

ЛИНЕЙНАЯ СТУПЕНЧАТАЯ ЛОГИКА ЗНАНИЯ

 $\mathcal{LTK.sl}$ С.И. БАШМАКОВ, Т.Ю. ЗВЕРЕВА  *Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

Abstract: This paper proposes a description of linear multi-agent logic of knowledge $\mathcal{LTK.sl}$ that models a linear non-reflexive non-transitive (step-like) temporal process of transition between information clusters — time points.

Using modified techniques, we proved the finite approximability of logic. We proposed an approach for solving the main unification problem in logics of a step-like temporal relation. The projectivity and, as a consequence, unitary type of unification in logic are proved.

Keywords: modal logics, temporal logics, finite model property, linear time, Kripke relational semantics, multi-agent logic, unification.

1 Введение

Модальные и временные логики с середины прошлого века держат планку интенсивно развивающейся области знания, что обусловлено их

BASHMAKOV, S.I., ZVEREVA T.YU., LINEAR STEP-LIKE LOGIC OF KNOWLEDGE $\mathcal{LTK.sl}$.

© 2023 БАШМАКОВ С.И..

Первый автор поддержан Российским научным фондом, Правительством Красноярского края и Красноярским краевым фондом науки (грант 22-21-20028).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

фундаментальным значением и широкой применимостью в информационных системах [13, 4, 17]. Наиболее ярким примером, пожалуй, являются линейная временная логика $\mathcal{LTL}$ и логика деревьев вычислений (ветвящегося времени) $\mathcal{CTL}$, используемые в теории верификации программ и, фактически, составляющие её фундамент, [1].

В последние годы возрастает необходимость поиска эффективных инструментов для реализации новых запросов к моделированию процесса передачи информации — в частности, обусловленных «плохими» условиями реализации информационного процесса, невыразимыми стандартными операторами. Одним из актуальных направлений в этой области является рассмотрение отношений и систем с операторами, нарушающими по своей природе принципы транзитивности временного (модального [2]) процесса: в ограниченных диапазонах достижимости или всюду в процессе рассуждений, [16, 3].

С точки зрения инструментария модальных и временных логик, актуально воспринимать временной процесс как вычислительную процедуру, позволяющую оперировать понятием знания в условиях дискретно изменяющегося направленного времени. Здесь введение условия на нетранзитивность приводит к необходимости поиска, зачастую, принципиально новых подходов к анализу свойств логики в сравнении с транзитивными вариантами, поскольку стандартные понятия и техники разрабатывались и применялись, в основном, для логических систем «хороших» характеристик.

В качестве такой системы ранее нами была предложена линейная временная логика знания с «универсальной модальностью» $\mathcal{LTK.sl}_U$ [7]. Для обозначения временного процесса, обладающего свойством достижимости только следующего момента времени, был введён термин «ступенчатого» перехода временных состояний (с англ. *step-like*), а универсальная модальность позволила определить всеобщую достижимость на моделях логики, избегая проблем конечной модальной достижимости каждой формулы, [12]. Задачей данной работы стало исследование версии логики $\mathcal{LTK.sl}_U$, сохраняющей ступенчатую природу временного процесса, но лишённой оператора универсальной модальности, доказательство финитной аппроксимируемости, а также унитарности унификации, используя нестандартный взгляд на понятие проективной формулы в условиях нетранзитивного характера единственного отношения достижимости.

Для задач семантической характеристики неклассических логик широко применяется развитая *реляционная семантика Крипке* — подход, основанный на структурно-графической интерпретации логических систем при помощи модельного представления. Логику $\mathcal{LTK.sl}_U$ определяли и исследовали именно на языке реляционной семантики, [7], логику обеднённого языка $\mathcal{LTK.sl}$ мы рассматриваем используя тот же подход, для удобства обобщая базовую технику сразу на мультимодальный случай.

2 Семантика логики $\mathcal{LTK}.sl$

Алфавит языка $\mathcal{LTK}.sl$ включает счётное множество пропозициональных переменных $Prop = \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$, константы $\top, \perp$ скобки $(,)$, стандартные булевы операции и набор унарных модальных операторов $\{N, \Box_1, \dots, \Box_n, \Box_e\}$.

