

ЛИНЕЙНАЯ СТУПЕНЧАТАЯ ЛОГИКА ЗНАНИЯ  
 $\mathcal{LTK.sl}$ С.И. БАШМАКОВ, Т.Ю. ЗВЕРЕВА  *Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

**Abstract:** This paper proposes a description of linear multi-agent logic of knowledge  $\mathcal{LTK.sl}$  that models a linear non-reflexive non-transitive (step-like) temporal process of transition between information clusters — time points.

Using modified techniques, we proved the finite approximability of logic. We proposed an approach for solving the main unification problem in logics of a step-like temporal relation. The projectivity and, as a consequence, unitary type of unification in logic are proved.

**Keywords:** modal logics, temporal logics, finite model property, linear time, Kripke relational semantics, multi-agent logic, unification.

## 1 Введение

Модальные и временные логики с середины прошлого века держат планку интенсивно развивающейся области знания, что обусловлено их

---

BASHMAKOV, S.I., ZVEREVA T.YU., LINEAR STEP-LIKE LOGIC OF KNOWLEDGE  $\mathcal{LTK.sl}$ .

© 2023 БАШМАКОВ С.И..

Первый автор поддержан Российским научным фондом, Правительством Красноярского края и Красноярским краевым фондом науки (грант 22-21-20028).

*Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.*

фундаментальным значением и широкой применимостью в информационных системах [13, 4, 17]. Наиболее ярким примером, пожалуй, являются линейная временная логика  $\mathcal{LTL}$  и логика деревьев вычислений (ветвящегося времени)  $\mathcal{CTL}$ , используемые в теории верификации программ и, фактически, составляющие её фундамент, [1].

В последние годы возрастает необходимость поиска эффективных инструментов для реализации новых запросов к моделированию процесса передачи информации — в частности, обусловленных «плохими» условиями реализации информационного процесса, невыразимыми стандартными операторами. Одним из актуальных направлений в этой области является рассмотрение отношений и систем с операторами, нарушающими по своей природе принципы транзитивности временного (модального [2]) процесса: в ограниченных диапазонах достижимости или всюду в процессе рассуждений, [16, 3].

В терминологии интенсивно развивающейся области модальных и временных логик, актуально воспринимать временной процесс как вычислительную процедуру, позволяющую апеллировать понятием знания в условиях дискретно изменяющегося направленного времени. Здесь введение условия на нетранзитивность приводит к необходимости поиска, зачастую, принципиально новых подходов к анализу свойств логики в сравнении с транзитивными вариантами, поскольку стандартные понятия и техники разрабатывались и применялись, в основном, для логических систем «хороших» характеристик.

В качестве такой системы ранее нами была предложена линейная временная логика знания с «универсальной модальностью»  $\mathcal{LTK.sl}_U$  [7]. Для обозначения временного процесса, обладающего свойством достижимости только следующего момента времени, был введён термин «ступенчатого» перехода временных состояний (с англ. *step-like*), а универсальная модальность позволила определить всеобщую достижимость на моделях логики, избегая проблем конечной модальной достижимости каждой формулы, [12]. Задачей данной работы стало исследование версии логики  $\mathcal{LTK.sl}_U$ , сохраняющей ступенчатую природу временного процесса, но лишённой оператора универсальной модальности, доказательство финитной аппроксимируемости, а также унитарности унификации, используя нестандартный взгляд на понятие проективной формулы в условиях нетранзитивного характера единственного отношения достижимости.

Для задач семантической характеристики неклассических логик широко применяется развитая *реляционная семантика Крипке* — подход, основанный на структурно-графической интерпретации логических систем при помощи модельного представления. Логику  $\mathcal{LTK.sl}_U$  определяли и исследовали именно на языке реляционной семантики, [7], логику обеднённого языка  $\mathcal{LTK.sl}$  мы рассматриваем используя тот же подход, для удобства обобщая базовую технику сразу на мультимодальный случай.

## 2 Семантика логики $\mathcal{LTK.sl}$

Алфавит языка  $L^{\mathcal{LTK.sl}}$  включает счётное множество пропозициональных переменных  $Prop = \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$ , константы  $\top, \perp$  скобки  $(, )$ , стандартные булевы операции и набор унарных модальных операторов  $\{N, \square_1, \dots, \square_n, \square_e\}$ .

(Многомодальным)  $\mathcal{LTK.sl}$ -фреймом назовём упорядоченный набор  $F := \langle W_{\mathbb{N}}, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n \rangle$ , где

- $W_{\mathbb{N}} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} C_t$  – совокупность сгустков  $C_t$ , пронумерованных натуральными числами:  $C_{t_1} \cap C_{t_2} = \emptyset$ , если  $t_1 \neq t_2$ ;
- $\mathbf{Next}$  – отношение «следующее натуральное число»:

$$\forall a, b \in W : a\mathbf{Next}b \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N} (a \in C_t \ \& \ b \in C_{t+1});$$

- $R_e$  – отношение эквивалентности на каждом сгустке:

