S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 1361–1373 (2023) УДК 510.64
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.082 MSC 03B44, 03B42, 03A05, 03B45, 03B70

ЛИНЕЙНАЯ СТУПЕНЧАТАЯ ЛОГИКА ЗНАНИЯ $\mathcal{LTK}.sl$

С.И. Башмаков, Т.Ю. Зверева

Представлено С.В. Судоплатовым

Abstract: This paper proposes a description of linear multi-agent logic of knowledge $\mathcal{LTK}.sl$ that models a linear non-reflexive non-transitive (step-like) temporal process of transition between information clusters — time points.

Using modified techniques, we proved the finite approximability of logic. We proposed an approach for solving the main unification problem in logics of a step-like temporal relation. The projectivity and, as a consequence, unitary type of unification in logic are proved.

Keywords: modal logics, temporal logics, finite model property, linear time, Kripke relational semantics, multi-agent logic, unification.

1 Введение

Модальные и временные логики с середины прошлого века держат планку интенсивно развивающейся области знания, что обусловлено их

Bashmakov, S.I., Zvereva T.Yu., Linear Step-like Logic of Knowledge $\mathcal{LTK}.sl$.

Первый автор поддержан Российским научным фондом, Правительством Красноярского края и Красноярским краевым фондом науки (грант 22-21-20028).

Поступила 17 августа 2023 г., опубликована 30 ноября 2023 г.

фундаментальным значением и широкой применимостью в информационных системах [13, 4, 17]. Наиболее ярким примером, пожалуй, являются линейная временная логика $\mathcal{LTL}$ и логика деревьев вычислений (ветвящегося времени) $\mathcal{CTL}$, используемые в теории верификации программ и, фактически, составляющие её фундамент, [1].

В последние годы возрастает необходимость поиска эффективных инструментов для реализации новых запросов к моделированию процесса передачи информации — в частности, обусловленных «плохими» условиями реализации информационного процесса, невыразимыми стандартными операторами. Одним из актуальных направлений в этой области является рассмотрение отношений и систем с операторами, нарушающими по своей природе принципы транзитивности временного (модального [2]) процесса: в ограниченных диапазонах достижимости или всюду в процессе рассуждений, [16, 3].

С точки зрения инструментария модальных и временных логик, актуально воспринимать временной процесс как вычислительную процедуру, позволяющую оперировать понятием знания в условиях дискретно изменяющегося направленного времени. Здесь введение условия на нетранзитивность приводит к необходимости поиска, зачастую, принципиально новых подходов к анализу свойств логики в сравнении с транзитивными вариантами, поскольку стандартные понятия и техники разрабатывались и применялись, в основном, для логических систем «хороших» характеристик.

В качестве такой системы ранее нами была предложена линейная временная логика знания с «универсальной модальностью» $\mathcal{LTK}.sl_U$ [7]. Для обозначения временного процесса, обладающего свойством достижимости только следующего момента времени, был введён термин «ступенчатого» перехода временных состояний (с англ. *step-like*), а универсальная модальность позволила определить всеобщую достижимость на моделях логики, избегая проблем конечной модальной достижимости каждой формулы, [12]. Задачей данной работы стало исследование версии логики $\mathcal{LTK}.sl_U$, сохраняющей ступенчатую природу временного процесса, но лишённой оператора универсальной модальности, доказательство финитной аппроксимируемости, а также унитарности унификации, используя нестандартный взгляд на понятие проективной формулы в условиях нетранзитивного характера единственного отношения достижимости.

Для задач семантической характеризации неклассических логик широко применяется развитая *реляционная семантика Крипке* — подход, основанный на структурно-графической интерпретации логических систем при помощи модельного представления. Логику $\mathcal{LTK}.sl_U$ определяли и исследовали именно на языке реляционной семантики, [7], логику обеднённого языка $\mathcal{LTK}.sl$ мы рассматриваем используя тот же подход, для удобства обобщая базовую технику сразу на мультимодальный случай.

2 Семантика логики $\mathcal{LTK}.sl$

Алфавит языка $L^{\mathcal{LTK}.sl}$ включает счётное множество пропозициональных переменных $Prop = \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$, константы $\top, \bot$ скобки $(,)$, стандартные булевы операции и набор унарных модальных операторов $\{N, \Box_1, \dots, \Box_n, \Box_e\}$.