(Многомодальным) $\mathcal{LTK}.sl$ -фреймом назовём упорядоченный набор $F := \langle W_{\mathbb{N}}, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n \rangle$, где

- $W_{\mathbb{N}} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} C_t$ – совокупность сгустков C_t , пронумерованных натуральными числами: $C_{t_1} \cap C_{t_2} = \emptyset$, если $t_1 \neq t_2$;
- $\mathbf{Next}$ – отношение «следующее натуральное число»:

$$\forall a, b \in W : a\mathbf{Next}b \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N} (a \in C_t \& b \in C_{t+1});$$

- R_e – отношение эквивалентности на каждом сгустке:

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall a, b \in C_t : aR_e b;$$

- $R_1, \dots, R_n$ – отношения знаний агентов, каждое из которых задаёт отношение эквивалентности на некотором подмножестве элементов каждого момента времени (сгустка):

$$\forall i \in [1, n] R_i \subseteq R_e.$$

Моделью на $\mathcal{LTK}.sl$ -фрейме F назовём пару $M := \langle F, V \rangle$, где F – $\mathcal{LTK}.sl$ -фрейм, V – означивание: $Prop \mapsto 2^{W_{\mathbb{N}}}$. Тогда выводимость формул, содержащих модальные операторы, задаётся следующим образом: $\forall a \in C_t \subseteq W_{\mathbb{N}}, \forall t \in \mathbb{N}$:

- $\langle F, a \rangle \models_V \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \langle F, a \rangle \models_V \varphi$ и $\langle F, a \rangle \models_V \psi$;
- $\langle F, a \rangle \models_V \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \langle F, a \rangle \models_V \varphi$ или $\langle F, a \rangle \models_V \psi$;
- $\langle F, a \rangle \models_V \bar{\varphi} \Leftrightarrow \langle F, a \rangle \not\models_V \varphi$;
- $\langle F, a \rangle \models_V N\varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_{t+1} : \langle F, b \rangle \models_V \varphi$;
- $\langle F, a \rangle \models_V \Box_e \varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_t : \langle F, b \rangle \models_V \varphi$;
- $\langle F, a \rangle \models_V \Box_i \varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_t : a R_i b \Rightarrow \langle F, b \rangle \models_V \varphi$.

Определяемая как множество формул истинных на всех таких моделях, логика $\mathcal{LTK}.sl$ моделирует линейный направленный временной процесс, в котором из текущего временного состояния (сгустка t) достигим только следующий момент времени — тем самым, временной процесс представляет собой направленный в будущее луч, разделённый на дискретные такты вычислений или рассуждений.

Отношение всеобщей достижимости внутри каждого сгустка $R_e \subseteq \bigcup_{t \in \mathbb{N}} (C_t)^2$ задаёт саму совокупность непересекающихся сгустков, а линейную связь между ними — временное отношение $\mathbf{Next}$. Внутри временного процесса определено действие агентов, каждому из которых в каждый момент времени доступна определённая часть информации (знаний агентов) — распределение этих частей задано агентными отношениями $R_1, \dots, R_n$, представляющими собой подмножества отношения R_e . Агенты могут интерпретироваться и как субъекты социального взаимодействия, и как элементы систем администрирования, обладающие

собственной совокупностью доступной информации или прав в каждый момент времени. *Общее знание* (англ. *Common Knowledge*) определяется отношением R_e .

Стоит отметить, что ограничения, накладываемые на доступные некоторому агенту знания могут задаваться как отдельным отношением R_i , так и некоторым их объединением. Однако, концептуально важна возможность недостижимости некоторой части информации ни одному агенту, а значит объединение всех n заданных на $\mathcal{LTK.sl}$ -фрейме отношений не обязательно всюду совпадает с отношением Общего знания.

3 Финитная аппроксимируемость в $\mathcal{LTK.sl}$

Финитная аппроксимируемость является важным свойством логических систем, поскольку позволяет нам оперировать в описании логики конечными моделями, а не их бесконечными вариантами. Логика $\mathcal{L}$ *финитно аппроксимируема* (обладает *свойством конечной модели*), если она полна относительно класса конечных фреймов, [8].

Отметим, что нерефлексивный нетранзитивный характер временного отношения, в совокупности с необходимостью сохранить эффективную модель реализации временного процесса, не позволяют нам в явном виде ограничиться эффективными техниками р-морфизма или фильтрации — в обоих случаях классическое применение методов привело бы к смещению последовательности моментов времени: их отождествлению или возникновению временных коллизий. Для сохранения временной достижимости сгустков и связи агентов внутри них, нами предложен комбинированный метод доказательства финитной аппроксимируемости рассматриваемой логики $\mathcal{LTK.sl}$.

Переопределим в языке $\mathcal{LTK.sl}$ необходимые теоретико-модельные понятия и методы.

Под *модальной степенью* $d(\alpha)$ формулы α в логике $\mathcal{LTK.sl}$ будем понимать число вложенных в α нетранзитивных нерефлексивных операторов N : $d(p) = d(\circ p) = 0$, где $\circ \in \{\neg, \Box_e, \Box_i\}$; $\forall p \in Prop \ d(\alpha \odot \beta) = \max(d(\alpha); d(\beta))$, где $\odot \in \{\vee, \wedge\}$; $d(N\alpha) = d(\alpha) + 1$. Иначе говоря, ни один из модальных операторов логики, кроме N , не увеличивает модальную степень, так как не требует рассмотрения иных, кроме текущего, временных состояний.