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall a, b \in C_t : aR_e b,$$

$$R_e \subseteq \bigcup_{t \in \mathbb{N}} (C_t)^2;$$

- $R_1, \dots, R_n$  – отношения знаний агентов, каждое из которых задаёт отношение эквивалентности на некотором подмножестве элементов каждого момента времени (сгустка):

$$\forall i \in [1, n] R_i \subseteq R_e.$$

Моделью на  $\mathcal{LTK.sl}$ -фрейме  $F$  назовём пару  $M := \langle F, V \rangle$ , где  $F$  –  $\mathcal{LTK.sl}$ -фрейм,  $V$  – означивание:  $Prop \mapsto 2^{W_{\mathbb{N}}}$ . Тогда выводимость формул, содержащих модальные операторы, задаётся следующим образом:  $\forall a \in C_t \subseteq W_{\mathbb{N}}, \forall t \in \mathbb{N}$ :

- $\langle F, a \rangle \models_V \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \langle F, a \rangle \models_V \varphi$  и  $\langle F, a \rangle \models_V \psi$ ;
- $\langle F, a \rangle \models_V \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \langle F, a \rangle \models_V \varphi$  или  $\langle F, a \rangle \models_V \psi$ ;
- $\langle F, a \rangle \models_V \bar{\varphi} \Leftrightarrow \langle F, a \rangle \not\models_V \varphi$ ;
- $\langle F, a \rangle \models_V N\varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_{t+1} : \langle F, b \rangle \models_V \varphi$ ;
- $\langle F, a \rangle \models_V \square_e \varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_t : \langle F, b \rangle \models_V \varphi$ ;
- $\langle F, a \rangle \models_V \square_i \varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_t : aR_i b \Rightarrow \langle F, b \rangle \models_V \varphi$ .

Определяемая как множество формул истинных на всех таких моделях, логика  $\mathcal{LTK.sl}$  моделирует линейный направленный временной процесс, в котором из текущего временного состояния (сгустка  $t$ ) достигим только следующий момент времени – тем самым, временной процесс представляет собой направленный в будущее луч, разделённый на дискретные такты вычислений или рассуждений.

Отношение всеобщей достижимости внутри каждого сгустка  $R_e$  задаёт саму совокупность непересекающихся сгустков, а линейную связь между ними – временное отношение  $\mathbf{Next}$ . Взаимодействие внутри временного процесса обеспечивают агенты, а доступную для них информацию (*знания*) конечное (заранее определенное, но произвольное) агентные отношения  $R_1, \dots, R_n$ , каждое из которых является некоторым подмножеством отношения  $R_e$ . Агенты могут интерпретироваться и как

субъекты социального взаимодействия, и как элементы систем администрирования, обладающие собственной совокупностью доступной информации или прав в каждый момент времени. *Общее знание* (англ. *Common Knowledge*) определяется отношением  $R_e$ .

Стоит отметить, что ограничения, накладываемые на доступные некоторому агенту знания могут задаваться как отдельным отношением  $R_i$ , так и некоторым их объединением. Однако, концептуально важна возможность недостижимости некоторой части информации ни одному агенту, а значит объединение всех  $n$  заданных на  $\mathcal{LTK.sl}$ -фрейме отношений не обязательно всюду совпадает с отношением Общего знания.

### 3 Финитная аппроксимируемость в $\mathcal{LTK.sl}$

*Финитная аппроксимируемость* является важным свойством логических систем, поскольку позволяет нам оперировать в описании логики конечными моделями, а не их бесконечными вариантами. Логика  $\mathcal{L}$  *финитно аппроксимируема* (обладает *свойством конечной модели*), если она полна относительно класса конечных фреймов, [8].

Отметим, что нерефлексивный нетранзитивный характер временного отношения, в совокупности с необходимостью сохранить эффективную модель реализации временного процесса, не позволяют нам в явном виде ограничиться эффективными техниками р-морфизма или фильтрации — в обоих случаях классическое применение методов привело бы к смещению последовательности моментов времени: их отождествлению или возникновению временных коллизий. Для сохранения временной достижимости сгустков и связи агентов внутри них, нами предложен комбинированный метод доказательства финитной аппроксимируемости рассматриваемой логики  $\mathcal{LTK.sl}$ .

Переопределим в языке  $\mathcal{LTK.sl}$  необходимые теоретико-модельные понятия и методы.

Под *модальной степенью*  $d(\alpha)$  формулы  $\alpha$  в логике  $\mathcal{LTK.sl}$  будем понимать число вложенных в  $\alpha$  нетранзитивных нерефлексивных операторов  $N$ :  $d(p) = d(\circ p) = 0$ , где  $\circ \in \{\neg, \Box_e, \Box_i\}$ ;  $\forall p \in Prop d(\alpha \odot \beta) = \max(d(\alpha); d(\beta))$ , где  $\odot \in \{\vee, \wedge\}$ ;  $d(N\alpha) = d(\alpha) + 1$ . Иначе говоря, ни один из модальных операторов логики, кроме  $N$ , не увеличивает модальную степень, так как не требует рассмотрения иных, кроме текущего, временных состояний.

Длину  $l(\alpha)$  формулы  $\alpha$  логики  $\mathcal{LTK.sl}$  определим по числу операторов формулы следующим образом:  $l(p) = 0$ ;  $l(\alpha \circ \beta) = l(\alpha) + l(\beta) + 1$ , где  $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ ;  $l(\bullet\alpha) = l(\alpha) + 1$ , где  $\bullet \in \{N, \neg, \Box_e, \Box_i\}$ .