(Многомодальным) $\mathcal{LTK}.sl$-фреймом назовём упорядоченный набор $F := \langle W_{\mathbb{N}}, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n \rangle$, где

- $W_{\mathbb{N}} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} C_t$ – совокупность сгустков C_t, пронумерованных натуральными числами: $C_{t_1} \cap C_{t_2} = \emptyset$, если $t_1 \neq t_2$;
- **Next** – отношение «следующее натуральное число»:

$$\forall a, b \in W : a\mathbf{Next}b \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}(a \in C_t \,\&\, b \in C_{t+1});$$

- R_e – отношение эквивалентности на каждом сгустке:

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall a, b \in C_t : aR_eb;$$

- $R_1, \dots, R_n$ – отношения знаний агентов, каждое из которых задаёт некоторое подмножество элементов каждого момента времени (сгустка):

$$\forall i \in [1, n]\, R_i \subseteq R_e.$$

Моделью на $\mathcal{LTK}.sl$-фрейме F назовём пару $M := \langle F, V \rangle$, где F – $\mathcal{LTK}.sl$-фрейм, V – означивание: $Prop \mapsto 2^{W_{\mathbb{N}}}$. Тогда выводимость формул, содержащих модальные операторы, задаётся следующим образом: $\forall a \in C_t \subseteq W_{\mathbb{N}}, \forall t \in \mathbb{N}$:

a. $\langle F, a \rangle \models_V \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \langle F, a \rangle \models_V \varphi$ и $\langle F, a \rangle \models_V \psi$;
b. $\langle F, a \rangle \models_V \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \langle F, a \rangle \models_V \varphi$ или $\langle F, a \rangle \models_V \psi$;
c. $\langle F, a \rangle \models_V \bar{\varphi} \Leftrightarrow \langle F, a \rangle \not\models_V \varphi$;
d. $\langle F, a \rangle \models_V N\varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_{t+1} : \langle F, b \rangle \models_V \varphi$;
e. $\langle F, a \rangle \models_V \Box_e\varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_t : \langle F, b \rangle \models_V \varphi$;
f. $\langle F, a \rangle \models_V \Box_i\varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_t : a\, R_i\, b \Rightarrow \langle F, b \rangle \models_V \varphi$.

Определяемая как множество формул истинных на всех таких моделях, логика $\mathcal{LTK}.sl$ моделирует линейный направленный временной процесс, в котором из текущего временного состояния (сгустка t) достижим только следующий момент времени — тем самым, временной процесс представляет собой направленный в будущее луч, разделённый на дискретные такты вычислений или рассуждений.

Отношение всеобщей достижимости внутри каждого сгустка $R_e \subseteq \bigcup_{t \in \mathbb{N}} (C_t)^2$ задаёт саму совокупность непересекающихся сгустков, а линейную связь между ними — временное отношение **Next**. Внутри временного процесса определено действие агентов, каждому из которых в каждый момент времени доступна определённая часть информации (*знаний* агентов) — распределение этих частей задано агентными отношениями $R_1, \dots, R_n$, представляющими собой подмножества отношения R_e. Агенты могут интерпретироваться и как субъекты социального взаимодействия, и как элементы систем администрирования, обладающие собственной совокупностью доступной информации или прав в каждый момент времени. *Общее знание* (англ. *Common Knowledge*) определяется отношением R_e.

Стоит отметить, что ограничения, накладываемые на доступные некоторому агенту знания могут задаваться как отдельным отношением R_i, так и некоторым их объединением. Однако, концептуально важна возможность недостижимости некоторой части информации ни одному агенту, а значит объединение всех n заданных на $\mathcal{LTK}.sl$-фрейме отношений не обязательно всюду совпадает с отношением Общего знания.

3 Финитная аппроксимируемость в $\mathcal{LTK}.sl$

Финитная аппроксимируемость является важным свойством логических систем, поскольку позволяет нам оперировать в описании логики конечными моделями, а не их бесконечными вариантами. Логика $\mathcal{L}$ *финитно аппроксимируема* (обладает *свойством конечной модели*), если она полна относительно класса конечных фреймов, [8].

Отметим, что нерефлексивный нетранзитивный характер временного отношения, в совокупности с необходимостью сохранить эффективную модель реализации временного процесса, не позволяют нам в явном виде ограничиться эффективными техниками р-морфизма или фильтрации — в обоих случаях классическое применение методов привело бы к смещению последовательности моментов времени: их отождествлению или возникновению временных коллизий. Для сохранения временной достижимости сгустков и связи агентов внутри них, нами предложен комбинированный метод доказательства финитной аппроксимируемости рассматриваемой логики $\mathcal{LTK}.sl$.

Переопределим в языке $\mathcal{LTK}.sl$ необходимые теоретико-модельные понятия и методы.

Под *модальной степенью* $d(\alpha)$ формулы α в логике $\mathcal{LTK}.sl$ будем понимать число вложенных в α нетранзитивных нерефлексивных операторов N: $d(p) = d(\circ p) = 0$, где $\circ \in \{\neg, \Box_e, \Box_i\}$; $\forall p \in Prop$ $d(\alpha \odot \beta) = max(d(\alpha); d(\beta))$, где $\odot \in \{\vee, \wedge\}$; $d(N\alpha) = d(\alpha) + 1$. Иначе говоря, ни один из модальных операторов логики, кроме N, не увеличивает модальную степень, так как не требует рассмотрения иных, кроме текущего, временных состояний.

Длину $l(\alpha)$ формулы α логики $\mathcal{LTK}.sl$ определим по числу операторов формулы следующим образом: $l(p) = 0$; $l(\alpha \circ \beta\alpha) = l(\alpha) + l(\beta) + 1$, где $\circ \in \{\wedge, \vee\}$; $l(\bullet\alpha) = l(\alpha) + 1$, где $\bullet \in \{N, \neg, \Box_e, \Box_i\}$.

