S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 17, стр. 318–337 (2020)* 512.556
DOI 10.33048/semi.2020.17.021 06B05, 16S60, 54H99

# ИЗОМОРФИЗМЫ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С MAX-СЛОЖЕНИЕМ И ИЗОМОРФИЗМЫ РЕШЕТОК ИХ ПОДАЛГЕБР

В.В. СИДОРОВ

Abstract. Let $\mathbb{R}_+^\vee$ be the semifield with zero of nonnegative real numbers with operations of max-addition and multiplication and $C^\vee(X)$ be the semiring of continuous $\mathbb{R}_+^\vee$-valued functions on an arbitrary topological space $X$ with pointwise operation max-addition and multiplication. We call a subset $A \subseteq C^\vee(X)$ a subalgebra of the semiring $C^\vee(X)$ if $f \vee g$, $fg$, $rf \in A$ for any $f, g \in A$ and $r \in \mathbb{R}_+^\vee$. For arbitrary topological spaces $X$ and $Y$, we describe isomorphisms of the lattices of subalgebras (subalgebras with unity) of the semirings $C^\vee(X)$ and $C^\vee(Y)$.

**Keywords:** semirings of continuous functions, subalgebra, isomorphism, lattice of subalgebras, Hewitt space, max-addition.

## 1. Введение

Настоящая работа продолжает работу [1]. Для замкнутости изложения напомним идейные предпосылки исследования, а также необходимые понятия и результаты в удобной для нас форме.

1.1. **Исходные понятия.** *Полукольцом* называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$, где $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Нейтральные элементы по сложению и умножению (если они существуют) называются *нулем* и *единицей* и обозначаются через 0 и 1. При наличии нуля дополнительно требуется, чтобы $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ для всех $a \in S$. Полукольцо $S$ с нулем и единицей,

Sidorov, V.V., Isomorphisms of semirings of continuous nonnegative functions with max-addition and isomorphisms of lattices of their subalgebras.



Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (проект №1.5879.2017/8.9).
*Поступила 10 ноября 2019 г., опубликована 5 марта 2020 г.*

отличное от кольца, называется *полуполем с нулем*, если $\langle S\backslash\{0\},\cdot\rangle$ — коммутативная группа. Легко показать, что если $S$ — полуполе с нулем и $a,b\in S\backslash\{0\}$, то $a+b, ab\neq 0$. Алгебраическая структура $\langle S\backslash\{0\},+,\cdot\rangle$ называется *полуполем*. Множества $\mathbb{R}_+$ неотрицательных действительных чисел и $\mathbb{P}$ положительных действительных чисел с операциями сложения и умножения являются полуполем с нулем и полуполем соответственно.

Для любых $a,b\in\mathbb{R}$ положим $a\vee b=\max\{a,b\}$ и $a\wedge b=\min\{a,b\}$. Если в полуполях $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{P}$ заменить обычное сложение на *max-сложение* $\vee$, то получим полуполе с нулем $\mathbb{R}_+^\vee$ и полуполе $\mathbb{P}^\vee$.

**Замечание 1.** Далее и до конца работы $S=\mathbb{R}_+^\vee$ или $S=\mathbb{P}^\vee$.

Обозначим через $C(X,S)$ *полукольцо непрерывных $S$-значных функций*, заданных на произвольном топологическом пространстве $X$, с поточечными операциями max-сложения и умножения функций. Положим $C^\vee(X)=C(X,\mathbb{R}_+^\vee)$ и $U^\vee(X)=C(X,\mathbb{P}^\vee)$. Отметим, что $U^\vee(X)$ — полуполе.

Кольцо $C(X)$ непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на $X$ является алгеброй над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Подалгеброй в $C(X)$ будет любое его непустое подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения функций и выдерживающее умножение на константы из $\mathbb{R}$. По аналогии непустое подмножество $A\subseteq C(X,S)$ назовем *подалгеброй*, если $f\vee g, fg, rf\in A$ для всех $f,g\in A$ и $r\in S$. Таким образом, мы будем употреблять термин «подалгебра» в более широком смысле, нежели кольцо, одновременно являющееся векторным пространством.

Обозначим через $\mathbb{A}(C(X,S))$ *решетку подалгебр полукольца* $C(X,S)$ по отношению включения $\subseteq$, а через через $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ — ее *подрешетку подалгебр с единицей* (строгое включение будем обозначать через $\subset$).