**3.1. р-морфизм в  $\mathcal{LTK.sl}$ .** Отображение  $f$  многомодального фрейма  $F := \langle W, \text{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n \rangle$  на фрейм  $F' := \langle W', R'_e, R'_1, \dots, R'_n \rangle$  называется *р-морфизмом*, если  $\forall a, b \in W \forall R \in \{\text{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n\}$ :

$$(1) a R b \Rightarrow f(a) R' f(b);$$

$$(2) f(a)R'f(b) \Rightarrow \exists c \in W[aRc \wedge f(c) = f(b)].$$

Для произвольной  $\mathcal{LTK}.sl$ -модели  $M = \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n, V \rangle$  определим конечную по числу временных сгустков модель  $N$  следующим образом:

$$N := \left\langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n, V' \right\rangle,$$

где:

- $\bigcup_{j \in [1, k]} C_j \subset W$  – конечное число сгустков, сгусток  $C_{k+1}$  состоит из одного вырожденного элемента;
- $R'_e, R'_1, \dots, R'_n$  задаются как ограничения соответствующих отношений  $R_e, R_1, \dots, R_n$  на сгустки  $\bigcup_{j \in [1, k]} C_j$ , дополненные следующими условиями:  $\forall R \in \{R_e, R_1, \dots, R_n\}$   
 $\forall a, b \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$  если  $aRb$ , то  $a = b \in C_{k+1} \& aR'b$ ;
- $\mathbf{Next}'$  определяется следующим образом:  
 $\forall a \in \{C_1, \dots, C_k\}$  если  $a \mathbf{Next} b$ , тогда  $b \in \{C_2, \dots, C_{k+1}\}$ ;  
 $\forall a \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}, \forall b \in W$  если  $a \mathbf{Next} b$ , тогда  $a, b \in C_{k+1} \& a \mathbf{Next}' b$ ;
- $V'(p) = V(p) \cap \bigcup_{j \in [1, k]} C_j$  для  $p \in Prop$ .

В целях согласования обозначений, будем далее называть определённый ранее бесконечный  $\mathcal{LTK}.sl$ -фрейм, как  $F_{inf}$ , а ограниченный по времени –  $F_{fin} := \langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n \rangle$ .

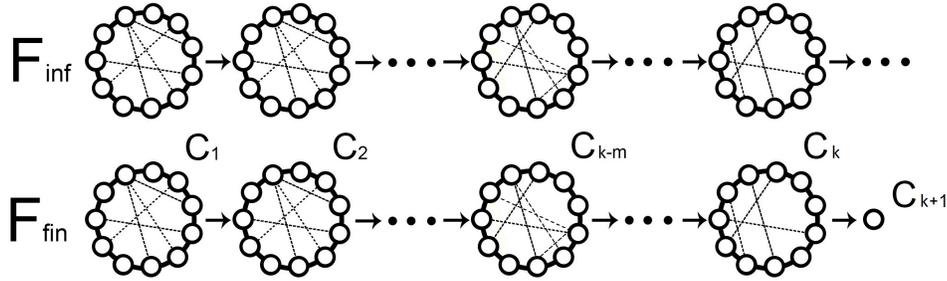


Рис. 1. Бесконечный фрейм  $F_{inf}$  и конечный фрейм  $F_{fin}$

**Теорема 1.** Любой  $F_{fin}$  является  $p$ -морфным образом  $F_{inf}$ .

*Доказательство.* Зададим отображение  $f$  фрейма  $F_{inf} = \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n \rangle$  на конечный по времени фрейм  $F_{fin} = \langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n \rangle$  следующим образом:

- (1)  $\forall x \in \bigcup_{j \in [1, k]} C_j f(x) = x$ ;
- (2)  $\forall x \in W \setminus \bigcup_{j \in [1, k]} C_j f(x) = y$ , где  $y \in C_{k+1}$ .

Докажем, что для  $f$  сохраняются условия (1.) и (2.) определения  $p$ -морфизма:  $\forall a, b \in W$

(1.) Если  $a \mathbf{Next} b$ , то, по определению  $\mathbf{Next}$ ,  $a \in C_i$  и  $b \in C_{i+1}$ . Если  $b \in \{C_2, \dots, C_k\}$ , тогда  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$  и  $f(a) \mathbf{Next}' f(b)$ . Если  $b \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$ , тогда  $f(a) \in C_k \cup C_{k+1}$ , а  $f(b) \in C_{k+1}$  и  $f(a) \mathbf{Next}' f(b)$ . Если  $a R_e b$  и  $a, b \in C_i \in \{C_1, \dots, C_k\}$  тогда  $f(a) R'_e f(b)$ . Если  $C_i \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$ , тогда  $f(a) = f(b) = y \in C_{k+1}$ .

В силу  $R_i \subseteq R_e$ ,  $\forall i \in [1, \dots, n]$ , для отношений  $R'_1, \dots, R'_n$  доказательство аналогично  $R_e$ .

