

ИНДЕКСЫ СОСТОЯНИЙ В КОНЕЧНЫХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ОРИЕНТАЦИЙ  
ПОЛНЫХ ГРАФОВА.В. ЖАРКОВА *Представлено А.В. ЖАРКОВОЙ*

**Abstract:** Graph models occupy an important place in tasks related to information security, including the construction of models and methods for managing the continuous operation of systems and system recovery, countering denials of service. Finite dynamic systems of complete graphs orientations are considered. States of a dynamic system  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$ , are all possible orientations of a given complete graph  $K_n$ , and evolutionary function transforms the given complete graph orientation by reversing all arcs that enter into sinks and there are no other differences between the given and the next digraphs. In this paper, the algorithm to calculate indices of system states is proposed. Namely, the index of the state  $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$  is equal to 0 if it does not have a sink or its indegrees vector (a vector whose components are the degrees of entry of all its vertices located in descending order) is equal to  $(n-1, n-2, \dots, 0)$ , otherwise its index is equal to  $f$ ,  $f \geq 1$ , where  $f$  is the power of the largest set  $(n-1, n-2, \dots, n-f)$  that is a subvector of the indegrees vector  $\vec{G}$ . As a consequence, the states  $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$  with index  $i(\vec{G}) \geq 1$  belong to a basin with an attractor of length 1, whose generator state has a source and no sink. The maximal index of the states in the system is found: it is equal to 0 for

---

ZHARKOVA, A.V., INDICES OF STATES IN FINITE DYNAMIC SYSTEMS OF COMPLETE  
GRAPHS ORIENTATIONS.

© 2023 ЖАРКОВА А.В.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

$1 \leq n \leq 3$  and it is equal to  $n - 3$  for  $n \geq 4$ . The corresponding tables with indices of states are given for the finite dynamic systems of orientations of complete graphs with the number of vertices from one to eight inclusive.

**Keywords:** attractor, complete graph, cybersecurity, evolutionary function, fault-tolerance, finite dynamic system, graph, graph orientation, index.

## 1 Введение

Графовые модели занимают важное место в задачах, связанных с информационной безопасностью. В вопросах кибербезопасности с помощью графовых моделей можно, например, выявлять связи между компонентами системы, группировать их, оценивать их поведение, выявлять различные аномалии. В задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей, отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг.

При изучении модельных графов можно применять идеи и методы теории конечных динамических систем. В работе [1] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов. В исследовании [2] рассматривается структурный метод моделирования логико-динамических систем управления, в основе которого лежит естественное разбиение систем на ряд структурных состояний. В работе [3] рассматриваются и анализируются алгоритмы построения цепно-рекуррентных структур на графах, элементы которых являются аппроксимацией динамической системы — символическим образом. В статье [4] представлена эволюционирующая графовая свёрточная сеть, которая улавливает динамизм, лежащий в основе последовательности графов, с помощью рекуррентной модели для развития параметров графовой свёрточной сети.

В настоящей работе полные графы изучаются с точки зрения динамического подхода к кибербезопасности и отказоустойчивости графовых систем. В данной работе предлагается алгоритм вычисления индексов состояний в конечных динамических системах ориентаций полных графов, находится максимальный из индексов состояний системы. Предварительные результаты частично были анонсированы на научной конференции [5], данная статья является полной и завершающей эти исследования.

## 2 Основные определения и постановка задачи

Основные понятия теории дискретных систем, в частности графов, используются согласно [6].

Под *конечной динамической системой* понимается пара  $(S, \delta)$ , где  $S$  — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*,  $\delta : S \rightarrow S$  — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой функциональный орграф с множеством вершин  $S$  и дугами, проведёнными из каждой вершины  $s \in S$  в вершину  $\delta(s)$ . Компоненты связности орграфа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контур, в свою очередь, называется *предельными циклами*, или *аттракторами*. Под *длиной* аттрактора будет понимать количество различных состояний в соответствующем контуре. Состояние, принадлежащее аттрактору, называется *циклическим*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров системы без построения карты и проведения динамических исследований на её основе. К числу таких характеристик относятся *индекс* состояния (его расстояние до аттрактора того бассейна, которому оно принадлежит), а также максимальный из индексов состояний системы.