**Замечание 2.** Легко видеть, что точная нижняя грань произвольного непустого семейства подалгебр $\{A_i\}_{i\in I}$ равна их пересечению $\bigcap_{i\in I}A_i$, а точная верхняя грань состоит из конечных max-сумм функций вида $f_1\cdot\ldots\cdot f_n$, где $f_1,\ldots,f_n\in\bigcup_{i\in I}A_i$, $n\in\mathbb{N}$. Если $S=\mathbb{P}^\vee$, то пересечение $\bigcap_{i\in I}A_i$, возможно, пусто. Поэтому пустое множество $\varnothing$ договоримся считать подалгеброй полуполя $U^\vee(X)$. Очевидно, что подалгебра $\varnothing$ является нулем решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$.

Хаусдорфово пространство $X$ называется *тихоновским*, если для любого непустого замкнутого множества $F\subset X$ и любой точки $x\in X\backslash F$ найдется функция $f\in C(X)$ или, что равносильно, $f\in C(X,S)$ такая, что $f(F)=\{a\}$ и $f(x)=b$, где $a\neq b$. Идеал $M$ кольца $C(X)$ называется $\mathbb{R}$*-идеалом*, если факторкольцо $C(X)/M$ изоморфно полю $\mathbb{R}$ действительных чисел. Идеалы $M_x=\{f\in C(X)\colon f(x)=0\}$, $x\in X$, называются *фиксированными максимальными идеалами*. Тихоновское пространство $X$ называется *хьюиттовским*, если все $\mathbb{R}$-идеалы кольца $C(X)$ являются фиксированными максимальными идеалами. Известны следующие характеризации (см. [2]): топологическое пространство является тихоновским (хьюиттовским) тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно подпространству (замкнутому подпространству) тихоновской степени пространства $\mathbb{R}$. Хьюиттовскими пространствами будут, например, компакты, т. е. компактные хаусдорфовые пространства.

Хьюиттовские пространства играют важную роль в теории колец $C(X)$ и связанных с ними алгебраических систем непрерывных функций. Отметим

**Предложение 1** ([2, теоремы 3.9 и 8.7]). *Для произвольного топологического пространства $X$ существуют тихоновское пространство $\tau X$ и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$ такие, что канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит, и соответствующие им полукольца $C(X, S)$, $C(\tau X, S)$ и $C(\nu\tau X, S)$, а также решетки их подалгебр (подалгебр с единицей).*

1.2. **Мотивировка и основные результаты работы.** В теории колец $C(X)$ интересен вопрос о том, насколько топологическое пространство $X$ или отдельные его свойства определяются теми или иными алгебраическими свойствами кольца $C(X)$ и связанных с ним алгебраических систем $A(X)$. Сюда же относится задача определяемости топологических пространств. *Определяемость топологического пространства* $X$ в классе $K$ топологических пространств некоторой производной алгебраической структурой $A(X)$ означает, что для произвольного топологического пространства $Y \in K$ изоморфизм структур $A(X)$ и $A(Y)$ влечет гомеоморфизм пространств $X$ и $Y$.

Согласно знаменитой теореме Гельфанда–Колмогорова (см. [3]) произвольный компакт $X$ определяется кольцом $C(X)$. Эта теорема была впоследствии распространена на все действительно-компактные (теперь называемые хьюиттовскими) топологические пространства (см. [4, теорема 57]). Было замечено (см. [5, теорема 1]), что в теореме Хьюитта можно заменить кольцо $C(X)$ на решетку $\mathbb{A}(C(X))$ его подалгебр. Мы перенесли этот результат на случай решеток $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ полуколец $C(X, S$. Более точно, мы доказали, что произвольное хьюиттовское пространство $X$ определяется каждой из следующих решеток:

- $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ (2014 г., см. [6, теорема 2.15]);
- $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ (2015 г., см. [7, теорема 1]);
- $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ (2017 г., см. [8, теорема 2]);
- $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ (2019 г., см. [9, теорема 1]).

Отсюда и из предложения 1 получаем, что для произвольных топологических пространств $X$ и $Y$ изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C(X, S))$ и $\mathbb{A}(C(Y, S))$ или их подрешеток $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y, S))$ влечет изоморфизм полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$. Возникают следующие естественные вопросы.