(2.) Если  $f(a) \mathbf{Next}' f(b)$ , то возможны следующие случаи:

- В случае если  $f(a) \mathbf{Next}' f(b)$ , по определению отношения  $\mathbf{Next}'$ ,  $f(a) \in C_i$ ,  $f(b) \in C_{i+1}$ , где  $i+1 \in [2, \dots, k]$ . В этом случае  $f(a) = a$ , а для  $f(b)$  возможны 2 варианта:
  - когда  $f(b) \in \{C_2, \dots, C_k\}$ ,  $b = c$  и  $a \mathbf{Next} c$ ;
  - когда  $f(b) \in C_{k+1}$  &  $f(a) \in C_k$ , в качестве  $c$  можно рассмотреть  $\forall c \in C_{k+1}$ , и тогда  $a \mathbf{Next} c$ .
- В случае если  $f(a), f(b) \in C_{k+1}$ , имеем  $a \in C_j$ ,  $b \in C_{j+1}$  где  $\{C_j, C_{j+1}\} \subset W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$  и тогда в качестве  $c$  мы возьмём  $\forall x \in C_{j+1}$ . В этом случае  $f(c) = f(b) \in C_{k+1} \subset F_{fin}$ .  
 $\forall a, b \in W$  если  $f(a) R'_e f(b)$ , то возможны 2 варианта:
  - если  $f(a), f(b) \in C_i$ , где  $i \in \{1, \dots, k\}$ , тогда  $a R_e b$ , где  $a, b \in C_i$ ,  $i \in [1, \dots, k]$ . В этом случае  $c \in C_i$ ;
  - если  $f(a), f(b) \in C_{k+1}$ , тогда  $a R_e b$  и  $a, b \in W \setminus \{C_1, \dots, C_k\}$ .
 Доказательство для случая отношений  $R_i$  полностью повторяет рассуждения приведённые выше, в силу определения отношений  $R_i$  как подмножеств  $R_e$ .

□

**Теорема 2.** Пусть  $M = \langle F_{inf}, V \rangle$  – неограниченная по времени  $\mathcal{LTK.sl}$ -модель,  $\alpha$  – произвольная формула модальной степени  $t$ ,  $t \in \omega$ . Тогда  $\forall x \in \bigcup_{j \in [1, k-m]} C_j \subset F_{inf}$  ( $m < k$ ) справедливо:

$$\langle M, x \rangle \not\models \alpha \Leftrightarrow \langle N, x \rangle \not\models \alpha,$$

где  $N = \langle F_{fin}, V' \rangle = \langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n, V' \rangle$ .

*Доказательство.* Докажем, что утверждение справедливо для всех формул логики  $\mathcal{LTK.sl}$ . Доказательство будем вести индукцией по длине формулы  $\alpha$ . При  $l(\alpha) = 0$  имеем  $\alpha = p$ . По определению, модальная степень формулы в этом случае также равна 0 и утверждение верно  $\forall x \in \bigcup_{j \in [1, k]} C_j$ .

Предположим, что утверждение теоремы верно  $\forall \beta: l(\beta) < t$ , т.е.

$$\langle M, x \rangle \not\models \beta \Leftrightarrow \langle N, x \rangle \not\models \beta.$$

Докажем для  $l(\alpha) = t$ . Случаи  $\alpha \in \{\neg\varphi, \Box_e\varphi, \Box_i\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi\}$  удовлетворяют индуктивной гипотезе, поскольку модальная степень формулы  $\alpha$

не увеличивается путём добавления операторов  $\{\neg, \Box_e, \Box_i\}$  к подформуле  $\varphi$  меньшей длины и потенциально увеличивается добавлением  $\{\vee, \wedge\}$  только до значения  $\max(d(\varphi), d(\psi))$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  также короче по длине (по определению истинности таких формул на моделях логики).

Пусть  $\alpha = N\varphi$ ,  $l(\varphi) = l(\alpha) - 1$  и  $d(\alpha) = d(\varphi) + 1$ . По индуктивной гипотезе  $\langle M, x \rangle \not\models \varphi \Leftrightarrow \langle N, x \rangle \not\models \varphi$ , где  $x \in \bigcup_{j \in [2, k-(m-1)]} C_j$ . По определению  $N$  верно, что  $\forall x \in C_i \langle M, x \rangle \models N\varphi \Leftrightarrow \forall y \in C_{i+1}$  (т.е.  $x \mathbf{Next} y$ )  $\langle M, y \rangle \models \varphi$ , следовательно,  $\exists x \in C_i \langle M, x \rangle \not\models N\varphi \Leftrightarrow \exists y \in C_{i+1} \langle M, y \rangle \not\models \varphi$ .

Тогда  $\forall \hat{x} \in \bigcup_{j \in [1, k-m]} C_j \langle M, \hat{x} \rangle \not\models N\varphi \Leftrightarrow \langle N, \hat{x} \rangle \not\models N\varphi$ .  $\square$

Отметим, что полученная таким образом модель конечна по времени, но имеет неограниченную (а значит потенциально счётную) мощность сгустков. Чтобы получить конечную модель, применим модифицированный метод фильтрации — ограниченной на сгустки.

**3.2. Ограниченная фильтрация для  $\mathcal{LTK.sl}$ .** Завершая построение конечной модели, адекватной нашей логике, применим технику фильтрации к полученному в предыдущем разделе конечному по времени фрейму  $F_{fin}$ .