Автором предложены алгоритмы вычисления индексов состояний в конечных динамических системах ориентаций некоторых типов графов (см., например, [7]). В данной работе предлагается алгоритм вычисления индексов состояний в конечных динамических системах ориентаций полных графов, находится максимальный из индексов состояний системы.

### 3 Описание конечной динамической системы $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$

Пусть дан полный граф  $G = K_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $m = \frac{n(n-1)}{2}$ , где  $m$  — число рёбер. Пометим его вершины и придадим его рёбрам произвольную ориентацию, тем самым получив направленный граф  $\vec{G} = (V, \beta)$ , где отношение смежности  $\beta$  антирефлексивно и антисимметрично. Применим к полученному орграфу эволюционную функцию  $\alpha$ , которая у данного орграфа одновременно переориентирует все дуги, входящие в стоки, а остальные дуги оставляет без изменения, в результате чего получаем орграф  $\alpha(\vec{G})$ . Если проделать указанные действия со всеми возможными ориентациями данного графа, то получим карту конечной динамической системы, состоящую из одного или нескольких бассейнов.

Таким образом, будем рассматривать конечную динамическую систему  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$ , где через  $\Gamma_{K_n}$  обозначим множество всех возможных ориентаций данного полного графа  $K_n$ ,  $|\Gamma_{K_n}| = 2^m$ , а эволюционная функция  $\alpha$  задаётся следующим образом: если дан некоторый орграф

$\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ , то его динамическим образом  $\alpha(\vec{G})$  является орграф, полученный из  $\vec{G}$  одновременной переориентацией всех дуг, входящих в стоки, других отличий между  $\vec{G}$  и  $\alpha(\vec{G})$  нет.

На рис. 1 изображён граф  $K_3$  и карта конечной динамической системы  $(\Gamma_{K_3}, \alpha)$ .

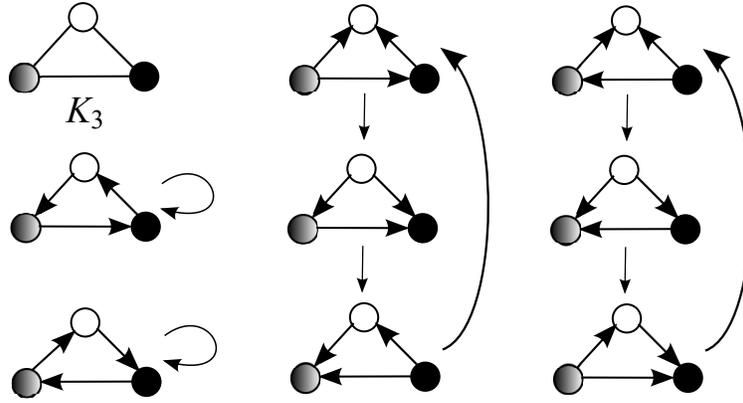


Рис. 1. Граф  $K_3$  и карта конечной динамической системы  $(\Gamma_{K_3}, \alpha)$

**Определение 1.** Под вектором степеней захода орграфа будем понимать вектор, компонентами которого являются расположенные в убывающем порядке степени захода всех его вершин.

Например, на рис. 1 расположенный посередине сверху орграф имеет вектор степеней захода  $(2, 1, 0)$ .

#### 4 Индексы состояний в конечной динамической системе $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$

**Теорема 1.** [8] В конечной динамической системе  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$ , состояние  $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$  принадлежит аттрактору (является циклическим) тогда и только тогда, когда орграф  $\vec{G}$

- 1) не имеет стока
- или
- 2) имеет вектор степеней захода  $(n - 1, n - 2, \dots, 0)$ .

**Теорема 2.** В конечной динамической системе  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$ , индекс состояния  $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$  равен 0, если орграф  $\vec{G}$  не имеет стока или имеет вектор степеней захода  $(n - 1, n - 2, \dots, 0)$ , иначе равен  $f$ ,  $f \geq 1$ , где  $f$  — мощность наибольшего множества  $(n - 1, n - 2, \dots, n - f)$ , являющегося подвектором вектора степеней захода  $\vec{G}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим состояния конечной динамической системы  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$ .