Длину $l(\alpha)$ формулы α логики $\mathcal{LTK.sl}$ определим по числу операторов формулы следующим образом: $l(p) = 0$; $l(\alpha \circ \beta) = l(\alpha) + l(\beta) + 1$, где $\circ \in \{\wedge, \vee\}$; $l(\bullet\alpha) = l(\alpha) + 1$, где $\bullet \in \{N, \neg, \Box_e, \Box_i\}$.

3.1. р-морфизм в $\mathcal{LTK.sl}$. Отображение f многомодального фрейма $F := \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n \rangle$ на фрейм $F' := \langle W', \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n \rangle$ называется *р-морфизмом*, если $\forall a, b \in W \ \forall R \in \{\mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n\}$:

- (1) $a R b \Rightarrow f(a) R' f(b)$;
- (2) $f(a) R' f(b) \Rightarrow \exists c \in W [a R c \wedge f(c) = f(b)]$.

Для произвольной $\mathcal{LTK}.sl$ -модели $M = \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n, V \rangle$ определим конечную по числу временных сгустков модель N следующим образом:

$$N := \left\langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n, V' \right\rangle,$$

где:

- $\bigcup_{j \in [1, k]} C_j \subset W$ – конечное число сгустков, сгусток C_{k+1} состоит из одного вырожденного элемента;
- $R'_e, R'_1, \dots, R'_n$ задаются как ограничения соответствующих отношений $R_e, R_1, \dots, R_n$ на сгустки $\bigcup_{j \in [1, k]} C_j$, дополненные следующими условиями: $\forall R \in \{R_e, R_1, \dots, R_n\}$
 $\forall a, b \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$ если aRb , то $a = b \in C_{k+1} \& aR'b$;
- $\mathbf{Next}'$ определяется следующим образом:
 $\forall a \in \{C_1, \dots, C_k\}$ если $a \mathbf{Next} b$, тогда $b \in \{C_2, \dots, C_{k+1}\}$;
 $\forall a \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}, \forall b \in W$ если $a \mathbf{Next} b$, тогда $a, b \in C_{k+1}$
 $\& a \mathbf{Next}' b$;
- $V'(p) = V(p) \cap \bigcup_{j \in [1, k]} C_j$ для $p \in Prop$.

В целях согласования обозначений, будем далее называть определённый ранее бесконечный $\mathcal{LTK}.sl$ -фрейм, как F_{inf} , а ограниченный по времени — $F_{fin} := \langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n \rangle$.

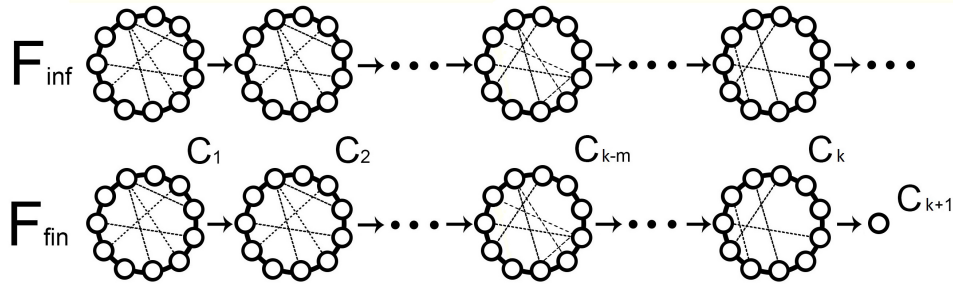


Рис. 1. Бесконечный фрейм F_{inf} и конечный фрейм F_{fin}

Теорема 1. Любой F_{fin} является p -морфным образом F_{inf} .

Доказательство. Зададим отображение f фрейма $F_{inf} = \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n \rangle$ на конечный по времени фрейм $F_{fin} = \langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n \rangle$ следующим образом:

- (1) $\forall x \in \bigcup_{j \in [1, k]} C_j \ f(x) = x$;
- (2) $\forall x \in W \setminus \bigcup_{j \in [1, k]} C_j \ f(x) = y$, где $y \in C_{k+1}$.

Докажем, что для f сохраняются условия (1.) и (2.) определения p -морфизма: $\forall a, b \in W$

(1.) Если $a \mathbf{Next} b$, то, по определению $\mathbf{Next}$, $a \in C_i$ и $b \in C_{i+1}$. Если $b \in \{C_2, \dots, C_k\}$, тогда $f(a) = a$, $f(b) = b$ и $f(a) \mathbf{Next}' f(b)$. Если $b \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$, тогда $f(a) \in C_k \cup C_{k+1}$, а $f(b) \in C_{k+1}$ и $f(a) \mathbf{Next}' f(b)$. Если $a R_e b$ и $a, b \in C_i \in \{C_1, \dots, C_k\}$ тогда $f(a) R'_e f(b)$. Если $C_i \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$, тогда $f(a) = f(b) = y \in C_{k+1}$.