Пусть  $M = \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n V \rangle$  — модель, построенная на бесконечном  $\mathcal{LTK.sl}$ -фрейме, определённая ранее,  $\Phi \subseteq \text{For}(L^{\mathcal{LTK.sl}})$  — набор формул, замкнутых относительно подформул. Определим отношение эквивалентности  $\equiv_\Phi$  на сгустках из  $W$  следующим образом:  $\forall t \in \mathbb{N}, \forall x, y \in C_t$

$$x \equiv_\Phi y \iff [\forall \alpha \in \Phi (\langle M, x \rangle \models \alpha \Leftrightarrow \langle M, y \rangle \models \alpha)].$$

Далее будем использовать следующие обозначения:

- $\text{Var}(\Phi)$  для набора всех переменных формул из  $\Phi$ ;
- $[x]_{\equiv_\Phi} := \{y \in W \mid x \equiv_\Phi y\}$  для классов эквивалентности;
- $W_\Phi := \{[x]_{\equiv_\Phi} \mid \forall x \in W\}$  для множества всех таких классов;
- $C_{j_\Phi} := \{[x]_{\equiv_\Phi} \mid \forall x \in C_j \subset F_{fin}\}$ ,  $j \in [1, k+1]$ , для каждого сгустка таких классов, полученных из сгустков  $F_{fin}$ .

Чтобы ограничить конечным числом все мощности сгустков элементов модели и, тем самым, получить конечную модель, определим фильтрацию множества  $\Phi \subseteq \text{For}(L^{\mathcal{LTK.sl}})$  моделью

$$N_\Phi = \left\langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_{j_\Phi}, \mathbf{Next}'_\Phi, R'_{e_\Phi}, R'_{1_\Phi}, \dots, R'_{n_\Phi}, V'_\Phi \right\rangle$$

на основе модели  $N$  с  $p$ -морфным фреймом  $F_{fin}$  и дополнительной последующей фильтрацией сгустков:

- (1)  $\forall p \in \text{Var}(\Phi) [V'_\Phi(p) = \{[a]_{\equiv_\Phi} \mid \langle N, a \rangle \models p\}]$ ;
- (2)  $\forall a, b \in \{\bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j\}$ ,  $\forall R' \in [\mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n]$

$$(aR'b \Rightarrow [a]_{\equiv_\Phi} R'_\Phi [b]_{\equiv_\Phi});$$

- (3)  $\forall a, b \in \{\bigcup_{j \in [1, k+1]} C_{j_\Phi}\}$

$$(a) \forall l \in \{e, 1, \dots, n\} ([a]_{\equiv_{\Phi}} R'_{l_{\Phi}} [b]_{\equiv_{\Phi}} \implies [\forall \Box_l \alpha \subseteq \Phi$$

$$\langle N, a \rangle \models \Box_l \alpha \Rightarrow \langle N, b \rangle \models \alpha];$$

$$(b) [a]_{\equiv_{\Phi}} \mathbf{Next}'_{\Phi} [b]_{\equiv_{\Phi}} \implies ([\forall N \alpha \subseteq \Phi$$

$$\langle N, a \rangle \models N \alpha \Rightarrow \langle N, b \rangle \models \alpha].$$

В нашем случае также применимы известные условия построения минимальной и максимальной фильтрации:

— **минимальная фильтрация**

$$N_{\Phi}^{min} = \left\langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_{j_{\Phi}}, \mathbf{Next}', R'_{e_{\Phi}}, R'_{1_{\Phi}}, \dots, R'_{n_{\Phi}}, V'_{\Phi} \right\rangle,$$

где

$$\bullet \forall l \in \{e, 1, \dots, n\} R'_{l_{\Phi}}^{min} = \{([a]_{\equiv_{\Phi}}, [b]_{\equiv_{\Phi}}) \mid (a, b) \in R'_l\},$$

— **максимальная фильтрация**

$$N_{\Phi}^{max} = \left\langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_{j_{\Phi}}, \mathbf{Next}', R'_{e_{\Phi}}, R'_{1_{\Phi}}, \dots, R'_{n_{\Phi}}, V'_{\Phi} \right\rangle,$$

где

$$\bullet \forall l \in \{e, 1, \dots, n\} : [a]_{\equiv_{\Phi}} R'_{l_{\Phi}}^{max} [b]_{\equiv_{\Phi}} \Leftrightarrow [\forall \Box_l \alpha \subseteq \Phi (\langle N, a \rangle \models \Box_l \alpha \Rightarrow \langle N, b \rangle \models \alpha)].$$

Полученные в результате описанной процедуры сгустки всякий раз будут иметь конечную мощность, в силу выбора множества  $\Phi$ , конечности числа отношений на фрейме и всех попарных вариантов их пересечений. По построению фильтрованной модели, верна следующая лемма:

**Лемма 1.** Пусть  $N = \langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \dots, R'_n, V' \rangle$  — ограниченная по времени  $p$ -морфная модель бесконечной  $\mathcal{LTK.sl}$ -модели  $M$ ,  $\Phi \subseteq \text{For}(\mathcal{LTK.sl})$  — замкнутое относительно подформул множество формул, модальная степень которых не превосходит  $m$  ( $m \in \omega, k > m$ ),

$$N_{\Phi} = \left\langle \bigcup_{j \in [1, k+1]} C_{j_{\Phi}}, \mathbf{Next}'_{\Phi}, R'_{e_{\Phi}}, R'_{1_{\Phi}}, \dots, R'_{n_{\Phi}}, V'_{\Phi} \right\rangle$$

— *фильтрованный вариант модели  $N$  множеством  $\Phi$ .*

Тогда  $\forall x \in \bigcup_{j \in [1, k-m]} C_j, \forall \alpha \in \Phi$ :

$$\langle N, x \rangle \not\models \alpha \Leftrightarrow \langle N_{\Phi}, x \rangle \not\models \alpha.$$

В силу Теоремы 2 и Леммы 1, заключаем финитную аппроксимируемость  $\mathcal{LTK.sl}$ . Таким образом, в качестве моделей логики могут рассматриваться не только бесконечные модели  $M$ , но и модели, построенные на конечных  $\mathcal{LTK.sl}$ -фреймах для каждой соответствующей формулы.

## 4 Унификация в $\mathcal{LTK.sl}$

**4.1. Основные определения теории унификация.** Базовая проблема унификации формулируется в виде вопроса о возможности трансформирования формулы  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$  логики  $\mathcal{L}$  в теорему путем замены её переменных. Если ответ положителен, формула  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$  называется *унифицируемой* в  $\mathcal{L}$ , а подстановка  $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i, \forall p_i \in Var(\varphi)$  такая, что  $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$ , *унификатором* формулы. *Корневым* (англ. *ground*, сокр. *gu*) будем называть унификатор, представляющий собой подстановку набора констант вместо переменных формулы.

Начало исследованию задачи унификации, положенное в 1960-е годы, [14], главным образом было связано с задачами, возникающими в области информационных наук: унификация рассматривалась как инструмент, позволяющий преобразовать целые блоки исполняемых процедур к виду универсальных макросов, что конечно, довольно далеко от сегодняшних задач, возникающих в области символической логики. Импульс же развитию теории унификации здесь в последние десятилетия можно смело связать с именем С. Гиларди, обнаружившим значимые связи теории с другими задачами, широкие перспективы дальнейших исследований и эффективный подход, основывающийся на понятии проективной формулы, [10].

Формула  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$  называется *проективной* в логике  $\mathcal{L}$ , если существует унификатор  $\tau$  формулы  $\varphi$ , такой, что  $\Box\varphi \rightarrow [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{L}$  для всех  $p_i \in Var(\varphi)$ . Такой унификатор называется *проективным*.

Многие известные системы, обладающие «хорошими» характеристиками (рефлексивностью, транзитивностью, линейностью или их слабыми вариантами), изучены с точки зрения унификации: для них успешно определён (или опровергнут требуемый) тип унификации, найдены алгоритмы построения лучших унификаторов (или доказано их отсутствие), [9, 10, 11, 15, 6]. Исследования же других систем часто сопряжены с необходимостью модификации имеющихся или поиском новых методов и техник, [5, 7], что неизбежно ведёт к некоторому снижению активности исследований.

В частности, данное выше определение верно для произвольной логики, расширяющей модальную систему  $\mathcal{S4}$ , т.к. последняя позволяет оперировать с рефлексивным и транзитивным свойствами модального оператора  $\Box$  в логике. Для определения проективной формулы в нашей логике, в отсутствие хотя бы выразимого оператора транзитивной достижимости, воспользуемся более универсальной записью определения: формулу  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$  будем называть *проективной* в  $\mathcal{L}$ , если найдётся унификатор  $\tau$  формулы  $\varphi$  такой, что  $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} [p_i \equiv \tau(p_i)]$  для всех  $p_i \in Var(\varphi)$ . Нетрудно заметить, что данное определение несёт тот же смысл, что и данное выше. Как будет показано далее, этого переосмысления, в совокупности с предлагаемой конструкцией  $\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi$ ,

где  $N^0 \Box_e \varphi = \Box_e \varphi$ , в качестве в некотором роде замены транзитивного оператора, оказывается достаточно, чтобы определить проективный унификатор в логике.

Отметим ещё несколько важных для нас определений теории унификации. На множестве всех унификаторов формулы  $\varphi$  определено отношение предпорядка «более общий»: унификатор  $\sigma$  формулы  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$  называют *более общим*, чем  $\sigma_1$  в логике  $\mathcal{L}$  (и пишут  $\sigma_1 \preceq \sigma$ ), если найдётся подстановка  $\gamma$  такая, что для всех переменных  $p_i$  формулы  $\sigma$  верно:  $\sigma_1(p_i) \equiv_{\mathcal{L}} \gamma(\sigma(p_i))$ .

Относительно данного предпорядка, унификатор  $\sigma$  будет называться *максимальным* для формулы  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ , если для любого другого унификатора  $\sigma^i$  либо  $\sigma^i \preceq \sigma$ , либо  $(\sigma^i \not\preceq \sigma) \& (\sigma \not\preceq \sigma^i)$ . Если  $\sigma$  — более общий, чем любой другой унификатор, он называется *наиболее общим* (или кратко *ноу*).