3.1. р-морфизм в $\mathcal{LTK}.sl$. Отображение f многомодального фрейма $F := \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \ldots, R_n\rangle$ на фрейм $F' := \langle W', \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \ldots, R'_n\rangle$ называется *р-морфизмом*, если $\forall a, b \in W\ \forall R \in \{\mathbf{Next}, R_e, R_1, \ldots, R_n\}$:

(1) $a\,R\,b \Rightarrow f(a)R'f(b)$;
(2) $f(a)R'f(b) \Rightarrow \exists c \in W[a\,R\,c \wedge f(c) = f(b)]$.

Для произвольной $\mathcal{LTK}.sl$-модели $M = \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \ldots, R_n, V\rangle$ определим конечную по числу временных сгустков модель N следующим образом:

$$N := \left\langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \ldots, R'_n, V' \right\rangle,$$

где:

- $\bigcup_{j\in[1,k]} C_j \subset W$ – конечное число сгустков, сгусток C_{k+1} состоит из одного вырожденного элемента;
- $R'_e, R'_1, \ldots, R'_n$ задаются как ограничения соответствующих отношений $R_e, R_1, \ldots, R_n$ на сгустки $\bigcup_{j\in[1,k]} C_j$, дополненные следующими условиями: $\forall R \in \{R_e, R_1, \ldots, R_n\}$

  $\forall a, b \in W \setminus \{C_1, \ldots, C_k\}$ если aRb, то $a = b \in C_{k+1} \,\&\, a\, R'\, b$;
- $\mathbf{Next}'$ определяется следующим образом:
  $\forall a \in \{C_1, \ldots, C_k\}$ если $a\,\mathbf{Next}\,b$, тогда $b \in \{C_2, \ldots, C_{k+1}\}$;
  $\forall a \in W \setminus \{C_1, \ldots, C_k\}$, $\forall b \in W$ если $a\,\mathbf{Next}\,b$, тогда $a, b \in C_{k+1}$ $\&\, a\,\mathbf{Next}'\,b$;
- $V'(p) = V(p) \cap \bigcup_{j\in[1,k]} C_j$ для $p \in Prop$.

В целях согласования обозначений, будем далее называть определённый ранее бесконечный $\mathcal{LTK}.sl$-фрейм, как F_{inf}, а ограниченный по времени — $F_{fin} := \left\langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \ldots, R'_n \right\rangle$.

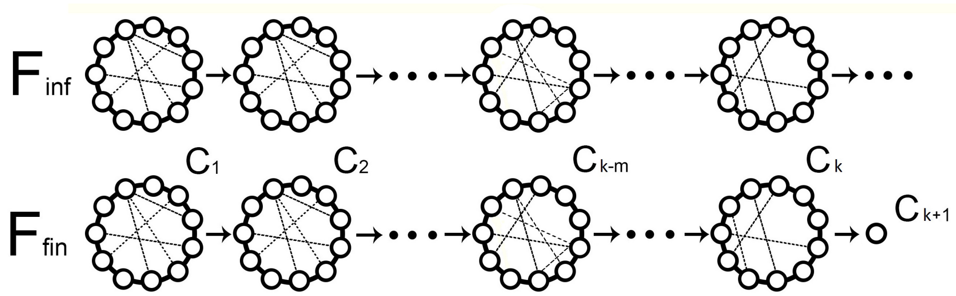

Рис. 1. Бесконечный фрейм F_{inf} и конечный фрейм F_{fin}

Теорема 1. *Любой F_{fin} является p-морфным образом F_{inf}.*

Доказательство. Зададим отображение f фрейма

$$F_{inf} = \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \ldots, R_n\rangle$$

на конечный по времени фрейм $F_{fin} = \left\langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \ldots, R'_n \right\rangle$ следующим образом:

(1) $\forall x \in \bigcup_{j\in[1,k]} C_j\; f(x) = x$;

(2) $\forall x \in W \setminus \bigcup_{j\in[1,k]} C_j \; f(x) = y$, где $y \in C_{k+1}$.

Докажем, что для f сохраняются условия (1.) и (2.) определения p-морфизма: $\forall a, b \in W$

(1.) Если $a\,\mathbf{Next}\,b$, то, по определению $\mathbf{Next}$, $a \in C_i$ и $b \in C_{i+1}$. Если $b \in \{C_2, \dots, C_k\}$, тогда $f(a) = a$, $f(b) = b$ и $f(a)\,\mathbf{Next}'\,f(b)$. Если $b \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$, тогда $f(a) \in C_k \cup C_{k+1}$, а $f(b) \in C_{k+1}$ и $f(a)\,\mathbf{Next}'\,f(b)$. Если $a\,R_e\,b$ и $a, b \in C_i \in \{C_1, \dots, C_k\}$ тогда $f(a)\,R'_e\,f(b)$. Если $C_i \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$, тогда $f(a) = f(b) = y \in C_{k+1}$.

