S©MR ISSN

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

УДК 512.554
???? MSC 17A70

ПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ НОВИКОВА — ПУАССОНА

А.С. Захаров

Abstract. We proved if A is a simple Novikov — Poisson (super)algebra then their Novikov part is a simple algebra when field characteristic is not 2. Also we obtained all finite dimension simple Novikov — Poisson algebras over a field of characteristic not 2.

Keywords: Novikov (super)algebra, Novikov — Poisson (super)algebra, differential algebra, commutative algebra, simple algebra.

1. Введение

Алгебры Новикова были введены в работе И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман [1] как условие гамильтоновости определенных операторов в формальном вариационном исчислении. В работе А. А. Балинского и С. П. Новикова [2] эти алгебры рассматривались для изучения скобок Пуассона гидродинамического типа. Алгебра $\langle A, \circ\rangle$ называется алгеброй Новикова, если выполнены тождества

$$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b;$$
$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = (b \circ a) \circ c - b \circ (a \circ c)$$

для всех элементов $a, b, c \in A$.

Простые алгебры Новикова над полем характеристики ноль были описаны Е. И. Зельмановым [3]. Оказалось, что эти алгебры являются полями. Примеры простых бесконечномерных алгебр над полем нулевой характеристики и простых алгебр над полем положительной характеристики были получены В. Т. Филипповым [4].

Изучению простых алгебр над полем положительной характеристики посвящены работы Дж. М. Осборна [5, 6, 7]. На их основе С. Су [8] описал простые

Zakharov, A.S., Simple Novikov — Poisson algebras.

© 2023 Захаров А.С.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект 21-11-00286).

Поступила ?? августа 2023 г., опубликована ?? ??? 2023 г.

конечномерные алгебры Новикова над алгебраически замкнутым полем характеристики больше двух.

Пример 1 (Су). *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$ и A — простая конечномерная алгебра Новикова. Тогда A имеет базис из элементов x_i, где $i = -1, \dots, p^n - 2$, и умножение задается формулой*

$$x_i \circ x_j = \binom{i+j+1}{j} x_{i+j} + \delta_{i,-1}\delta_{j,-1}\alpha x_{p^n-2} + \delta_{i,-1}\delta_{j,0}\beta x_{p^n-2}$$

для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Для изучения тензорной теории алгебр Новикова С. Су ввел понятие алгебр Новикова — Пуассона [9]. Алгебра $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ называется алгеброй Новикова — Пуассона, если $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра, $\langle A, \circ \rangle$ — алгебра Новикова, и выполнены тождества

$$a(b \circ c) = ab \circ c;$$
$$ab \circ c - a \circ bc = cb \circ a - c \circ ba.$$

Как оказалось, полученные ранее примеры можно строить с помощью следующей конструкции.

Пример 2. *Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — простая ассоциативная коммутативная алгебра и d — некоторое дифференцирование, то есть такое линейное отображение, что для любых $a, b \in A$*

$$d(ab) = d(a)b + ad(b).$$

Тогда определим новое умножение следующим образом:

(1) $$a \circ b = ad(b) + \lambda ab$$

для произвольного элемента $\lambda \in A \cup \mathbb{F}$. Тогда $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра Новикова — Пуассона, которую мы будем называть алгеброй Новикова — Пуассона векторного типа.

Для алгебр, полученных С. Су можно взять ассоциативное коммутативное умножение

(2) $$x_i * x_j = \binom{i+j+2}{i+1} x_{i+j+1}$$

и дифференцирование

(3) $$d(x_i) = x_{i-1} + b\delta_{i,0}x_{p^n-2}.$$

Относительно этих операций и формулы (1) (при $\lambda = ax_{p^n-2}$) мы получим алгебру Новикова, которая совпадает с алгеброй из примера 1.

В. Т. Филиппов [4] и С. Су [9] построили серии простых алгебр, которые описываются следующей конструкцией.

Пример 3. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле и G — аддитивная подгруппа $\langle \mathbb{F}, + \rangle$, $q \in G$ — произвольный элемент, $J = \{0\}$ или $J = \mathbb{N}$. Рассмотрим векторное пространство с базисом $\{x_{a,i} \mid a \in G, i \in J\}$. Определим произведение следующим образом:*

$$x_{a,i}x_{b,j} = x_{a+b+q,i+j}.$$

Определим отображение d формулой

$$d(x_{a,i}) = (a+q)x_{a,i} + ix_{a,i-1}.$$

Тогда d — дифференцирование. Соответствующая алгебра Новикова — Пуассона, заданная формулой (1) *для некоторого λ, будет простой, если $|G| > 2$, или $q = 0$, или $\lambda \neq q$.*

Алгебры, полученные в примере 2, с унитальной ассоциативной коммутативной частью изучались В. Н. Желябиным и А. С Тиховым [10]. В частности, там доказано, что для алгебр над полем характеристики не 2 простоту новиковской части можно свести к дифференциальной простоте ассоциативной коммутативной части. Также показано, что в случае характеристики 2 есть контрпримеры.