Понятие типа унификации также может быть дано, используя определённый выше предпорядок: логика имеет *нульарный* тип унификации, если, относительно  $\preceq$ , существуют бесконечные последовательности унификаторов. Если каждая такая последовательность заканчивается максимальным элементом, логика имеет по крайней мере *инфинитарный* тип. В случае если максимальных унификаторов конечное число — *финитарный*. Наконец, логика обладает наилучшим — *унитарным* — типом унификации, если для любой унифицируемой формулы в логике найдётся ноу.

**4.2. Унитарная унификация в  $\mathcal{LTK.sl}$ .** Пусть формула  $\varphi$  — формула модальной степени  $d(\varphi) = m$ , следовательно,  $\varphi$  содержит  $m$  вложимых операторов  $N$ .  $k + 1$  — число сгустков, определяемое глубиной  $p$ -морфной  $\mathcal{LTK.sl}$ -модели,  $k > m$ , следовательно, для проверки истинности формулы  $\varphi$  требуется  $k - m$  шагов для любой стартовой точки из промежутка  $\{1, \dots, k - m\}$ .

Следуя Гиларди, [10], проективный унификатор определяет наиболее общий унификатор формулы, и, следовательно, в случае применимости ко множеству всех унифицируемых формул логики, устанавливает её унитарный тип.

Следующие два утверждение приводятся без доказательства, т.к. они полностью повторяют рассуждения из [7], опуская в процессе лишь случай универсальной модальности.

**Лемма 2.** Для любого набора  $c_1, \dots, c_r \in \{\top, \perp\}$  и любой формулы  $\varphi(p_1, \dots, p_r)$  существует  $c \in \{\top, \perp\}$ , такая, что

$$\forall x \in F, \langle F, x \rangle \models \varphi(c_1, \dots, c_r) \equiv c.$$

**Теорема 3.** Если формула  $\varphi$  унифицируема в  $\mathcal{LTK.sl}$ , то  $\varphi$  имеет корневой унификатор *ди*.

Следствием данных утверждений является возможность эффективно использования корневых унификаторов для доказательства унифицируемости формул в логике  $\mathcal{LTK.sl}$  — всякий раз достаточно рассмотреть не более, чем  $2^s$  различных подстановок, чтобы определить существование подходящей константной, являющейся унификатором.

**Теорема 4.** *Любая унифицируемая формула в  $\mathcal{LTK.sl}$  проективна.*

*Доказательство.* Пусть  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$  унифицируемая в  $\mathcal{LTK.sl}$  формула. Тогда для любой переменной  $p_i \in Var(\varphi)$  определим следующую подстановку  $\sigma(p_i)$ :

$$\sigma(p_i) := \left( \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \square_e \varphi \wedge p_i \right) \vee \left( \neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \square_e \varphi \wedge gu(p_i) \right),$$

где  $gu(p_1), \dots, gu(p_s)$  — корневой унификатор формулы  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ , полученный по алгоритму из предыдущей теоремы.

Возьмём любую бесконечную модель  $M := \langle F, V \rangle$  с произвольным означиванием  $V$ . Если  $\sigma$  — унификатор для  $\varphi$ , тогда  $\sigma(\varphi) \in \mathcal{LTK.sl}$  и  $\forall x \in F \langle M, x \rangle \models_V \sigma(\varphi)$ . Докажем, что подстановка  $\sigma$  является унификатором для  $\varphi$  в логике  $\mathcal{LTK.sl}$ .

1. Если  $\forall x \in \{C_1, \dots, C_{k-m}\} \langle M, x \rangle \models_V \varphi$ , то  $\langle M, x \rangle \models_V \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \square_e \varphi$  и, следовательно, второй дизъюнктивный член будет опровергнут на  $x$ . Если  $\langle M, x \rangle \models_V p_i$ , тогда  $\langle M, x \rangle \models_V \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \square_e \varphi \wedge p_i$ , следовательно,  $\langle M, x \rangle \models_V \sigma(p_i)$ . Если  $\langle M, x \rangle \models_V \neg p_i$ , тогда  $\langle M, x \rangle \not\models_V \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \square_e \varphi \wedge p_i$  и следовательно  $\langle M, x \rangle \models_V \neg \sigma(p_i)$ . Как следствие, истинностное значение  $\varphi(p_1, \dots, p_s)$  на произвольном элементе  $x$  при означивании  $V$  совпадает с истинностью  $\varphi(\sigma(p_1), \dots, \sigma(p_s))$  на том же элементе при том же означивании  $V$  и, в этом случае,  $\langle M, x \rangle \models_V \sigma(\varphi)$ .

2. Если  $\exists x \in \{C_1, \dots, C_{k-m}\} \langle M, x \rangle \models_V \neg \varphi$ , тогда  $\langle M, x \rangle \not\models_V \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \square_e \varphi$ .