В силу $R_i \subseteq R_e$, $\forall i \in [1, \dots, n]$, для отношений $R'_1, \dots, R'_n$ доказательство аналогично R_e.

(2.) Если $f(a)\mathbf{Next}'f(b)$, то возможны следующие случаи:

- В случае если $f(a)\mathbf{Next}'f(b)$, по определению отношения $\mathbf{Next}'$, $f(a) \in C_i, f(b) \in C_{i+1}$, где $i+1 \in [2, \dots, k]$. В этом случае $f(a) = a$, а для $f(b)$ возможны 2 варианта:
  - когда $f(b) \in \{C_2, \dots, C_k\}$, $b = c$ и $a\,\mathbf{Next}\,c$;
  - когда $f(b) \in C_{k+1} \& f(a) \in C_k$, в качестве c можно рассмотреть $\forall c \in C_{k+1}$, и тогда $a\,\mathbf{Next}\,c$.
- В случае если $f(a), f(b) \in C_{k+1}$, имеем $a \in C_j, b \in C_{j+1}$ где $\{C_j, C_{j+1}\} \subset W \setminus \{C_1, \dots, C_k\})$ и тогда в качестве c мы возьмём $\forall x \in C_{j+1}$. В этом случае $f(c) = f(b) \in C_{k+1} \subset F_{fin}$.

  $\forall a, b \in W$ если $f(a)R'_ef(b)$, то возможны 2 варианта:
  - если $f(a), f(b) \in C_i$, где $i \in \{1, \dots, k\}$, тогда $a\,R_e\,b$, где $a, b \in C_i$, $i \in [1, \dots, k]$. В этом случае $c \in C_i$;
  - если $f(a), f(b) \in C_{k+1}$, тогда $a\,R_e\,b$ и $a, b \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$.

  Доказательство для случая отношений R_i полностью повторяет рассуждения приведённые выше, в силу определения отношений R_i как подмножеств R_e.

$\square$

Теорема 2. *Пусть $M = \langle F_{inf}, V\rangle$ – неограниченная по времени $\mathcal{LTK}.sl$-модель, α — произвольная формула модальной степени m, $m \in \omega$. Тогда $\forall x \in \bigcup_{j\in[1,k-m]} C_j \subset F_{inf}$ $(m < k)$ справедливо:*

$$\langle M, x\rangle \not\models \alpha \Leftrightarrow \langle N, x\rangle \not\models \alpha,$$

где $N = \langle F_{fin}, V'\rangle = \langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n, V'\rangle$.

Доказательство. Докажем, что утверждение справедливо для всех формул логики $\mathcal{LTK}.sl$. Доказательство будем вести индукцией по длине формулы α. При $l(\alpha) = 0$ имеем $\alpha = p$. По определению, модальная степень формулы в этом случае также равна 0 и утверждение верно $\forall x \in \bigcup_{j\in[1,k]} C_j$.

Предположим, что утверждение теоремы верно $\forall \beta$: $l(\beta) < t$, т.е.

$$\langle M, x\rangle \not\models \beta \Leftrightarrow \langle N, x\rangle \not\models \beta.$$

Докажем для $l(\alpha) = t$. Случаи $\alpha \in \{\neg\varphi, \Box_e\varphi, \Box_i\varphi, \varphi\vee\psi, \varphi\wedge\psi\}$ удовлетворяют индуктивной гипотезе, поскольку модальная степень формулы α

не увеличивается путём добавления операторов $\{\neg, \Box_e, \Box_i\}$ к подформуле φ меньшей длины и потенциально увеличивается добавлением $\{\vee, \wedge\}$ только до значения $max(d(\varphi), d(\psi))$, где φ и ψ также короче по длине (по определению истинности таких формул на моделях логики).

Пусть $\alpha = N\varphi$, $l(\varphi) = l(\alpha) - 1$ и $d(\alpha) = d(\varphi) + 1$. По индуктивной гипотезе $\langle M, x\rangle \not\models \varphi \Leftrightarrow \langle N, x\rangle \not\models \varphi$, где $x \in \bigcup_{j\in[2,k-(m-1)]} C_j$. По определению N верно, что $\forall x \in C_i \langle M, x\rangle \models N\varphi \Leftrightarrow \forall y \in C_{i+1}$ (т.е. $x\,\mathbf{Next}\,y$) $\langle M, y\rangle \models \varphi$, следовательно, $\exists x \in C_i \langle M, x\rangle \not\models N\varphi \Leftrightarrow \exists y \in C_{i+1}\ \langle M, y\rangle \not\models \varphi$.

Тогда $\forall \hat{x} \in \bigcup_{j\in[1,k-m]} C_j\ \langle M, \hat{x}\rangle \not\models N\varphi \Leftrightarrow \langle N, \hat{x}\rangle \not\models N\varphi$. $\Box$

Отметим, что полученная таким образом модель конечна по времени, но имеет неограниченную (а значит потенциально счётную) мощность сгустков. Чтобы получить конечную модель, применим модифицированный метод фильтрации — ограниченной на сгустки.