1) Пусть оргграф  $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$  не имеет стока или имеет вектор степеней захода  $(n-1, n-2, \dots, 0)$ .

Согласно теореме 1 данное состояние принадлежит аттрактору, то есть его индекс равен 0:  $i(\vec{G}) = 0$ .

2) Пусть оргграф  $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$  имеет сток  $v_s$ ,  $d^-(v_s) = n-1$ , и его вектор степеней захода отличен от  $(n-1, n-2, \dots, 0)$ . Очевидно, что в оргграфе  $\vec{G}$  не может быть ещё одного стока, отличного от  $v_s$ .

Согласно теореме 1  $i(\vec{G}) \geq 1$ . Применим эволюционную функцию  $\alpha$  к оргграфу  $\vec{G}$ , при этом одновременно переориентируются все дуги, входящие в вершину  $v_s$ , остальные дуги останутся в прежней ориентации, то есть получаем состояние  $\alpha(\vec{G})$ , у которого  $d^-(v_s) = 0$ , а степень захода остальных вершин увеличилась на 1.

а) Пусть в состоянии  $\vec{G}$  нет вершины  $v_t$ , у которой  $d^-(v_t) = n-2$ .

Тогда в состоянии  $\alpha(\vec{G})$  нет стока, согласно теореме 1 оно принадлежит аттрактору, то есть  $i(\vec{G}) = 1$ .

Заметим, что в данном случае получаем искомое наибольшее множество с одним элементом  $(n-1)$ , являющееся подвектором вектора степеней захода  $\vec{G}$ ,  $f = 1$ .

б) Пусть в состоянии  $\vec{G}$  есть вершина  $v_t$ , у которой  $d^-(v_t) = n-2$ .

В состоянии  $\alpha(\vec{G})$  данная вершина  $v_t$  является стоком:  $d^-(v_t) = n-2+1 = n-1$ , и при применении вновь эволюционной функции  $\alpha$  получаем новое следующее состояние.

Так как у оргграфа  $\vec{G}$  вектор степеней захода отличен от  $(n-1, n-2, \dots, 0)$ , обозначим две его подходящие вершины через  $v_u$  и  $v_w$ , для первых из которых по вектору степеней захода, если просматривать его слева направо, выполняется  $d^-(v_u) - d^-(v_w) \geq 2$ . Пусть  $d^-(v_u) = n-f$ ,  $d^-(v_w) = n-f-k$ , где  $f, k \geq 2$ .

Применим к состоянию  $\vec{G}$  эволюционную функцию  $\alpha$   $f$  раз, получим, что у состояния  $\alpha^f(\vec{G})$   $d^-(v_u) = n-f+f = (n) \bmod n = 0$ ,  $d^-(v_w) = n-f-k+f = n-k$ . Так как были выбраны две вершины с наибольшими подходящими степенями заходов и  $k \geq 2$ , то получили, что у состояния  $\alpha^f(\vec{G})$  нет стока, согласно теореме 1 оно принадлежит аттрактору, то есть  $i(\vec{G}) = f$ .

Заметим, что в данном случае получаем искомое наибольшее множество с  $f$  элементами  $(n-1, n-2, \dots, n-f)$ , являющееся подвектором вектора степеней захода  $\vec{G}$ ,  $f \geq 2$ .  $\square$

**Следствие 1.** В конечной динамической системе  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$ , состояния  $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$  с индексом  $i(\vec{G}) \geq 1$  принадлежат бассейну с аттрактором длины 1, у образующего состояния которого есть источник и нет стока.

*Доказательство.* Утверждение следует из доказательства теоремы 2, где показывается, что каждое состояние  $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$  с индексом  $i(\vec{G}) \geq 1$  при эволюции приходит в состояние, у которого есть источник и нет стока, образующее аттрактор единичной длины согласно заданной эволюционной функции  $\alpha$ .  $\square$

**Алгоритм вычисления индекса состояния системы**  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$

Индекс  $i(\vec{G})$  состояния  $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$  системы  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$ , вычисляется по следующему алгоритму.