В силу $R_i \subseteq R_e$, $\forall i \in [1, \dots, n]$, для отношений $R'_1, \dots, R'_n$ доказательство аналогично R_e .

(2.) Если $f(a) \mathbf{Next}' f(b)$, то возможны следующие случаи:

- В случае если $f(a) \mathbf{Next}' f(b)$, по определению отношения $\mathbf{Next}'$, $f(a) \in C_i$, $f(b) \in C_{i+1}$, где $i+1 \in [2, \dots, k]$. В этом случае $f(a) = a$, а для $f(b)$ возможны 2 варианта:
 - когда $f(b) \in \{C_2, \dots, C_k\}$, $b = c$ и $a \mathbf{Next} c$;
 - когда $f(b) \in C_{k+1}$ и $f(a) \in C_k$, в качестве c можно рассмотреть $\forall c \in C_{k+1}$, и тогда $a \mathbf{Next} c$.
- В случае если $f(a), f(b) \in C_{k+1}$, имеем $a \in C_j$, $b \in C_{j+1}$ где $\{C_j, C_{j+1}\} \subset W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$ и тогда в качестве c мы возьмём $\forall x \in C_{j+1}$. В этом случае $f(c) = f(b) \in C_{k+1} \subset F_{fin}$.
 $\forall a, b \in W$ если $f(a) R'_e f(b)$, то возможны 2 варианта:
 - если $f(a), f(b) \in C_i$, где $i \in \{1, \dots, k\}$, тогда $a R_e b$, где $a, b \in C_i$, $i \in [1, \dots, k]$. В этом случае $c \in C_i$;
 - если $f(a), f(b) \in C_{k+1}$, тогда $a R_e b$ и $a, b \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$.
 Доказательство для случая отношений R_i полностью повторяет рассуждения приведённые выше, в силу определения отношений R_i как подмножеств R_e .

□

Теорема 2. Пусть $M = \langle F_{inf}, V \rangle$ – неограниченная по времени $\mathcal{LTK.sl}$ -модель, α – произвольная формула модальной степени t , $t \in \omega$. Тогда $\forall x \in \bigcup_{j \in [1, k-m]} C_j \subset F_{inf}$ ($m < k$) справедливо:

$$\langle M, x \rangle \not\models \alpha \Leftrightarrow \langle N, x \rangle \not\models \alpha,$$

где $N = \langle F_{fin}, V' \rangle = \langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n, V' \rangle$.

Доказательство. Докажем, что утверждение справедливо для всех формул логики $\mathcal{LTK.sl}$. Доказательство будем вести индукцией по длине формулы α . При $l(\alpha) = 0$ имеем $\alpha = p$. По определению, модальная степень формулы в этом случае также равна 0 и утверждение верно $\forall x \in \bigcup_{j \in [1, k]} C_j$.

Предположим, что утверждение теоремы верно $\forall \beta: l(\beta) < t$, т.е.

$$\langle M, x \rangle \not\models \beta \Leftrightarrow \langle N, x \rangle \not\models \beta.$$

Докажем для $l(\alpha) = t$. Случаи $\alpha \in \{\neg\varphi, \Box_e\varphi, \Box_i\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi\}$ удовлетворяют индуктивной гипотезе, поскольку модальная степень формулы α

не увеличивается путём добавления операторов $\{\neg, \Box_e, \Box_i\}$ к подформуле φ меньшей длины и потенциально увеличивается добавлением $\{\vee, \wedge\}$ только до значения $\max(d(\varphi), d(\psi))$, где φ и ψ также короче по длине (по определению истинности таких формул на моделях логики).

Пусть $\alpha = N\varphi$, $l(\varphi) = l(\alpha) - 1$ и $d(\alpha) = d(\varphi) + 1$. По индуктивной гипотезе $\langle M, x \rangle \not\models \varphi \Leftrightarrow \langle N, x \rangle \not\models \varphi$, где $x \in \bigcup_{j \in [2, k-(m-1)]} C_j$. По определению N верно, что $\forall x \in C_i \langle M, x \rangle \models N\varphi \Leftrightarrow \forall y \in C_{i+1}$ (т.е. $x \mathbf{Next} y$) $\langle M, y \rangle \models \varphi$, следовательно, $\exists x \in C_i \langle M, x \rangle \not\models N\varphi \Leftrightarrow \exists y \in C_{i+1} \langle M, y \rangle \not\models \varphi$.

Тогда $\forall \hat{x} \in \bigcup_{j \in [1, k-m]} C_j \langle M, \hat{x} \rangle \not\models N\varphi \Leftrightarrow \langle N, \hat{x} \rangle \not\models N\varphi$. $\square$

Отметим, что полученная таким образом модель конечна по времени, но имеет неограниченную (а значит потенциально счётную) мощность сгустков. Чтобы получить конечную модель, применим модифицированный метод фильтрации — ограниченной на сгустки.