3.2. Ограниченная фильтрация для $\mathcal{LTK}.sl$. Завершая построение конечной модели, адекватной нашей логике, применим технику фильтрации к полученному в предыдущем разделе конечному по времени фрейму F_{fin}.

Пусть $M = \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \ldots, R_n V\rangle$ — модель, построенная на бесконечном $LTK.sl$-фрейме, определённая ранее, $\Phi \subseteq For(L^{\mathcal{LTK}.sl})$ — набор формул, замкнутых относительно подформул. Определим отношение эквивалентности $\equiv_\Phi$ на сгустках из W следующим образом: $\forall t \in \mathbb{N}, \forall x, y \in C_t$

$$x \equiv_\Phi y \Longleftrightarrow [\forall \alpha \in \Phi(\langle M, x\rangle \models \alpha \Leftrightarrow \langle M, y\rangle \models \alpha)].$$

Далее будем используем следующие обозначения:

- $Var(\Phi)$ для набора всех переменных формул из Φ;
- $[x]_{\equiv_\Phi} := \{y \in W | x \equiv_\Phi y\}$ для классов эквивалентности;
- $W_\Phi := \{[x]_{\equiv_\Phi} | \forall x \in W\}$ для множества всех таких классов;
- $C_{j_\Phi} := \{[x]_{\equiv_\Phi} | \forall x \in C_j \subset F_{fin}\}$, $j \in [1, k+1]$, для каждого сгустка таких классов, полученных из сгустков F_{fin}.

Чтобы ограничить конечным числом все мощности сгустков элементов модели и, тем самым, получить конечную модель, определим фильтрацию множества $\Phi \subseteq For(L^{\mathcal{LTK}.sl})$ моделью

$$N_\Phi = \left\langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_{j_\Phi}, \mathbf{Next}'_\Phi, R'_{e_\Phi}, R'_{1_\Phi}, \ldots, R'_{n_\Phi}, V'_\Phi \right\rangle$$

на основе модели N с p-морфным фреймом F_{fin} и дополнительной последующей фильтрацией сгустков:

(1) $\forall p \in Var(\Phi)\ [V'_\Phi(p) = \{[a]_{\equiv_\Phi} | \langle N, a\rangle \models p\}]$;

(2) $\forall a, b \in \{\bigcup_{j\in[1,k+1]} C_j\}$, $\forall R' \in [\mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \ldots, R'_n]$

$$(aR'b \Rightarrow [a]_{\equiv_\Phi} R'_\Phi [b]_{\equiv_\Phi});$$

(3) $\forall a, b \in \{\bigcup_{j\in[1,k+1]} C_{j_\Phi}\}$

(a) $\forall l \in \{e, 1, \ldots, n\}$ $([a]_{\equiv_\Phi} R'_{l_\Phi} [b]_{\equiv_\Phi} \Longrightarrow [\forall \Box_l \alpha \subseteq \Phi$

$$\langle N, a\rangle \models \Box_l \alpha \Rightarrow \langle N, b\rangle \models \alpha]);$$

(b) $[a]_{\equiv_\Phi} \mathbf{Next}'_\Phi [b]_{\equiv_\Phi} \Longrightarrow ([\forall N\alpha \subseteq \Phi$

$$\langle N, a\rangle \models N\alpha \Rightarrow \langle N, b\rangle \models \alpha]).$$

В нашем случае также применимы известные условия построения минимальной и максимальной фильтрации:

— **минимальная фильтрация**

$$N_\Phi^{min} = \left\langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_{j_\Phi}, \mathbf{Next}', R'^{min}_{e_\Phi}, R'^{min}_{1_\Phi}, \ldots, R'^{min}_{n_\Phi}, V'_\Phi \right\rangle,$$

где

- $\forall l \in \{e, 1, \ldots, n\}$ $R'^{min}_{l_\Phi} = \{([a]_{\equiv_\Phi}, [b]_{\equiv_\Phi}) | (a, b) \in R'_l\}$,

— **максимальная фильтрация**

$$N_\Phi^{max} = \left\langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_{j_\Phi}, \mathbf{Next}', R'^{max}_{e_\Phi}, R'^{max}_{1_\Phi}, \ldots, R'^{max}_{n_\Phi}, V'_\Phi \right\rangle,$$

где

- $\forall l \in \{e, 1, \ldots, n\} : [a]_{\equiv_\Phi} R'^{max}_{l_\Phi} [b]_{\equiv_\Phi} \Leftrightarrow [\forall \Box_l \alpha \subseteq \Phi(\langle N, a\rangle \models \Box_l \alpha \Rightarrow \langle N, b\rangle \models \alpha)]$.