- 1 Если  $n = 1$ , то  $i(\vec{G}) := 0$ , конец алгоритма.
- 2 Для состояния  $\vec{G}$  построить его вектор степеней захода.
- 3 Если  $n - 1$  не является компонентой вектора степеней захода  $\vec{G}$ , то  $i(\vec{G}) := 0$ , конец алгоритма.
- 4 Если вектор степеней захода  $\vec{G}$  равен  $(n-1, n-2, \dots, 0)$ , то  $i(\vec{G}) := 0$ , конец алгоритма.
- 5 Построить наибольшее множество  $(n-1, n-2, \dots, n-f)$ , являющееся подвектором вектора степеней захода  $\vec{G}$ .
- 6  $i(\vec{G}) := f$ , конец алгоритма.

Сложность алгоритма будет зависеть от выбранного алгоритма сортировки для построения вектора степеней захода орграфа, при использовании быстрой сортировки она будет равна  $O(n \log n)$ .

Например, вычислим индекс расположенного посередине сверху орграфа  $\vec{G}$  на рис. 1 системы  $(\Gamma_{K_3}, \alpha)$ . Согласно шагу 2 алгоритма строим его вектор степеней захода:  $(2, 1, 0)$ . Согласно шагу 3 алгоритма  $n - 1 = 3 - 1 = 2$  является компонентой вектора степеней захода  $\vec{G}$ . Согласно шагу 4 алгоритма вектор степеней захода  $\vec{G}$  равен  $(n - 1, n - 2, \dots, 0)$ , значит,  $i(\vec{G}) := 0$ , конец алгоритма.

**Теорема 3.** Предложенный алгоритм вычисления индекса состояния конечной динамической системы  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$ , корректен.

*Доказательство.* Утверждение следует из теоремы 2, при этом шаги 1) и 3) алгоритма описывают ситуацию, когда орграф  $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$  не имеет стока.  $\square$

Одним из параметров конечной динамической системы является наибольший из индексов её состояний.

**Теорема 4.** В конечной динамической системе  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$ , максимальный из индексов состояний равен 0 при  $1 \leq n \leq 3$  и  $n - 3$  при  $n \geq 4$ .

*Доказательство.* Рассмотрим состояния конечной динамической системы  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$ .

- 1) Пусть  $1 \leq n \leq 3$ .

Система состоит из состояний, принадлежащих аттракторам, индекс всех состояний равен 0, таким образом, максимальный из индексов состояний системы также равен 0.

2) Пусть  $n \geq 4$ .

Согласно теореме 2 максимальное значение будет получаться при построении наибольшего множества  $(n-1, n-2, \dots, n-f)$ , являющегося подвектором наибольшего возможного вектора степеней захода среди состояний системы.

Построим ориентацию полного графа  $G$  с наибольшим вектором степеней захода, отличного от  $(n-1, n-2, \dots, 0)$ . Зададим вектор с максимально возможными степенями захода всех вершин:  $d_{max}^- = (n-1, n-1, \dots, n-1)$ . При построении будем нумеровать вершины по мере задания ориентации рёбрам, инцидентным им.

Начинаем с вершины  $v_0$ , степень захода которой равна  $n-1$ :  $d^-(v_0) = n-1$ , то есть она является стоком, все инцидентные ей рёбра ориентируем в неё. Степень захода вершины  $v_0$  определена, из всех остальных вершин исходит по 1 дуге, поэтому максимально возможная степень остальных вершин уменьшается на 1:  $d_{max}^- = (n-1, n-2, \dots, n-2)$ .

Верём следующую вершину  $v_1$ , степень захода которой равна  $n-2$ :  $d^-(v_1) = n-2$ , то есть из неё выходит единственная дуга в сток  $v_0$ , все остальные инцидентные ей рёбра ориентируем в неё. Степень захода вершин  $v_0$  и  $v_1$  определена, из всех остальных вершин исходит по 2 дуги, поэтому максимально возможная степень остальных вершин вновь уменьшается на 1:  $d_{max}^- = (n-1, n-2, n-3, \dots, n-3)$ .