2. Простые алгебры Новикова — Пуассона

Алгебра A называется простой, если у нее нет собственных ненулевых идеалов и $A^2 \neq 0$. Это понятие естественным образом обобщается на произвольные алгебраические системы в универсальной алгебре. Для дифференциальных алгебр и алгебр с двумя и более умножениями это означает отсутствие собственных ненулевых инвариантных относительно дифференцирований идеалов и идеалов относительно сразу нескольких умножений соответственно. Также дополнительно потребуем, чтобы квадрат алгебры хотя бы относительно одного из умножений был ненулевым.

Перейдем к рассмотрению алгебр Новикова —Пуассона. Здесь и далее по тексту будем использовать обозначение $A^2 = A \cdot A$.

Очевидно, что если $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра Новикова — Пуассона и хотя бы одна из алгебр$\langle A, \cdot \rangle$ или $\langle A, \circ \rangle$ проста, то $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ простая алгебра Новикова — Пуассона. Если одна из частей тривиальна, то есть $A^2 = 0$ или $A \circ A = 0$, то алгебра Новикова — Пуассона проста тогда и только тогда, когда проста вторая часть.

Теперь пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ простая алгебра Новикова — Пуассона. В работе [11] было показано, что $\partial_{xy}(a) = xa \circ y - x \circ ay$ является дифференцированием $\langle A, \cdot \rangle$. Для множества таких дифференцирований введем обозначение

$$\Delta = \{\partial_{xy} \mid x, y \in A\}.$$

Лемма 1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — простая алгебра Новикова — Пуассона, и пусть $A^2 = A$. Тогда $\langle A, \cdot \rangle$ — Δ–простая.*

Доказательство. Пусть I — Δ–инвариантный идеал. Рассмотрим $K = AI$. Тогда

$$AK = A \cdot AI \subseteq AI = K,$$
$$K \circ A = IA \circ A = I(A \circ A) \subseteq IA = K,$$
$$A \circ K = A^2 \circ IA \subseteq AD(I) + I(A \circ A) \subseteq K.$$

Таким образом K является идеалом $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ и либо $K = 0$, либо $K = A$. Если $K = A$, то

$$A = K = IA \subseteq I$$

и $I = A$.

Если $K = 0$, то есть $IA = 0$, то получаем

$$A \circ I = A(A^2 \circ I) \subseteq A(A \circ AI + I \circ AA + IA \circ A) = 0,$$
$$I \circ A = I \circ A^2 \subseteq IA \circ A + A \circ AI + AA \circ I = 0.$$

Таким образом I — идеал $\langle A, \cdot, \circ\rangle$, а значит, либо $I = 0$, либо $I = A$. То есть $\langle A, \cdot\rangle$ — Δ–простая.

□

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики не 2, $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — простая алгебра Новикова — Пуассона и $A^2 = A$. Тогда $\langle A, \circ\rangle$ — простая или $A \circ A = 0$.*

Доказательство. Пусть $A \circ A \neq 0$. Легко заметить, что $A \circ A$ — идеал $\langle A, \cdot, \circ\rangle$. Тогда $A \circ A = A$.

По лемме 1 и теореме 5 из работы [12] алгебра $\langle A, \cdot\rangle$ унитальна. А значит, $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — векторного типа и

$$a \circ b = a\partial(b) + \lambda ab,$$

где $\partial = \partial_{11}$ и $\lambda = 1 \circ 1$.