Полученные в результате описанной процедуры сгустки всякий раз будут иметь конечную мощность, в силу выбора множества Φ, конечности числа отношений на фрейме и всех попарных вариантов их пересечений. По построению фильтрованной модели, верна следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть* $N = \langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \ldots, R'_n, V'\rangle$ *— ограниченная по времени p-морфная модель бесконечной* $\mathcal{LTK}.sl$*-модели* M, $\Phi \subseteq For(L^{\mathcal{LTK}.sl})$ *– замкнутое относительно подформул множество формул, модальная степень которых не превосходит* m $(m \in \omega, k > m)$,

$$N_\Phi = \left\langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_{j_\Phi}, \mathbf{Next}'_\Phi, R'_{e_\Phi}, R'_{1_\Phi}, \ldots, R'_{n_\Phi}, V'_\Phi \right\rangle$$

— фильтрованный вариант модели N *множеством* Φ.
Тогда $\forall x \in \bigcup_{j\in[1,k-m]} C_j$, $\forall \alpha \in \Phi$*:*

$$\langle N, x\rangle \not\models \alpha \Leftrightarrow \langle N_\Phi, x\rangle \not\models \alpha.$$

В силу Теоремы 2 и Леммы 1, заключаем финитную аппроксимируемость $\mathcal{LTK}.sl$. Таким образом, в качестве моделей логики могут рассматриваться не только бесконечные модели M, но и модели, построенные на конечных $\mathcal{LTK}.sl$-фреймах для каждой соответствующей формулы.

4 Унификация в $\mathcal{LTK}.sl$

4.1. Основные определения теории унификация. Базовая проблема унификации формулируется в виде вопроса о возможности трансформирования формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ логики $\mathcal{L}$ в теорему путем замены её переменных. Если ответ положителен, формула $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ называется *унифицируемой* в $\mathcal{L}$, а подстановка $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i, \forall p_i \in Var(\varphi)$ такая, что $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$, *унификатором* формулы. *Корневым* (англ. *ground*, сокр. *gu*) будем называть унификатор, представляющий собой подстановку набора констант вместо переменных формулы.

Начало исследования задачи унификации, положенное в 1960-е годы, [14], главным образом было связано с задачами, возникающими в области информационных наук: унификация рассматривалась как инструмент, позволяющий преобразовать целые блоки исполняемых процедур к виду универсальных макросов, что конечно, довольно далеко от сегодняшних задач, возникающих в области символической логики. Импульс же развитию теории унификации здесь в последние десятилетия можно смело связать с именем С. Гиларди, обнаружившим значимые связи теории с другими задачами, широкие перспективы дальнейших исследований и эффективный подход, основывающийся на понятии проективной формулы, [10].

Формула $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ называется *проективной* в логике $\mathcal{L}$, если существует унификатор τ формулы φ, такой, что $\Box\varphi \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{L}$ для всех $p_i \in Var(\varphi)$. Такой унификатор называется *проективным*.

Многие известные системы, обладающие «хорошими» характеристиками (рефлексивностью, транзитивностью, линейностью или их слабыми вариантами), изучены с точки зрения унификации: для них успешно определён (или опровергнут требуемый) тип унификации, найдены алгоритмы построения лучших унификаторов (или доказано их отсутствие), [9, 10, 11, 15, 6]. Исследования же других систем часто сопряжены с необходимостью модификации имеющихся или поиском новых методов и техник, [5, 7], что неизбежно ведёт к некоторому снижению активности исследований.

В частности, данное выше определение верно для произвольной логики, расширяющей модальную систему $\mathcal{S}4$, т.к. последняя позволяет оперировать с рефлексивным и транзитивным свойствами модального оператора $\Box$ в логике. Для определения проективной формулы в нашей логике, в отсутствие хотя бы выразимого оператора транзитивной достижимости, воспользуемся более универсальной записью определения: формулу $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ будем называть *проективной* в $\mathcal{L}$, если найдётся унификатор τ формулы φ такой, что $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} [p_i \equiv \tau(p_i)]$ для всех $p_i \in Var(\varphi)$. Нетрудно заметить, что данное определение несёт тот же смысл, что и данное выше. Как будет показано далее, этого переосмысления, в совокупности с предлагаемой конструкцией $\bigwedge\limits_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi$, где $N^0\Box_e\varphi = \Box_e\varphi$, в качестве в некотором роде замены транзитивного оператора, оказывается достаточно, чтобы определить проективный унификатор в логике.

Отметим ещё несколько важных для нас определений теории унификации. На множестве всех унификаторов формулы φ определено отношение предпорядка «более общий»: унификатор σ формулы $\varphi(p_1,\dots,p_s)$ называют *более общим*, чем σ_1 в логике $\mathcal{L}$ (и пишут $\sigma_1 \preceq \sigma$), если найдётся подстановка γ такая, что для всех переменных p_i формулы σ верно: $\sigma_1(p_i) \equiv_{\mathcal{L}} \gamma(\sigma(p_i))$.

Относительно данного предпорядка, унификатор σ будет называться *максимальным* для формулы $\varphi(p_1,\dots,p_s)$, если для любого другого унификатора σ^i либо $\sigma^i \preceq \sigma$, либо $(\sigma^i \npreceq \sigma)\&(\sigma \npreceq \sigma^i)$. Если σ — более общий, чем любой другой унификатор, он называется *наиболее общим* (или кратко *ноу*).