**Вопрос 1.** Как устроены изоморфизмы полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$, которые индуцируют изоморфизмы решеток их подалгебр (подалгебр с единицей)?

**Вопрос 2.** Как устроены изоморфизмы решеток подалгебр (подалгебр с единицей) полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$? В частности, существуют ли изоморфизмы этих решеток, которые не индуцируются изоморфизмами самих полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$?

Ответы на вопросы 1 и 2 для $S = \mathbb{R}_+^\vee$ были получены (см. [6]) лишь в случае решеток всех подалгебр полуколец $C(X, S)$ и $C(Y, S)$, а случай решеток подалгебр с единицей до настоящего момента разобран не был. В недавней работе [1] нами даны ответы на вопросы 1 и 2 для $S = \mathbb{P}^\vee$. Главная цель настоящей работы — ответить на вопросы 1 и 2 в случае $S = \mathbb{R}_+^\vee$, сведя его к случаю $S = \mathbb{P}^\vee$. В частности, описать изоморфизмы решеток подалгебр с единицей полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$.

**Замечание 3.** В силу предложения 1 все рассматриваемые далее топологические пространства, не умаляя общности, будем считать хьюиттовскими.

## 2. Предварительные результаты

2.1. **Однопорожденные подалгебры.** Ключевую роль в работе играет техника однопорожденных подалгебр, суть которой заключается в том, что свойства подалгебр описываются в терминах решеточных свойств однопорожденных подалгебр, точной верхней гранью которых они являются.

Наименьшую подалгебру полукольца $C(X,S)$, которая содержит функцию $f$, назовем *однопорожденной* и обозначим через $\langle f\rangle$. Наименьшую подалгебру с единицей, которая содержит функцию $f$, обозначим через $[f]$. При работе в решетке $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ подалгебру $[f]$ также будем называть однопорожденной. Для записи функций подалгебр $\langle f\rangle$ и $[f]$ многочленами от $f$ будем использовать запись по возрастающим степеням $f$, а коэффициенты многочленов будем обозначать символами $a, b$ и $r$ (часто с индексами). Легко видеть, что если $S=\mathbb{R}_+^\vee$, то

$$\langle f\rangle=\{a_1f\vee\ldots\vee a_nf^n\colon a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}_+^\vee, n\in\mathbb{N}\},$$
$$[f]=\{a_0\vee a_1f\vee\ldots\vee a_nf^n\colon a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}_+^\vee, n\in\mathbb{N}_0\}.$$

Будем говорить, что в решетке имеется *решеточная характеризация* некоторого свойства, если данное свойство можно описать в терминах этой решетки.

**Замечание 4.** В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости, в записи решеточной характеризации некоторых свойств будем использовать условия, которые сформулированы не в терминах решетки, но решеточная характеризация которых была получена ранее. Вместо оборотов «существует решеточная характеризация» и «решеточная характеризация» будем использовать сокращения «с. р. х.» и «р. х.» соответственно.

Множество функций-констант полукольца $C(X,S)$ образует подалгебру, которую обозначим через $S$ (это не вызовет путаницы).

**Предложение 2.** *В решетках $\mathbb{A}(C(X,S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ с. р. х. подалгебры $S$.*

*Доказательство.* Для $S=\mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 2]. Для $S=\mathbb{R}_+^\vee$ — это [9, предложение 2]. □

Решетки $\mathbb{A}(C(X,S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ — *полные*, т. е. любое подмножество их элементов имеет точные верхнюю и нижнюю грани (см. замечание 2). Элемент $A$ полной решетки называется *компактным*, если для любого непустого семейства $\{A_i\}_{i\in I}$ ее элементов $A\leq\bigvee_{i\in I}A_i$ влечет $A\leq\bigvee_{i\in J}A_i$ для некоторого конечного подмножества $J\subseteq I$. Элемент $A$ решетки называется $\vee$-*неразложимым*, если $A=B\vee C$ влечет $A=B$ или $A=C$.

Дадим р. х. однопорожденных подалгебр.

**Предложение 3.** *Подалгебры $\langle f\rangle$ и $[f]$ — это в точности $\vee$-неразложимые компактные элементы решеток $\mathbb{A}(C(X,S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ соответственно.*

*Доказательство.* Для $S=\mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 15]. Для $S=\mathbb{R}_+^\vee$ — это [6, теорема 2.4] и [9, предложение 3]. □

**Замечание 5.** В силу предложения 2 решетка $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ имеет р. х. в решетке $\mathbb{A}(C(X,S))$. Отсюда и из предложения 3 получаем, что подалгебры $[f]$ имеют р. х. в решетке $\mathbb{A}(C(X,S))$.