Нетрудно доказать, что алгебра $\langle A, \cdot\rangle$ будет ∂–простой. Действительно, пусть I — ∂–инвариантный идеал. Тогда $AI \subseteq I$ и $\partial(I) \subseteq I$.

$$A \circ I \subseteq A\partial(I) + AI \subseteq I;$$
$$I \circ A \subseteq I\partial(A) + IA \subseteq A.$$

Таким образом I — идеал $\langle A, \cdot, \circ\rangle$, то есть $I = 0$ или $I = A$. А значит, $\langle A, \cdot\rangle$ ∂–проста. В [10] доказано, что тогда $\langle A, \circ\rangle$ — простая алгебра. □

Заметим, что требование к характеристике поля существенно. Рассмотрим пример, который разбирался в работах [4, 10]. Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики два. Возьмем алгебру из примера 3 с условием

$$J = \{0\}, G = \{0, 1\}, q = \lambda = 1.$$

Получим алгебру A с базисом x_0, x_1 и таблицей умножения

$$x_0x_0 = x_1x_1 = x_1, \quad x_0x_1 = x_0, \quad x_0 \circ x_0 = x_1 \circ x_0 = 0, \quad x_0 \circ x_1 = x_0, \quad x_1 \circ x_1 = x_1.$$

Тогда $\mathbb{F}x_0$ — собственный идеал $\langle A, \circ\rangle$, в то время как $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — проста.

Следствие 1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — конечномерная простая алгебра Новикова — Пуассона над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики 0. Тогда $\langle A, \cdot\rangle$ — поле $\mathbb{F}$, а также $a \circ b = \lambda ab$.*

Доказательство. По теореме 1 алгебра $\langle A, \cdot\rangle$ является ∂–простой. Конечномерная дифференциально простая алгебра характеристики 0 является полем (см. [13]). Тогда $\partial = 0$ и $a \circ b = \lambda ab$. □

Следствие 2. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — конечномерная простая алгебра Новикова — Пуассона над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики $p > 2$. Тогда $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — алгебра из примера 1, а ассоциативное коммутативное умножение задано формулой*

$$a \cdot b = \xi * a * b,$$

где $\xi \in A$ и умножение $*$ задано формулой (2).

Доказательство. Напрямую следует из теоремы 1 и работы [9]. □

3. Супералгебры

Здесь и далее по тексту считаем, что $\mathbb{F}$ — поле характеристики не 2. Супералгебра A — это алгебра такая, что $A = A_0 \oplus A_1$ и $A_i A_j \subseteq A_{i+j (\mathrm{mod}\, 2)}$. Элементы множеств $A_0 \cup A_1, A_0, A_1$ называются однородными, четными, нечетными соответственно. Для однородного элемента a будем использовать обозначение

$$|a| = \begin{cases} 0, & a \in A_0, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}.$$

Алгебра Грассмана — это ассоциативная алгебра G с порождающими элементами $e_i, i \in \mathbb{N}$, определяемая соотношениями $e_i e_j = -e_j e_i$. Тогда элементы $e_{i_1} \dots e_{i_k}$, $i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k$, образуют базис. Тогда подпространства G_0 и G_1, порожденные элементами четной и нечетной длины соответственно, задают градуировку. Грассманова оболочка супералгебры A — это

$$A_0 \otimes G_0 \oplus A_1 \otimes G_1.$$

Пусть Ω — многообразие алгебр. Скажем, что A — Ω–супералгебра, если её грассманова оболочка $G(A)$ — Ω–алгебра. Например, для коммутативных супералгебр, это означает выполнения тождества

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba$$

для однородных элементов.

Для супералгебр Новикова $\langle A, \circ \rangle$ получаем следующие тождества для однородных элементов:

$$(a \circ b) \circ c = (-1)^{|b||c|} (a \circ c) \circ b; \tag{4}$$

$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = (-1)^{|a||b|} \big((b \circ a) \circ c - b \circ (a \circ c) \big). \tag{5}$$

Для супералгебр Новикова — Пуассона $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ дополнительно

$$a(b \circ c) = ab \circ c; \tag{6}$$

$$ab \circ c - a \circ bc = (-1)^{|a||c| + |b||c| + |a||b|} (cb \circ a - c \circ ba). \tag{7}$$

Простота для супералгебр определяется также как и для алгебр, только идеалы заменяются на $\mathbb{Z}_2$–градуированные идеалы.

Предложение 1. *Пусть $A^2 = A$. Тогда $A_0^2 = A_0$.*

Доказательство. Заметим, что

$$A_0 = (A^2)_0 = A_0^2 + A_1^2, \quad A_1 = (A^2)_1 = A_0 A_1.$$

Тогда

$$A_0^2 \subseteq A_0 = (A^2)_0 = A_0^2 + A_1^2 = A_0^2 + A_0 A_1^2 \subseteq A_0^2.$$

Предложение доказано. □

Скажем, что D — четное дифференцирование супералгебры A, если для однородных элементов имеет место

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

Пусть A — супералгебра Новикова — Пуассона. Определим для четных элементов x, y отображение $\partial_{xy}(a) = xa \circ y - x \circ ay$.

