic differential delay equations*, *Phys. Rev. E*, **E59**:4 (1999), 3970–3982.
- [12] S. Guillouzie, I. L'Heureux, A. Longtin, *Rate processes in a stochastically driven delayed overdamped*, *Phys. Rev. E*, **E61**:5 (2000), 4906–4914.
- [13] T.D. Frank, P.J. Beek, *Stationary solutions of linear stochastic delay differential equations: Applications to biological systems*, *Phys. Rev. E*, **64**:2-021917 (2001), 1–12.
- [14] T.D. Frank, *Stationary distributions of stochastic processes described by a linear neutral delay differential equation*, *J. of Physics A: Math. Gen.*, **38**:28 (2005), L485–L490.
- [15] M.S. Kinnally, *Stationary Distributions for Stochastic Delay Differential Equations with Non-Negativity Constraints*, Dissertation for the PhD degree, Univ. of Calif., San Diego, 2009.
- [16] O. Butkovsky, M. Scheutzow *Invariant measures for stochastic functional differential equations*, *Electron. J. Probab.*, **22**:98 (2017), 1–23.
- [17] S. Guillouzie, *Fokker–Planck approach to stochastic delay differential equations*, Thesis for the degree of PhD, University of Ottawa, Ottawa, 2000.
- [18] I.E. Poloskov, *On the extension of the scope for Guillouzie's scheme of derivation for stationary distributions for linear stochastic systems with delay*, *Problems of the Mech. of Contr. motion: Nonlin. Dyn. Syst.*, *Interuniv. Coll. of Scient. Papers*, Perm, **45** (2013), 92–102.
- [19] I.E. Poloskov, *On the application of Guillouzie's scheme for calculating the matrix of spectral densities of the state vector for a linear stochastic system with many delays*, *Bull. of the Perm Univ. Math. Comp. science. Mech.*, **1** (28) (2015), 39–44.
- [20] I.E. Poloskov, *Stationary characteristics of solutions for Systems of linear differential equations of neutral type with multiple delays and random perturbations*, *Stat. Methods for Estim. and Testing Hypotheses*, *Interuniv. Coll. of Scient. Papers*, Perm, **29** (2019), 84–102.
- [21] C.V. Pao, *Stability and attractivity of periodic solutions of parabolic systems with time delays*, *J. Math. Anal. and Appl.*, **304**:2 (2005), 423–450.
- [22] Sv.V. Gurevich, *Dynamics of localized structures in reaction-diffusion systems induced by delayed feedback*, *Phys. Rev. E*, **87**:5-052922 (2013), 1–9.
- [23] H. Chen, *Integral inequality and exponential stability for neutral stochastic partial differential equations with delays*, *J. of Inequal. and Appl. (Hindawi)*, **2009**:297478 (2009), 1–15.
- [24] T. Caraballo, L. Shaikhet *Stability of delay evolution equations with stochastic perturbations*, *Comm. on Pure & Appl. Anal.*, **13**:5 (2014), 2095–2113.

- [25] K. Liu, *Stationary solutions of neutral stochastic partial differential equations with delays in the highest-order derivatives*, Discr. and Cont. Dyn. Syst. – B, **23**:9 (2018), 3915–3934.
- [26] I.E. Poloskov, *Spectral density of a stationary random field as a solution of a stochastic partial differential equation with constant delay*, Stat. Methods for Estim. and Testing Hypotheses, Interuniv. Coll. of Scient. Papers, Perm, 27 (2016), 90–100.
- [27] I.E. Poloskov, *Derivation of the spectral density for the solution of a linear stochastic partial differential equation with constant delays*, Bull. of the Perm Univ. Math. Comp. Science. Mech., 1 (40) (2018), 36–45.
- [28] I.E. Poloskov, *Spectral characteristics of a system of two linear stochastic differential equations of hyperbolic type*, Problems of the Mech. of Contr. motion: Nonlin. Dyn. Syst., Interuniv. Coll. of Scient. Papers, Perm, 52 (2020), 69–86.
- [29] St. Wolfram, *An Elementary Introduction to the Wolfram Language*, Wolfram Media, Champaign (IL), 2017.
- [30] S. Panchev, *Random Functions and Turbulence*, Pergamon Press, Oxford, 1971.
- [31] S. Primak, V. Kontorovich, V. Lyandres, *Stochastic Methods and Their Applications to Communications: Stochastic Differential Equations Approach*, John Wiley & Sons, Chichester, 2004.
- [32] L.D. Kudryavtsev, *Mathematical analysis*, Volume 2, Dropha, Moscow, 2003.
- [33] O.A. Kastritsa, S.A. Mazanik, A.F. Naumovich, N.F. Naumovich, *Mathematical analysis. Series and improper integrals*, Higher School, Minsk, 2015.

IGOR EGOROVICH POLOSKOV
PERM STATE UNIVERSITY,
BUKIREV ST., 15,
614900, PERM, RUSSIA
Email address: polosk@psu.ru