В этом случае возможно выполнение второго дизъюнктивного члена, но первый при этом опровергается на  $x$ . Тогда истинностное значение для всех  $\sigma(p_i)$  на  $x$  совпадает с  $gu(p_i)$  (т.е.  $\sigma(\varphi) \equiv gu(\varphi)$ ), и поскольку  $\langle M, x \rangle \models_V gu(\varphi)$  (в силу выбора корневого унификатора,  $gu(\varphi) \in \mathcal{LTK.sl}$ ), снова  $\langle M, x \rangle \models_V \sigma(\varphi)$ . Следовательно,  $\sigma(\varphi) \in \mathcal{LTK.sl}$  для унифицируемой в  $\mathcal{LTK.sl}$  формулы  $\varphi$ .

Докажем, что  $\sigma(\varphi)$  — проективный унификатор. Если  $\sigma(p_i)$  — проективный унификатор для  $\varphi$ , то  $\forall p_i \in Var(\varphi)$  по определению, мы получим следующее:

$$\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i \leftrightarrow \left[ \left( \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \square_e \varphi \wedge p_i \right) \vee \left( \neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \square_e \varphi \wedge gu(p_i) \right) \right].$$

Предположим обратное: пусть  $\sigma$  не является проективным унификатором. В таком случае если  $\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} \varphi$ , то

$$\varphi \not\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i \leftrightarrow [(\bigwedge_{i=0}^m N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^m N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))]. \quad (1)$$

В этом случае

$$\varphi \not\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i \rightarrow [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))], \quad (2)$$

или

$$\varphi \not\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))] \rightarrow p_i. \quad (3)$$

Если (2), тогда  $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i$ , но в этом случае  $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i$ , благодаря  $\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} \varphi$  и  $\vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i$ , и поэтому

$$\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i \rightarrow [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))].$$

Следовательно, выполнение (2) невозможно.

Если (3), то  $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))]$ , но

это возможно только при  $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} p_i$ , поскольку  $\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi$ .

Как следствие, в дизъюнкции  $\sigma(p_i)$  может выполняться только первый член. Поэтому справедливо

$$\varphi \vdash_{\mathcal{LTK.sl}} [(\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))] \rightarrow p_i,$$

что противоречит (3). Следовательно,  $\sigma$  — проективный унификатор для  $\varphi$  в логике  $\mathcal{LTK.sl}$ , поэтому  $\varphi$  — проективная формула.  $\square$

## References

- [1] Ю.Г. Карпов, *Model Checking. Верификация параллельных и распределенных программных систем*, СПб.: БХВ-Петербург, 2010.
- [2] А.В. Кудинов, И.Б. Шапировский, *О разбиениях шкал Крипке конечной высоты*, *Izvestiya: Mathematics*, **81** (2017), 592–617.
- [3] В.В. Рыбаков, *Интранзитивные временные многоагентные логики, информация и знание, разрешимость*, *Сибирский математический журнал*, **58** (2017), 1128–1143.

- [4] И.Б. Шапировский, В.Б. Шехтман, *Современная модальная логика: между математикой и информатикой*, Современная логика: основания, предмет и перспективы развития, М.: ИД Форум, 2018, 265–305.
- [5] S.I. Bashmakov, *Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality*, J. SibFU. Mathematics and Physics, **11** (2018), 3–9.
- [6] S.I. Bashmakov, *Unification in pretabular extensions of  $S_4$* , Logica Universalis, **15** (2021), 381–397.
- [7] S.I. Bashmakov, T.Yu. Zvereva, *Unification and finite model property for linear step-like temporal multi-agent logic with the universal modality*, Bulletin of the Section of Logic, **51** (2022), 345–361.
- [8] A. Chagrov, M. Zacharyashev, *Modal Logic*, Oxford University Press, 1997.
- [9] W. Dzik, P. Wojtylak, *Projective unification in modal logic*, J. Symbolic Logic, **20** (2012), 121–153.
- [10] S. Ghilardi, *Unification Through Projectivity*, J. Logic Comput, **7** (1997), 733–752.
- [11] S. Ghilardi, *Unification in Intuitionistic logic*, J. Symbolic Logic, **62** (1999), 859–880.
- [12] V. Goranko, S. Passy, *Using the universal modality: gains and questions*, J. Logic and Computation, **2** (1992) 5–30.
- [13] A. Prior, *Time and Modality*, Oxford University Press, 1957.
- [14] J.A. Robinson, *A machine oriented logic based on the resolution principle*, J. of the ACM, **12** (1965), 23–41.
- [15] V.V. Rybakov, *Best unifiers in transitive modal logics*, Studia Logica, **99** (2011), 321–336.
- [16] V.V. Rybakov, *Non-transitive linear temporal logic and logical knowledge operations*, J. Logic and Computation, **26** (2015), 945–958.
- [17] R. van der Meyden, Ks. Wong, *Complete Axiomatizations for Reasoning about Knowledge and Branching Time*, Studia Logica, **75** (2003), 93–123.

STEPAN IGOREVICH BASHMAKOV  
 SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,  
 PR. SVOBODNY, 79,  
 600041, KRASNOYARSK, RUSSIA  
 Email address: [krauder@mail.ru](mailto:krauder@mail.ru)

TATYANA YURIEVNA ZVEREVA  
 SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,  
 PR. SVOBODNY, 79,  
 600041, KRASNOYARSK, RUSSIA  
 Email address: [3336259@gmail.com](mailto:3336259@gmail.com)