Лемма 2. ∂_{xy} — *четное дифференцирование.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$. Тогда имеем

$$\partial_{xy}(ab) = xab \circ y - x \circ aby = xab \circ y - (-1)^{|a||b|} x \circ bay =$$
$$xab \circ y - (-1)^{|a||b|} xb \circ ay + a(yb \circ x - y \circ bx) =$$
$$(xa \circ y - x \circ ay)b + a(xb \circ y - x \circ by) = \partial(a)b + a\partial(b).$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — супералгебра Новикова — Пуассона. Если I_0 — идеал алгебры $\langle A_0, \cdot, \circ \rangle$, то $K = I_0 + A_1 I_0 + A_1 \circ I_0 + I_0 \circ A_1$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированный идеал супералгебры $\langle A, \cdot, \circ \rangle$.*

Доказательство. Заметим, что четная часть K — это $K_0 = I_0$, а нечетная — $K_1 = A_1 I_0 + A_1 \circ I_0 + I_0 \circ A_1$. По предположению

$$A_0 I_0, A_0 \circ I_0, I_0 \circ A_0 \subseteq I_0 \subseteq K \text{ и } A_1 I_0, I_0 \circ A_1, A_1 \circ I_0 \subseteq K.$$

Теперь рассмотрим компоненты нечетной части. Для $A_1 I_0$ имеем

$$(A_0 + A_1)(A_1 I_0) \subseteq (A_0 A_1 + A_1 A_1) I_0 \subseteq (A_1 + A_0) I_0 \subseteq K,$$
$$A_1 I_0 \circ (A_0 + A_1) \subseteq I_0(A_1 \circ (A_0 + A_1)) \subseteq I_0(A_1 + A_0) \subseteq K,$$
$$A_0 \circ (A_1 I_0) \subseteq A_0 A_1 \circ I_0 + I_0 A_1 \circ A_0 + I_0 \circ A_0 A_1 \subseteq A_1 \circ I_0 + I_0 A_1 + I_0 \circ A_1 \subseteq K,$$
$$A_1 \circ A_1 I_0 \subseteq A_1 A_1 \circ I_0 + A_1 I_0 \circ A_1 + I_0 \circ A_1 A_1 \subseteq A_0 \circ I_0 + I_0 A_0 + I_0 \circ A_0 \subseteq K.$$

Для $A_1 \circ I_0$:

$$(A_0 + A_1) A_1 \circ I_0 \subseteq (A_1 + A_0) \circ I_0 \subseteq K,$$
$$(A_1 \circ I_0) \circ (A_0 + A_1) \subseteq (A_1 \circ (A_0 + A_1)) \circ I_0 \subseteq K,$$
$$A_0 \circ (A_1 \circ I_0) \subseteq (A_0 \circ A_1) \circ I_0 + (A_1 \circ A_0) \circ I_0 - A_1 \circ (A_0 \circ I_0) \subseteq A_1 \circ I_0 \subseteq K,$$
$$A_1 \circ (A_1 \circ I_0) = A_0 A_1 \circ (A_1 \circ I_0) \subseteq$$
$$\subseteq A_0 \circ (A_1 A_1 \circ I_0) + (A_1 \circ I_0) \circ A_0 A_1 + (A_1 A_1 \circ I_0) \circ A_0 \subseteq$$
$$\subseteq A_0 \circ (A_0 \circ I_0) + (A_1 \circ A_1) \circ I_0 + (A_0 \circ I_0) \circ A_0 \subseteq I_0 \subseteq K.$$

И наконец, для $I_0 \circ A_1$:

$$(A_0 + A_1)(I_0 \circ A_1) \subseteq I_0 \circ A_1 + I_0 A_0 \subseteq K,$$
$$(I_0 \circ A_1) \circ A_0 \subseteq (I_0 \circ A_0) \subseteq A_1 \subseteq I_0 \circ A_1 \subseteq K,$$
$$(I_0 \circ A_1) \circ A_1 = (I_0 \circ A_0 A_1) \circ A_1 \subseteq$$
$$\subseteq (I_0 A_0 \circ A_1) \circ A_1 + (A_1 A_0 \circ I_0) \circ A_1 + (A_1 \circ I_0 A_0) \circ A_1 \subseteq$$
$$\subseteq I_0 A_0 + (A_1 \circ I_0) \circ A_1 \subseteq K,$$
$$A_0 \circ (I_0 \circ A_1) \subseteq (A_0 \circ I_0) \circ A_1 + (I_0 \circ A_0) \circ A_1 + I_0 \circ (A_0 \circ A_1) = I_0 \circ A_1 \subseteq K,$$
$$A_1 \circ (I_0 \circ A_1) = A_0 A_1 \circ (I_0 \circ A_1) \subseteq$$
$$\subseteq A_0 \circ (A_1 I_0 \circ A_1) + (I_0 \circ A_1) A_0 \circ A_1 + (I_0 \circ A_1) \circ A_0 A_1 \subseteq$$
$$\subseteq A_0 \circ I_0 A_0 + I_0(A_1 \circ A_1) + (I_0 \circ A_1) \circ A_1 \subseteq K.$$