Для произвольной подалгебры $[f]$ через $\mathbb{A}_1([f])$ обозначим *решетку подалгебр с единицей, включенных в* $[f]$. Из предложения 2 получаем

**Предложение 4.** *Для любой подалгебры* $[f]$ *полукольца* $C(X,S)$ *в решетках* $\mathbb{A}(C(X,S))$ *и* $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ *с. р. х. решетки* $\mathbb{A}_1([f])$.

Для произвольной функции $f$ полукольца $C(X,S)$ положим

$$\begin{aligned}&\operatorname{Min} f=\{x\in X\colon f(x)=\inf f\},\\&\operatorname{Max} f=\{x\in X\colon f(x)=\sup f\},\\&\mathrm{Z}(f)=\{x\in X\colon f(x)=0\}.\end{aligned}$$

**Предложение 5.** *Для любой подалгебры* $[f]$ *полукольца* $C(X,S)$ *справедливы следующие утверждения*:

1) $|\operatorname{Im} f|=1$ *тогда и только тогда, когда* $|\mathbb{A}_1([f])|=1$;
2) $|\operatorname{Im} f|=2$ *и* $\mathrm{Z}(f)=\varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $|\mathbb{A}_1([f])|=2$;
3) $|\operatorname{Im} f|=2$ *и* $\mathrm{Z}(f)\neq\varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $|\mathbb{A}_1([f])|=3$;
4) $|\operatorname{Im} f|\geq 3$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{A}_1([f])$ — *бесконечная решетка.*

*Доказательство.* Для $S=\mathbb{P}^\vee$ — это [8, предложение 4]. Для $S=\mathbb{R}_+^\vee$ — это [9, лемма 5]. $\square$

Легко видеть, что для произвольных функций $f$ и $g$ полукольца $C(X,S)$

$$[f]=\langle f\rangle\vee S,\quad \langle f\rangle=\langle g\rangle\Longrightarrow[f]=[g]. \tag{1}$$

Отсюда и из предложений 4 и 5 получаем

**Предложение 6.** *Условия* $|\operatorname{Im} f|=1$, $|\operatorname{Im} f|=2$ *и* $|\operatorname{Im} f|\geq 3$ *имеют р. х. в решетках* $\mathbb{A}(C(X,S))$ *и* $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ *для любой подалгебры* $[f]$, *а значит, и в решетке* $\mathbb{A}(C(X,S))$ *для любой подалгебры* $\langle f\rangle$.

Решим вопрос о равенстве однопорожденных подалгебр.

**Предложение 7.** *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\langle f\rangle=\langle g\rangle$ *или* $[f]=[g]$, *то* $|\operatorname{Im} f|=|\operatorname{Im} g|$;
2) *если* $|\operatorname{Im} f|=1$, *то* $\langle f\rangle=\{0\}$ *при* $f=0$, $\langle f\rangle=S$ *при* $f>0$ *и* $[f]=S$;
3) *если* $|\operatorname{Im} f|=2$, *то* $[f]=[g]$ *тогда и только тогда, когда*

$$|\operatorname{Im} g|=2,\quad \operatorname{Max} f=\operatorname{Max} g,\quad \mathrm{Z}(f)=\mathrm{Z}(g), \tag{2}$$

*или, что равносильно,*

$$|\operatorname{Im} g|=2,\quad \operatorname{Min} f=\operatorname{Min} g,\quad \mathrm{Z}(f)=\mathrm{Z}(g); \tag{3}$$

4) *если* $|\operatorname{Im} f|=2$, *то* $\langle f\rangle=\langle g\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $f=rg$ *для некоторого* $r\in\mathbb{P}^\vee$;
5) *если* $|\operatorname{Im} f|\geq 3$, *то*

$$\langle f\rangle=\langle g\rangle\Longleftrightarrow[f]=[g]\Longleftrightarrow f=rg \text{ для некоторого } r\in\mathbb{P}^\vee. \tag{4}$$

*Доказательство.* Для $S=\mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 11].