Понятие типа унификации также может быть дано, используя определённый выше предпорядок: логика имеет *нульарный* тип унификации, если, относительно $\preceq$, существуют бесконечные последовательности унификаторов. Если каждая такая последовательность заканчивается максимальным элементом, логика имеет по крайней мере *инфинитарный* тип. В случае если максимальных унификаторов конечное число — *финитарный*. Наконец, логика обладает наилучшим — *унитарным* — типом унификации, если для любой унифицируемой формулы в логике найдётся ноу.

4.2. Унитарная унификация в $\mathcal{LTK}.sl$. Пусть формула φ — формула модальной степени $d(\varphi) = m$, следовательно, φ содержит m вложимых операторов N. $k+1$ — число сгустков, определяемое глубиной p-морфной $\mathcal{LTK}.sl$-модели, $k > m$, следовательно, для проверки истинности формулы φ требуется $k-m$ шагов для любой стартовой точки из промежутка $\{1,\dots,k-m\}$.

Следуя Гиларди, [10], проективный унификатор определяет наиболее общий унификатор формулы, и, следовательно, в случае применимости ко множеству всех унифицируемых формул логики, устанавливает её унитарный тип.

Следующие два утверждение приводятся без доказательства, т.к. они полностью повторяют рассуждения из [7], опуская в процессе лишь случай универсальной модальности.

Лемма 2. *Для любого набора $c_1,\dots,c_r \in \{\top,\bot\}$ и любой формулы $\varphi(p_1,\dots,p_r)$ существует $c \in \{\top,\bot\}$, такая, что*

$$\forall x \in F, \langle F, x\rangle \models \varphi(c_1,\dots,c_r) \equiv c.$$

Теорема 3. *Если формула φ унифицируема в $\mathcal{LTK}.sl$, то φ имеет корневой унификатор gu.*

Следствием данных утверждений является возможность эффективного использования корневых унификаторов для доказательства унифицируемости формул в логике $\mathcal{LTK}.sl$ — всякий раз достаточно рассмотреть не более, чем 2^s различный подстановок, чтобы определить существование подходящей константной, являющейся унификатором.

Теорема 4. *Любая унифицируемая формула в $\mathcal{LTK}.sl$ проективна.*

Доказательство. Пусть $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ унифицируемая в $\mathcal{LTK}.sl$ формула. Тогда для любой переменной $p_i \in Var(\varphi)$ определим следующую подстановку $\sigma(p_i)$:

$$\sigma(p_i) := (\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i\Box_e\varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i\Box_e\varphi \wedge gu(p_i)),$$

где $gu(p_1), \ldots, gu(p_s)$ — корневой унификатор формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$, полученный по алгоритму из предыдущей теоремы.

Возьмём любую бесконечную модель $M := \langle F, V\rangle$ с произвольным означиванием V. Если σ — унификатор для φ, тогда $\sigma(\varphi) \in \mathcal{LTK}.sl$ и $\forall x \in F\ \langle M, x\rangle \models_V \sigma(\varphi)$. Докажем, что подстановка σ является унификатором для φ в логике $\mathcal{LTK}.sl$.

1. Если $\forall x \in \{C_1, \ldots, C_{k-m}\}\ \langle M, x\rangle \models_V \varphi$, то $\langle M, x\rangle \models_V \bigwedge\limits_{i=0}^{k-m} N^i\Box_e\varphi$ и, следовательно, второй дизъюнктивный член будет опровергнут на x. Если $\langle M, x\rangle \models_V p_i$, тогда $\langle M, x\rangle \models_V \bigwedge\limits_{i=0}^{k-m} N^i\Box_e\varphi \wedge p_i$, следовательно, $\langle M, x\rangle \models_V \sigma(p_i)$. Если $\langle M, x\rangle \models_V \neg p_i$, тогда $\langle M, x\rangle \not\models_V \bigwedge\limits_{i=0}^{k-m} N^i\Box_e\varphi \wedge p_i$ и следовательно $\langle M, x\rangle \models_V \neg\sigma(p_i)$. Как следствие, истинностное значение $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ на произвольном элементе x при означивании V совпадает с истинностью $\varphi(\sigma(p_1), \ldots, \sigma(p_s))$ на том же элементе при том же означивании V и, в этом случае, $\langle M, x\rangle \models_V \sigma(\varphi)$.

2. Если $\exists x \in \{C_1, \ldots, C_{k-m}\}\langle M, x\rangle \models_V \neg\varphi$, тогда $\langle M, x\rangle \not\models_V \bigwedge\limits_{i=0}^{k-m} N^i\,\Box_e\varphi$. В этом случае возможно выполнение второго дизъюнктивного члена, но первый при этом опровергается на x. Тогда истинностное значение для всех $\sigma(p_i)$ на x совпадает с $gu(p_i)$ (т.е. $\sigma(\varphi) \equiv gu(\varphi)$), и поскольку $\langle M, x\rangle \models_V gu(\varphi)$ (в силу выбора корневого унификатора, $gu(\varphi) \in \mathcal{LTK}.sl$), снова $\langle M, x\rangle \models_V \sigma(\varphi)$. Следовательно, $\sigma(\varphi) \in \mathcal{LTK}.sl$ для унифицируемой в $\mathcal{LTK}.sl$ формулы φ.