3.2. Ограниченная фильтрация для $\mathcal{LTK.sl}$. Завершая построение конечной модели, адекватной нашей логике, применим технику фильтрации к полученному в предыдущем разделе конечному по времени фрейму F_{fin} .

Пусть $M = \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n V \rangle$ — модель, построенная на бесконечном $LTK.sl$ -фрейме, определённая ранее, $\Phi \subseteq For(L^{\mathcal{LTK.sl}})$ — набор формул, замкнутых относительно подформул. Определим отношение эквивалентности $\equiv_\Phi$ на сгустках из W следующим образом: $\forall t \in \mathbb{N}, \forall x, y \in C_t$

$$x \equiv_\Phi y \iff [\forall \alpha \in \Phi (\langle M, x \rangle \models \alpha \Leftrightarrow \langle M, y \rangle \models \alpha)].$$

Далее будем использовать следующие обозначения:

- $Var(\Phi)$ для набора всех переменных формул из Φ ;
- $[x]_{\equiv_\Phi} := \{y \in W | x \equiv_\Phi y\}$ для классов эквивалентности;
- $W_\Phi := \{[x]_{\equiv_\Phi} | \forall x \in W\}$ для множества всех таких классов;
- $C_{j_\Phi} := \{[x]_{\equiv_\Phi} | \forall x \in C_j \subset F_{fin}\}$, $j \in [1, k+1]$, для каждого сгустка таких классов, полученных из сгустков F_{fin} .

Чтобы ограничить конечным числом все мощности сгустков элементов модели и, тем самым, получить конечную модель, определим фильтрацию множества $\Phi \subseteq For(L^{\mathcal{LTK.sl}})$ моделью

$$N_\Phi = \left\langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_{j_\Phi}, \mathbf{Next}'_\Phi, R'_{e_\Phi}, R'_{1_\Phi}, \dots, R'_{n_\Phi}, V'_\Phi \right\rangle$$

на основе модели N с p -морфным фреймом F_{fin} и дополнительной следующей фильтрацией сгустков:

- (1) $\forall p \in Var(\Phi) [V'_\Phi(p) = \{[a]_{\equiv_\Phi} | \langle N, a \rangle \models p\}]$;
- (2) $\forall a, b \in \{\bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j\}, \forall R' \in [\mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n]$

$$(aR'b \Rightarrow [a]_{\equiv_\Phi} R'_\Phi [b]_{\equiv_\Phi});$$

- (3) $\forall a, b \in \{\bigcup_{j \in [1, k+1]} C_{j_\Phi}\}$

$$(a) \forall l \in \{e, 1, \dots, n\} ([a]_{\equiv_{\Phi}} R'_{l_{\Phi}} [b]_{\equiv_{\Phi}} \implies [\forall \Box_l \alpha \subseteq \Phi$$

$$\langle N, a \rangle \models \Box_l \alpha \Rightarrow \langle N, b \rangle \models \alpha];$$

$$(b) [a]_{\equiv_{\Phi}} \mathbf{Next}'_{\Phi} [b]_{\equiv_{\Phi}} \implies ([\forall N \alpha \subseteq \Phi$$

$$\langle N, a \rangle \models N \alpha \Rightarrow \langle N, b \rangle \models \alpha].$$

В нашем случае также применимы известные условия построения минимальной и максимальной фильтрации:

— **минимальная фильтрация**

$$N_{\Phi}^{min} = \left\langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_{j_{\Phi}}, \mathbf{Next}', R'_{e_{\Phi}}, R'_{1_{\Phi}}, \dots, R'_{n_{\Phi}}, V'_{\Phi} \right\rangle,$$

где

$$\bullet \forall l \in \{e, 1, \dots, n\} R'_{l_{\Phi}}^{min} = \{([a]_{\equiv_{\Phi}}, [b]_{\equiv_{\Phi}}) | (a, b) \in R'_l\},$$

— **максимальная фильтрация**

$$N_{\Phi}^{max} = \left\langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_{j_{\Phi}}, \mathbf{Next}', R'_{e_{\Phi}}, R'_{1_{\Phi}}, \dots, R'_{n_{\Phi}}, V'_{\Phi} \right\rangle,$$

где

$$\bullet \forall l \in \{e, 1, \dots, n\} : [a]_{\equiv_{\Phi}} R'_{l_{\Phi}}^{max} [b]_{\equiv_{\Phi}} \Leftrightarrow [\forall \Box_l \alpha \subseteq \Phi (\langle N, a \rangle \models \Box_l \alpha \Rightarrow \langle N, b \rangle \models \alpha)].$$

Полученные в результате описанной процедуры сгустки всякий раз будут иметь конечную мощность, в силу выбора множества Φ , конечности числа отношений на фрейме и всех попарных вариантов их пересечений. По построению фильтрованной модели, верна следующая лемма:

Лемма 1. Пусть $N = \langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n, V' \rangle$ — ограниченная по времени p -морфная модель бесконечной $\mathcal{LTK.sl}$ -модели M , $\Phi \subseteq For(L^{\mathcal{LTK.sl}})$ — замкнутое относительно подформул множество формул, модальная степень которых не превосходит m ($m \in \omega, k > m$),

$$N_{\Phi} = \left\langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_{j_{\Phi}}, \mathbf{Next}'_{\Phi}, R'_{e_{\Phi}}, R'_{1_{\Phi}}, \dots, R'_{n_{\Phi}}, V'_{\Phi} \right\rangle$$

— *фильтрованный вариант модели N множеством Φ .*

Тогда $\forall x \in \bigcup_{j \in [1, k-m]} C_j, \forall \alpha \in \Phi$:

$$\langle N, x \rangle \not\models \alpha \Leftrightarrow \langle N_{\Phi}, x \rangle \not\models \alpha.$$

В силу Теоремы 2 и Леммы 1, заключаем финитную аппроксимируемость $\mathcal{LTK.sl}$. Таким образом, в качестве моделей логики могут рассматриваться не только бесконечные модели M , но и модели, построенные на конечных $\mathcal{LTK.sl}$ -фреймах для каждой соответствующей формулы.

4 Унификация в $\mathcal{LTK.sl}$

4.1. Основные определения теории унификация. Базовая проблема унификации формулируется в виде вопроса о возможности трансформирования формулы $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ логики $\mathcal{L}$ в теорему путем замены её переменных. Если ответ положителен, формула $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ называется *унифицируемой* в $\mathcal{L}$, а подстановка $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i, \forall p_i \in Var(\varphi)$ такая, что $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$, *унификатором* формулы. *Корневым* (англ. *ground*, сокр. *gu*) будем называть унификатор, представляющий собой подстановку набора констант вместо переменных формулы.

Начало исследования задачи унификации, положенное в 1960-е годы, [14], главным образом было связано с задачами, возникающими в области информационных наук: унификация рассматривалась как инструмент, позволяющий преобразовать целые блоки исполняемых процедур к виду универсальных макросов, что конечно, довольно далеко от сегодняшних задач, возникающих в области символической логики. Импульс же развитию теории унификации здесь в последние десятилетия можно смело связать с именем С. Гиларди, обнаружившим значимые связи теории с другими задачами, широкие перспективы дальнейших исследований и эффективный подход, основывающийся на понятии проективной формулы, [10].

Формула $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ называется *проективной* в логике $\mathcal{L}$, если существует унификатор τ формулы φ , такой, что $\Box\varphi \rightarrow [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{L}$ для всех $p_i \in Var(\varphi)$. Такой унификатор называется *проективным*.

Многие известные системы, обладающие «хорошими» характеристиками (рефлексивностью, транзитивностью, линейностью или их слабыми вариантами), изучены с точки зрения унификации: для них успешно определён (или опровергнут требуемый) тип унификации, найдены алгоритмы построения лучших унификаторов (или доказано их отсутствие), [9, 10, 11, 15, 6]. Исследования же других систем часто сопряжены с необходимостью модификации имеющихся или поиском новых методов и техник, [5, 7], что неизбежно ведёт к некоторому снижению активности исследований.

В частности, данное выше определение верно для произвольной логики, расширяющей модальную систему $\mathcal{S4}$, т.к. последняя позволяет оперировать с рефлексивным и транзитивным свойствами модального оператора $\Box$ в логике. Для определения проективной формулы в нашей логике, в отсутствие хотя бы выразимого оператора транзитивной достижимости, воспользуемся более универсальной записью определения: формулу $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ будем называть *проективной* в $\mathcal{L}$, если найдётся унификатор τ формулы φ такой, что $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} [p_i \equiv \tau(p_i)]$ для всех $p_i \in Var(\varphi)$. Нетрудно заметить, что данное определение несёт тот же смысл, что и данное выше. Как будет показано далее, этого переосмысления, в совокупности с предлагаемой конструкцией $\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi$,

где $N^0 \Box_e \varphi = \Box_e \varphi$, в качестве в некотором роде замены транзитивного оператора, оказывается достаточно, чтобы определить проективный унификатор в логике.

Отметим ещё несколько важных для нас определений теории унификации. На множестве всех унификаторов формулы φ определено отношение предпорядка «более общий»: унификатор σ формулы $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ называют *более общим*, чем σ_1 в логике $\mathcal{L}$ (и пишут $\sigma_1 \preceq \sigma$), если найдётся подстановка γ такая, что для всех переменных p_i формулы σ верно: $\sigma_1(p_i) \equiv_{\mathcal{L}} \gamma(\sigma(p_i))$.