Пусть $S=\mathbb{R}_+^\vee$. Если $[f]=[g]$, то $|\operatorname{Im} f|=|\operatorname{Im} g|$ согласно [9, лемма 3], а значит, если $\langle f\rangle=\langle g\rangle$, то $|\operatorname{Im} f|=|\operatorname{Im} g|$ в силу (1).

Утверждение 2) очевидно. Утверждение 3) — это [9, лемма 4].

Достаточность в утверждениях 4) и 5) очевидна. Установим необходимость.

Пусть $|\operatorname{Im} f|=2$. Если $\langle f\rangle=\langle g\rangle$, то $[f]=[g]$ в силу (1), а значит, выполняется условие (3). Поэтому если $\mathrm{Z}(f)=\mathrm{Z}(g)\neq\emptyset$, то $f=rg$ для некоторого $r\in\mathbb{P}^\vee$. Если $\mathrm{Z}(f)=\mathrm{Z}(g)=\emptyset$, то $f=rg$ для некоторого $r\in\mathbb{P}^\vee$ согласно [6, лемма 2.6].

Наконец, пусть $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Тогда в силу [9, лемма 4] равенство $[f] = [g]$ равносильно условию $f = rg$ для некоторого $r \in \mathbb{P}^\vee$. Поэтому если $\langle f \rangle = \langle g \rangle$, то $[f] = [g]$ в силу (1), а значит, $f = rg$ для некоторого $r \in \mathbb{P}^\vee$. □

2.2. **Подалгебры специального вида.** Для подмножества $Z \subseteq X$ через $e_Z$ и $\overline{e}_Z$ обозначим функции полукольца $C(X, S)$ такие, что $e_Z = \overline{e}_Z = 1$ на $X \backslash Z$, $e_Z = 0$ и $\overline{e}_Z = 1/2$ на $Z$. Если множество $Z = \{x, y, \dots, z\}$ конечно, то будем писать $e_{x,y,\dots,z}$ и $\overline{e}_{x,y,\dots,z}$.

Из предложения 7 получаем, что для любой подалгебры $[f] \neq S$

$$\begin{aligned} &[f] = [e_Z] \Longleftrightarrow (|\operatorname{Im} f| = 2,\ \mathrm{Z}(f) = Z), \\ &[f] = [\overline{e}_Z] \Longleftrightarrow (|\operatorname{Im} f| = 2,\ \operatorname{Min} f = Z,\ \mathrm{Z}(f) = \emptyset). \end{aligned} \tag{5}$$

Легко показать, что если пространство $X$ — тихоновское (в частности, хьюиттовское) и множество $Z = \{x, y, \dots, z\} \subseteq X$ конечно, то для произвольного набора $r_x, r_y, \dots, r_z \in S$ существует функция $f \in C(X, S)$ такая, что $f|_Z = (r_x, r_y, \dots, r_z)$. Здесь и далее $f|_Z$ — *ограничение функции $f$ на $Z$*, а равенство $f|_Z = (r_x, r_y, \dots, r_z)$ означает, что $f(x) = r_x$, $f(y) = r_y, \dots, f(z) = r_z$.

**Предложение 8.** *Для произвольных функций $f, g, h \in C^\vee(X)$, $X = \{x, y, z\}$, справедливы следующие утверждения*:

1) *если $f = (1, 0, 0)$, $g = (1, 1, 0)$ и $h(x) \geq h(y) \geq h(z)$, то $h \in [f] \vee [g]$;*
2) *если $f = (1, 0, 0)$, $g = (0, 1, 0)$ и $\mathrm{Z}(h) = \{z\}$, то $h \in [f] \vee [g]$;*
3) *если $1 = f(x) > f(y)$, $g = (1, 1, 0)$ и $h(x) \geq h(y) > h(z)$, то $h \in [f] \vee [g]$;*
4) *если $1 = f(x) > f(y) > f(z) = 0$, $1 = g(y) > g(x)$ и $\mathrm{Z}(h) = \{z\}$, то $h \in [f] \vee [g]$.*

*Доказательство.* 1)–2) Заметим, что $h = h(x)f \vee h(y)g \vee h(z) \in [f] \vee [g]$.