Докажем, что $\sigma(\varphi)$ — проективный унификатор. Если $\sigma(p_i)$ — проективный унификатор для φ, то $\forall p_i \in Var(\varphi)$ по определению, мы получим следующее:

$$\varphi \vdash_{\mathcal{LTK}.sl} p_i \leftrightarrow [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i\,\Box_e\varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i\,\Box_e\varphi \wedge gu(p_i))].$$

Предположим обратное: пусть σ не является проективным унификатором. В таком случае если $\vdash_{\mathcal{LTK}.sl} \varphi$, то

$$\varphi \nvdash_{\mathcal{LTK}.sl} p_i \leftrightarrow [(\bigwedge_{i=0}^{m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))]. \quad (1)$$

В этом случае

$$\varphi \nvdash_{\mathcal{LTK}.sl} p_i \rightarrow [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))], \quad (2)$$

или

$$\varphi \nvdash_{\mathcal{LTK}.sl} [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))] \rightarrow p_i. \quad (3)$$

Если (2), тогда $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK}.sl} p_i$, но в этом случае $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK}.sl} \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i$, благодаря $\vdash_{\mathcal{LTK}.sl} \varphi$ и $\vdash_{\mathcal{LTK}.sl} p_i$, и поэтому

$$\varphi \vdash_{\mathcal{LTK}.sl} p_i \rightarrow [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))].$$

Следовательно, выполнение (2) невозможно.

Если (3), то $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK}.sl} [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))]$, но это возможно только при $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK}.sl} p_i$, поскольку $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK}.sl} \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi$. Как следствие, в дизъюнкции $\sigma(p_i)$ может выполняться только первый член. Поэтому справедливо

$$\varphi \vdash_{\mathcal{LTK}.sl} [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))] \rightarrow p_i,$$

что противоречит (3). Следовательно, σ — проективный унификатор для φ в логике $\mathcal{LTK}.sl$, поэтому φ — проективная формула. $\Box$

References

[1] Yu.G. Karpov, *Model Checking. Verification of parallel and distributed software systems*, BHV-Peterburg, Saint Petersburg, 2010.

[2] A.V. Kudinov, I.B. Shapirovsky, *Partitioning Kripke frames of finite height*, Izv. Math., **81**:3 (2017), 592–617.

[3] V.V. Rybakov, *Nontransitive temporal multiagent logic, information and knowledge, deciding algorithms*, Sib. Math. J., **58**:5 (2017), 875–886. Zbl 1420.03060

[4] I.B. Shapirovsky, V.B. Shehtman, *Modern modal logic: between mathematics and computer science*, in Zaitsev, D.V. (eds), *Modern logic: foundations, subject and prospects of development*, ID Forum, Moscow, 2018, 265–305.

[5] S.I. Bashmakov, *Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **11**:1 (2018), 3–9. Zbl 7325382
[6] S.I. Bashmakov, *Unification in pretabular extensions of S4*, Log. Univers., **15**:3 (2021), 381–397. Zbl 1491.03014
[7] S.I. Bashmakov, T.Yu. Zvereva, , *Unification and finite model property for linear step-like temporal multi-agent logic with the universal modality*, Bulletin of the Section of Logic, **51**:3 (2022), 345—361.
[8] A. Chagrov, M. Zacharyaschev, *Modal logic*, Oxford University Press, Oxford, 1997. Zbl 0871.03007
[9] W. Dzik, P. Wojtylak, *Projective unification in modal logic*, Log. J. IGPL, **20**:1 (2012), 121–153. Zbl 1260.03041
[10] S. Ghilardi, , *Unification through projectivity*, J. Logic Comput., **7**:6 (1997), 733–752. Zbl 0894.08004
[11] S. Ghilardi, , *Unification in intuitionistic logic*, J. Symb. Log., **62**:2 (1999), 859–880. Zbl 0930.03009
[12] V. Goranko, S. Passy, *Using the universal modality: Gains and questions*, J. Log. Comput., **2**:1 (1992) 5–30. Zbl 0774.03003
[13] A. Prior, *Time and modality*, Oxford University Press, Oxford, 1957. Zbl 0079.00606
[14] J.A. Robinson, , *A machine-oriented logic based on the resolution principle*, J. Assoc. Comput. Mach., **12** (1965), 23–41. Zbl 0139.12303
[15] V.V. Rybakov, *Best unifiers in transitive modal logics*, Stud. Log., **99**:1-3 (2011), 321–336. Zbl 1247.03029
[16] V.V. Rybakov, *Non-transitive linear temporal logic and logical knowledge operations*, J. Log. Comput., **26**:3 (2016), 945–958. Zbl 1403.03028
[17] R. van der Meyden, Ks. Wong, , *Complete axiomatizations for reasoning about knowledge and branching time*, Stud. Log., **75**:1 (2003), 93–123. Zbl 1037.03010

Stepan Igorevich Bashmakov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
600041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: krauder@mail.ru

Tatyana Yurievna Zvereva
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
600041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: 3336259@gmail.com