Продолжая аналогично, доходим до 3 последних необработанных вершин  $v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}$ . Все дуги, инцидентные им и уже обработанным вершинам, исходят из них. У каждой вершины без ориентации находятся 2 ребра, инцидентные ей и ещё не обработанным вершинам.  $d_{max}^- = (n-1, n-2, \dots, 3, 2, 2, 2)$ . Если какая-либо из этих вершин будет иметь степень захода 2 или 0 (например, будут дуги  $(v_{n-2}, v_{n-3}), (v_{n-1}, v_{n-3}), (v_{n-1}, v_{n-2})$ ), то вектор степеней захода станет равен  $(n-1, n-2, \dots, 0)$ , что не может быть по условию. Таким образом, степень захода каждой из этих 3 вершин должна быть равна 1 (например, будут дуги  $(v_{n-3}, v_{n-2}), (v_{n-2}, v_{n-1}), (v_{n-1}, v_{n-3})$ ).

Получаем наибольший возможный вектор степеней захода  $(n-1, n-2, \dots, 3, 1, 1, 1)$ , согласно теореме 2  $n-f=3$  и индекс данного состояния равен  $n-3$ .  $\square$

В таблице 1 приведены данные по индексам состояний в конечных динамических системах  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$  для  $1 \leq n \leq 8$ , полученные с помощью вычислительных экспериментов.

Можно заметить, что в конечных динамических системах  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$  большинство состояний имеют индекс 0 (являются циклическими).

ТАБЛИЦА 1. Индексы состояний в конечных динамических системах  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $1 \leq n \leq 8$ 

$n \setminus$ Индекс	0	1	2	3	4	5
1	1	—	—	—	—	—
2	2	—	—	—	—	—
3	8	—	—	—	—	—
4	56	8	—	—	—	—
5	824	160	40	—	—	—
6	27344	4224	960	240	—	—
7	1872816	186368	29568	6720	1680	—
8	251698560	14942208	1490944	236544	53760	13440

## 5 Заключение

В работе предлагается алгоритм вычисления индексов состояний рассматриваемой конечной динамической системы  $(\Gamma_{K_n}, \alpha)$ ,  $n \geq 1$ , всех возможных ориентаций данного полного графа  $K_n$ , находится максимальный из индексов состояний системы, что является полезным для задач, связанных с информационной безопасностью, в том числе для построения отказоустойчивых графовых систем с непрерывным функционированием и восстановлением.

## References

- [1] V.C. Barbosa, *An atlas of edge-reversal dynamics*, Chapman&Hall/CRC, London, 2001.
- [2] A.A. Kadyrov, A.A. Kadyrova, *Structuring and graphic modeling of logical-dynamic control systems*, Vestn. BSTU named after V.G. Shukhov, **1** (2014), 185–188.
- [3] V.A. Lukianenko, M.S. Germanchuk, *Graph structures in the construction of symbolic images of dynamical systems*, Materials of the III International scientific conference “Autumn mathematical readings in Adygea”, (2019), 90–94.
- [4] A. Pareja, G. Domeniconi, J. Chen, T. Ma, T. Suzumura, H. Kanezashi, T. Kaler, T.B. Schardl, C.E. Leiserson, *EvolveGCN: evolving graph convolutional networks for dynamic graphs*, Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence, **34**:04 (2020), 5363–5370.
- [5] A.V. Zharkova, *On indices of states in finite dynamic systems of complete graphs orientations*, Prikladnaia diskretnaia matematika. Prilozhenie, **12** (2019), 176–179.
- [6] A.M. Bogomolov, V.N. Salii, *Algebraic foundations of the theory of discrete systems*, Nauka. Fizmatlit, Moscow, 1997.
- [7] A.V. Vlasova, *Indices in dynamical system  $(B, \delta)$  of binary vectors*, Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, **3**:1 (2011), 116–122.
- [8] A.V. Zharkova, *Attractors and cyclic states in finite dynamic systems of complete graphs orientations*, Prikladnaia diskretnaia matematika, **59** (2023), 80–87.

ANASTASIIA VLADIMIROVNA ZHARKOVA  
SARATOV STATE UNIVERSITY,  
ASTRAKHANSKAYA STREET, 83,  
410012, SARATOV, RUSSIA  
*Email address:* [ZharkovaAV3@gmail.com](mailto:ZharkovaAV3@gmail.com)