3) Выберем $m \in \mathbb{N}$ такое, что $h(x)f^m(y) \leq h(y)$. Тогда

$$h = h(x)f^m g \vee h(y)g \vee h(z) \in [f] \vee [g].$$

4) Для $m, n \in \mathbb{N}$ таких, что $h(x) > h(y)f(x)g^m(x)/f(y)$ и $h(y) > h(x)f^n(y)$,

$$h = h(x)f^n \vee \frac{h(y)}{f(y)} \cdot fg^m \in [f] \vee [g].$$

□

Для непустого подмножества $Z \subseteq X$ через $\mathrm{Min}_Z$ и $\mathrm{Max}_Z$ обозначим подалгебры с единицей полукольца $C(X, S)$, заданные равенствами

$$\mathrm{Min}_Z = \{f \in C(X, S) \colon Z \subseteq \operatorname{Min} f\}, \quad \mathrm{Max}_Z = \{f \in C(X, S) \colon Z \subseteq \operatorname{Max} f\}.$$

Для конечного множества $Z = \{x, y, \dots, z\}$ будем писать $\mathrm{Min}_{x,y,\dots,z}$ и $\mathrm{Max}_{x,y,\dots,z}$. Через $bC(X, S), spC(X, S), spbC(X, S)$ и $uC(X, S)$ обозначим подалгебры, заданные равенствами

$$\begin{aligned} &bC(X, S) = \{f \in C(X, S) \colon \sup f < \infty\}, \\ &spC(X, S) = \{f \in C(X, S) \colon \inf f > 0 \text{ или } f = 0\}, \\ &spbC(X, S) = bC(X, S) \cap spC(X, S), \\ &uC(X, S) = \{f \in C(X, S) \colon f > 0 \text{ или } f = 0\}. \end{aligned}$$

Подалгебру назовем *b-подалгеброй*, если она включена в подалгебру $bC(X, S)$. Для произвольной подалгебры $A$ через $bA$ обозначим b-подалгебру $A \cap bC(X, S)$.

Аналогичным образом определим понятия sp-подалгебры, spb-подалгебры и u-подалгебры, а также подалгебры $spA$, $spbA$ и $uA$. Ясно, что в случае $S = \mathbb{P}^\vee$ любая подалгебра является u-подалгеброй.

**Предложение 9.** *В решетках $\mathbb{A}(C(X,S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ с. р. х. b-, sp-, spb- и u-подалгебр. В частности, для любой подалгебры $[f]$ с. р. х. подалгебры $u[f]$.*

*Доказательство.* Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 4].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Согласно [9, предложения 5, 6, 7] в решетке $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ с. р. х. b-, sp- и u-подалгебр, а значит, и spb-подалгебр. Далее, пусть $A \in \mathbb{A}(C^\vee(X))$. Воспользуемся предложением 2 и рассмотрим решетку $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ и ее элемент $A \vee \mathbb{R}_+^\vee$. Остается заметить, что подалгебра $A$ является b-, sp-, spb- или u-подалгеброй тогда и только тогда, когда ей является подалгебра $A \vee \mathbb{R}_+^\vee$. □

**Предложение 10.** *Для любых подалгебр $[f]$, $|\operatorname{Im} f| = 2$, и $spb\mathrm{Min}_x$, $x \in X$,*

$$x \in \operatorname{Min} f \iff u[f] \subseteq spb\mathrm{Min}_x. \tag{6}$$

*В частности,*

$$x \in \mathrm{Z}(f) \iff (u[f] \neq [f],\ u[f] \subseteq spb\mathrm{Min}_x).$$

*Доказательство.* Допустим, $\mathrm{Z}(f) = \varnothing$. Тогда $[f] = spb[f] = u[f]$, так как $|\operatorname{Im} f| = 2$. В этом случае утверждение (6), очевидно, верно.

Пусть $\mathrm{Z}(f) \neq \varnothing$. Заметим, что $u[f]$ — spb-подалгебра, так как $|\operatorname{Im} f| = 2$, и

$$u[f] = \{0\} \cup \{a_0 \vee a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n \colon a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^\vee, a_0 > 0, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Поэтому если $x \in \operatorname{Min} f$, то $x \in \operatorname{Min} g$ для всех $g \in u[f]$, т. е. $u[f] \subseteq spb\mathrm{Min}_x$.