Таким образом, K — градуированный идеал $\langle A, \cdot, \circ \rangle$. □

Следствие 3. *Пусть A — простая супералгебра Новикова — Пуассона. Тогда A_0 — простая алгебра Новикова — Пуассона.*

Заметим, что в обратную сторону это не верно. Действительно, достаточно взять алгебру с базисом четной части x, нечетной y, умножения совпадают и заданы следующим образом:

$$x^2 = x, \quad xy = y, \quad y^2 = 0.$$

Тогда четная часть проста, так как одномерна, но нечетная часть является градуированным идеалом.

Теорема 2. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — простая супералгебра Новикова — Пуассона и $A^2 = A$. Тогда $\langle A, \circ \rangle$ — простая супералгебра Новикова.*

Доказательство. По следствию 3 получаем, что $\langle A_0, \cdot, \circ \rangle$ так же проста. По теореме 1 получаем, что $\langle A_0, \cdot \rangle$ унитальна. Ввиду того, что $A_1 = A_0 A_1$ получаем, что и $\langle A, \cdot \rangle$ унитальна. Тогда $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ векторного типа и ∂–проста, где $\partial = \partial_{11}$. Повторяя рассуждения из [10] получим, что $\langle A, \circ \rangle$ — простая супералгебра Новикова. □

Следствие 4. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — простая супералгебра Новикова — Пуассона и $A^2 = A$. Тогда $A_1 = 0$, $A = A_0$ и $\langle A, \circ \rangle$ — простая алгебра Новикова.*

Доказательство. Данный результат следует напрямую из теоремы 2 и основного результата работы [14]. □

References

[1] I. M. Gel'fand, I. Ya. Dorfman, *Hamiltonian operators and algebraic structures related to them*, Functional Analysis and Its Applications , **13**:4 (1979), 248–262.

[2] A. A. Balinskii, S. P. Novikov, *Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **283**:5 (1985), 1036–1039.

[3] E. I. Zelmanov, *A class of local translation-invariant Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **292**:6: (1987), 1294–1297.

[4] V. T. Filippov, *A class of simple nonassociative algebras*, Mat. Zametki, **45**:1 (1989), 101–105.

[5] J. M. Osborn, *Modules for Novikov algebras*, Contemp. Math., **184** (1991), 327–338.

[6] J. M. Osborn, *Novikov algebras*, Nova J. Algebra Geom., **1**:1 (1992), 1–13.

[7] J. M. Osborn, *Simple Novikov algebra with an idempotent*, Commun. Algebra, **20**:9 (1992), 2729–2753.

[8] X. Xu, *On Simple Novikov Algebras and Their Irreducible Modules*, J. Algebra, **185** (1996), 905–934.

[9] Xu, X, *Novikov-Poisson algebra*, J. Algebra, **190**:2 (1997), 253–279.

[10] V. N. Zhelyabin, A. S. Tikhov, *Novikov–Poisson algebras and associative commutative derivation algebras*, Algebra Logika, **47**:2 (2008), 107–117.

[11] A. S. Zakharov, *Novikov-Poisson algebras and superalgebras of Jordan brackets*, Commun. Algebra , **42**:5 (2014), 2285-2298.

[12] E. C. Posner, *Differentiably simple rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **11**(1960), 337–343.

[13] R. E. Block, *Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal*, Annals of Mathematics, **90**:3 (1969), 433–459.

[14] Dong Liu, Yufeng Pei, Li-meng Xia, *On finite dimensional simple Novikov superalgebras*, Communications in Algebra, **47**:3 (2019), 999–1004

Anton Stanislavovich Zakharov
Novosibirsk State Technical University,
20, K. Marksa pr.,
Novosibirsk, 630073, Russia
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS
4, Acad. Koptyug pr.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: antzakh@gmail.com