Относительно данного предпорядка, унификатор σ будет называться *максимальным* для формулы $\varphi(p_1, \dots, p_s)$, если для любого другого унификатора σ^i либо $\sigma^i \preceq \sigma$, либо $(\sigma^i \not\preceq \sigma) \& (\sigma \not\preceq \sigma^i)$. Если σ — более общий, чем любой другой унификатор, он называется *наиболее общим* (или кратко *ноу*).

Понятие типа унификации также может быть дано, используя определённый выше предпорядок: логика имеет *нульарный* тип унификации, если, относительно $\preceq$, существуют бесконечные последовательности унификаторов. Если каждая такая последовательность заканчивается максимальным элементом, логика имеет по крайней мере *инфинитарный* тип. В случае если максимальных унификаторов конечное число — *финитарный*. Наконец, логика обладает наилучшим — *унитарным* — типом унификации, если для любой унифицируемой формулы в логике найдётся ноу.

4.2. Унитарная унификация в $\mathcal{LTK.sl}$. Пусть формула φ — формула модальной степени $d(\varphi) = m$, следовательно, φ содержит m вложенных операторов N . $k + 1$ — число сгустков, определяемое глубиной p -морфной $\mathcal{LTK.sl}$ -модели, $k > m$, следовательно, для проверки истинности формулы φ требуется $k - m$ шагов для любой стартовой точки из промежутка $\{1, \dots, k - m\}$.

Следуя Гиларди, [10], проективный унификатор определяет наиболее общий унификатор формулы, и, следовательно, в случае применимости ко множеству всех унифицируемых формул логики, устанавливает её унитарный тип.

Следующие два утверждение приводятся без доказательства, т.к. они полностью повторяют рассуждения из [7], опуская в процессе лишь случай универсальной модальности.

Лемма 2. Для любого набора $c_1, \dots, c_r \in \{\top, \perp\}$ и любой формулы $\varphi(p_1, \dots, p_r)$ существует $c \in \{\top, \perp\}$, такая, что

$$\forall x \in F, \langle F, x \rangle \models \varphi(c_1, \dots, c_r) \equiv c.$$

Теорема 3. Если формула φ унифицируема в $\mathcal{LTK.sl}$, то φ имеет корневой унификатор *ди*.

Следствием данных утверждений является возможность эффективно использования корневых унификаторов для доказательства унифицируемости формул в логике $\mathcal{LTK.sl}$ — всякий раз достаточно рассмотреть не более, чем 2^s различных подстановок, чтобы определить существование подходящей константной, являющейся унификатором.

Теорема 4. *Любая унифицируемая формула в $\mathcal{LTK.sl}$ проективна.*

Доказательство. Пусть $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ унифицируемая в $\mathcal{LTK.sl}$ формула. Тогда для любой переменной $p_i \in \text{Var}(\varphi)$ определим следующую подстановку $\sigma(p_i)$:

$$\sigma(p_i) := \left(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i \right) \vee \left(\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i) \right),$$

где $gu(p_1), \dots, gu(p_s)$ — корневой унификатор формулы $\varphi(p_1, \dots, p_s)$, полученный по алгоритму из предыдущей теоремы.

Возьмём любую бесконечную модель $M := \langle F, V \rangle$ с произвольным означиванием V . Если σ — унификатор для φ , тогда $\sigma(\varphi) \in \mathcal{LTK.sl}$ и $\forall x \in F \langle M, x \rangle \models_V \sigma(\varphi)$. Докажем, что подстановка σ является унификатором для φ в логике $\mathcal{LTK.sl}$.

1. Если $\forall x \in \{C_1, \dots, C_{k-m}\} \langle M, x \rangle \models_V \varphi$, то $\langle M, x \rangle \models_V \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi$ и, следовательно, второй дизъюнктивный член будет опровергнут на x . Если $\langle M, x \rangle \models_V p_i$, тогда $\langle M, x \rangle \models_V \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i$, следовательно, $\langle M, x \rangle \models_V \sigma(p_i)$. Если $\langle M, x \rangle \models_V \neg p_i$, тогда $\langle M, x \rangle \not\models_V \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i$ и следовательно $\langle M, x \rangle \models_V \neg \sigma(p_i)$. Как следствие, истинностное значение $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ на произвольном элементе x при означивании V совпадает с истинностью $\varphi(\sigma(p_1), \dots, \sigma(p_s))$ на том же элементе при том же означивании V и, в этом случае, $\langle M, x \rangle \models_V \sigma(\varphi)$.

2. Если $\exists x \in \{C_1, \dots, C_{k-m}\} \langle M, x \rangle \models_V \neg \varphi$, тогда $\langle M, x \rangle \not\models_V \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi$.