Обратно, пусть $u[f] \subseteq spb\mathrm{Min}_x$. Допустим, $x \notin \operatorname{Min} f$, т. е. $f(x) > f(y)$ для некоторой точки $y \in X$. Тогда $x \notin \operatorname{Min} g$, где $g = (f(x) + f(y))/2 \vee f \in u[f]$; противоречие. Значит, $x \in \operatorname{Min} f$. □

**Предложение 11.** *Для любых не u-подалгебр $[f]$ и $[g]$, где $|\operatorname{Im} f|, |\operatorname{Im} g| \geq 3$,*

$$[f] = [g] \iff u[f] = u[g]. \tag{7}$$

*Доказательство.* Необходимость очевидна. Установим достаточность.

Пусть $u[f] = u[g]$. Отметим, что $\mathrm{Z}(f), \mathrm{Z}(g) \neq \varnothing$, так как $[f]$, $[g]$ — не u-подалгебры. Допустим, $\mathrm{Z}(f) \neq \mathrm{Z}(g)$. Не умаляя общности, будем считать, что $f(x) > 0$ и $f(y) = g(x) = 0$ для некоторых $x, y \in X$. Положим $h = f(x)/2 \vee f$. Тогда $h(y) = f(x)/2 < f(x) = h(x)$. С другой стороны, $h(y) \geq h(x)$, так как $g(y) \geq g(x)$, $h \in u[f]$ и $u[f] = u[g]$; противоречие. Значит, $\mathrm{Z}(f) = \mathrm{Z}(g)$.

Далее, пусть, не умаляя общности, $f(x) = g(x) = 1$ и $f(y) = g(y) = 0$ для некоторых $x, y \in X$. Докажем, что $f = g$ или, что равносильно, $f(z) = g(z)$ для всех $z \in X \backslash \{x, y\}$.

Если $f(z) = 0$, то $g(z) = 0$, так как $\mathrm{Z}(f) = \mathrm{Z}(g)$.

Пусть $f(z) > 0$. Тогда $g(z) > 0$, так как $\mathrm{Z}(f) = \mathrm{Z}(g)$. Положим $r = 1 \wedge f(z)/2 \wedge g(z)/2$. Тогда $r \vee f \in u[g]$ и $r \vee g \in u[f]$, так как $r \vee f, r \vee g > 0$ и $u[f] = u[g]$. Значит, функции $r \vee f$ и $r \vee g$ имеют вид

$$r \vee f = a_0 \vee a_1 g \vee \ldots \vee a_n g^n, \quad r \vee g = b_0 \vee b_1 f \vee \ldots \vee b_m f^m,$$

где $a_0 = b_0 = r$, так как $f(y) = g(y) = 0$, и $a_n, b_m > 0$, $n, m \geq 1$, так как $f(z), g(z) > r$. Это вместе с $(r \vee f)(x) = f(x) = (r \vee g)(x) = g(x) = 1 \geq r$

означает, что

$$\begin{cases} f(z) = a_1 g(z) \vee \ldots \vee a_n g^n(z), \\ g(z) = b_1 f(z) \vee \ldots \vee b_m f^m(z), \\ 1 = a_0 \vee a_1 \vee \ldots \vee a_n, \\ 1 = b_0 \vee b_1 \vee \ldots \vee b_m. \end{cases}$$

Отсюда $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots b_m \leq 1$ и

$$f(z) = a_1 \left(b_1 f(z) \vee \ldots \vee b_m f^m(z)\right) \vee \ldots \vee a_n \left(b_1 f(z) \vee \ldots \vee b_m f^m(z)\right)^n.$$

Кроме того, если $j \geq 2$, то $f(z) > a_1 b_j f^j(z)$, и если $i \geq 2$, то $f(z) > a_i b_j^i f^{ij}(z)$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Следовательно, $f(z) = a_1 b_1 f(z)$. Поэтому $a_1 = b_1 = 1$, так как $a_1, b_1 \leq 1$ и $f(z) > 0$. Значит, $f(z) = g(z)$, так как $f(z) \geq a_1 g(z) = g(z)$ и $g(z) \geq b_1 f(z) = f(z)$. □

Наконец, докажем

**Предложение 12.** *Справедливы следующие утверждения*:

1) *произвольные автоморфизмы* $\alpha_1$ *и* $\alpha_2$ *решетки* $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ *такие, что* $\alpha_1(spb\mathrm{Min}_x) = \alpha_2(spb\mathrm{Min}_x) = spb\mathrm{Min}_x$ *для всех* $spb\mathrm{Min}_x$, $x \in X$, *равны тогда и только тогда, когда*

(8) $\qquad \alpha_1([f]) = \alpha_2([f])$ *для любой u-подалгебры* $[f]$.