В этом случае возможно выполнение второго дизъюнктивного члена, но первый при этом опровергается на x . Тогда истинностное значение для всех $\sigma(p_i)$ на x совпадает с $gu(p_i)$ (т.е. $\sigma(\varphi) \equiv gu(\varphi)$), и поскольку $\langle M, x \rangle \models_V gu(\varphi)$ (в силу выбора корневого унификатора, $gu(\varphi) \in \mathcal{LTK.sl}$), снова $\langle M, x \rangle \models_V \sigma(\varphi)$. Следовательно, $\sigma(\varphi) \in \mathcal{LTK.sl}$ для унифицируемой в $\mathcal{LTK.sl}$ формулы φ .

Докажем, что $\sigma(\varphi)$ — проективный унификатор. Если $\sigma(p_i)$ — проективный унификатор для φ , то $\forall p_i \in \text{Var}(\varphi)$ по определению, мы получим следующее:

$$\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i \leftrightarrow \left[\left(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i \right) \vee \left(\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i) \right) \right].$$

Предположим обратное: пусть σ не является проективным унификатором. В таком случае если $\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} \varphi$, то

$$\varphi \not\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i \leftrightarrow [(\bigwedge_{i=0}^m N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^m N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))]. \quad (1)$$

В этом случае

$$\varphi \not\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i \rightarrow [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))], \quad (2)$$

или

$$\varphi \not\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))] \rightarrow p_i. \quad (3)$$

Если (2), тогда $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i$, но в этом случае $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i$, благодаря $\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} \varphi$ и $\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i$, и поэтому

$$\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i \rightarrow [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))].$$

Следовательно, выполнение (2) невозможно.

Если (3), то $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))]$, но

это возможно только при $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i$, поскольку $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi$.

Как следствие, в дизъюнкции $\sigma(p_i)$ может выполняться только первый член. Поэтому справедливо

$$\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))] \rightarrow p_i,$$

что противоречит (3). Следовательно, σ — проективный унификатор для φ в логике $\mathcal{LTK.sl}$, поэтому φ — проективная формула. $\square$

References

- [1] Ю.Г. Карпов, *Model Checking. Верификация параллельных и распределенных программных систем*, СПб.: БХВ-Петербург, 2010.
- [2] А.В. Кудинов, И.Б. Шапировский, *О разбиениях шкал Крипке конечной высоты*, *Izvestiya: Mathematics*, **81** (2017), 592–617.
- [3] В.В. Рыбаков, *Интранзитивные временные многоагентные логики, информация и знание, разрешимость*, *Сибирский математический журнал*, **58** (2017), 1128–1143.

- [4] И.Б. Шапировский, В.Б. Шехтман, *Современная модальная логика: между математикой и информатикой*, Современная логика: основания, предмет и перспективы развития, М.: ИД Форум, 2018, 265–305.
- [5] S.I. Bashmakov, *Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality*, J. SibFU. Mathematics and Physics, **11** (2018), 3–9.
- [6] S.I. Bashmakov, *Unification in pretabular extensions of S_4* , Logica Universalis, **15** (2021), 381–397.
- [7] S.I. Bashmakov, T.Yu. Zvereva, *Unification and finite model property for linear step-like temporal multi-agent logic with the universal modality*, Bulletin of the Section of Logic, **51** (2022), 345–361.
- [8] A. Chagrov, M. Zacharyashev, *Modal Logic*, Oxford University Press, 1997.
- [9] W. Dzik, P. Wojtylak, *Projective unification in modal logic*, J. Symbolic Logic, **20** (2012), 121–153.
- [10] S. Ghilardi, *Unification Through Projectivity*, J. Logic Comput, **7** (1997), 733–752.
- [11] S. Ghilardi, *Unification in Intuitionistic logic*, J. Symbolic Logic, **62** (1999), 859–880.
- [12] V. Goranko, S. Passy, *Using the universal modality: gains and questions*, J. Logic and Computation, **2** (1992) 5–30.
- [13] A. Prior, *Time and Modality*, Oxford University Press, 1957.
- [14] J.A. Robinson, *A machine oriented logic based on the resolution principle*, J. of the ACM, **12** (1965), 23–41.
- [15] V.V. Rybakov, *Best unifiers in transitive modal logics*, Studia Logica, **99** (2011), 321–336.
- [16] V.V. Rybakov, *Non-transitive linear temporal logic and logical knowledge operations*, J. Logic and Computation, **26** (2015), 945–958.
- [17] R. van der Meyden, Ks. Wong, *Complete Axiomatizations for Reasoning about Knowledge and Branching Time*, Studia Logica, **75** (2003), 93–123.

STEPAN IGOREVICH BASHMAKOV
 SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,
 PR. SVOBODNY, 79,
 600041, KRASNOYARSK, RUSSIA
 Email address: krauder@mail.ru

TATYANA YURIEVNA ZVEREVA
 SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,
 PR. SVOBODNY, 79,
 600041, KRASNOYARSK, RUSSIA
 Email address: 3336259@gmail.com