2) *произвольные автоморфизмы* $\alpha_1$ *и* $\alpha_2$ *решетки* $\mathbb{A}(C^\vee(X))$ *такие, что* $\alpha_1(spb\mathrm{Min}_x) = \alpha_2(spb\mathrm{Min}_x) = spb\mathrm{Min}_x$ *для всех* $spb\mathrm{Min}_x$, $x \in X$, *равны тогда и только тогда, когда*

(9) $\qquad \alpha_1(\langle f\rangle) = \alpha_2(\langle f\rangle)$ *для любой u-подалгебры* $\langle f\rangle$.

*Доказательство.* Необходимость очевидна. Установим достаточность.

1) Пусть выполняется условие (8). Докажем, что $\alpha_1 = \alpha_2$. Рассмотрим произвольную подалгебру $[f]$. Тогда в силу предложения 3 имеем $\alpha_1([f]) = [f_1]$ и $\alpha_2([f]) = [f_2]$ для некоторых подалгебр $[f_1]$ и $[f_2]$ полукольца $C^\vee(X)$. Если мы докажем, что $[f_1] = [f_2]$, то $\alpha_1(A) = \alpha_2(A)$ для всех $A \in \mathbb{A}_1(C^\vee(X))$, так как любая подалгебра с единицей является точной верхней гранью включенных в нее однопорожденных подалгебр с единицей.

Если $f = 0$ или $f > 0$, то $[f]$ — u-подалгебра. Значит, $[f_1] = [f_2]$ в силу (8).

Пусть $|\operatorname{Im} f| \geq 2$ и $\mathrm{Z}(f) \neq \emptyset$. Тогда в силу предложения 9 и (8) имеем

$$\{[g_1] \subseteq [f_1] \colon [g_1] \text{— u-подалгебра}\} = \{\alpha_1([g]) \colon [g] \subseteq [f] \text{ и } [g] \text{— u-подалгебра}\} =$$
$$\{\alpha_2([g]) \colon [g] \subseteq [f] \text{ и } [g] \text{— u-подалгебра}\} = \{[g_2] \subseteq [f_2] \colon [g_2] \text{— u-подалгебра}\}.$$

Отсюда $u[f_1] = u[f_2]$, так как любая u-подалгебра с единицей есть точная верхняя грань включенных в нее однопорожденных u-подалгебр с единицей. Поэтому если $|\operatorname{Im} f| = 2$, то в силу предложений 6 и 10

$$|\operatorname{Im} f_1| = |\operatorname{Im} f_2| = |\operatorname{Im} f| = 2,\ \operatorname{Min} f_1 = \operatorname{Min} f_2 = \operatorname{Min} f,\ \mathrm{Z}(f_1) = \mathrm{Z}(f_1) = \mathrm{Z}(f).$$

Значит, $[f_1] = [f_2] = [f]$ по предложению 7.

Наконец, если $|\operatorname{Im} f| \geq 3$, то $|\operatorname{Im} f_1|, |\operatorname{Im} f_2| \geq 3$ в силу предложения 6. Значит, $[f_1] = [f_2]$ по предложению 11.

2) Пусть выполняется условие (9). Докажем, что $\alpha_1 = \alpha_2$. Рассмотрим произвольную подалгебру $\langle f\rangle$. Тогда в силу предложения 3 имеем $\alpha_1(\langle f\rangle) = \langle f_1\rangle$

и $\alpha_2(\langle f\rangle) = \langle f_2\rangle$ для некоторых подалгебр $\langle f_1\rangle$ и $\langle f_2\rangle$ полукольца $C^\vee(X)$. Если мы докажем, что $\langle f_1\rangle = \langle f_2\rangle$, то $\alpha_1(A) = \alpha_2(A)$ для всех $A \in \mathbb{A}_1(C^\vee(X))$, так как любая подалгебра является точной верхней гранью включенных в нее однопорожденных подалгебр.

Если $f = 0$ или $f > 0$, то $\langle f\rangle$ — u-подалгебра. Значит, $\langle f_1\rangle = \langle f_2\rangle$ в силу (9). В частности, $\alpha_1(\mathbb{R}_+^\vee) = \alpha_2(\mathbb{R}_+^\vee)$.

Пусть $|\operatorname{Im} f| \geq 2$ и $\mathrm{Z}(f) \neq \emptyset$. Заметим, что для любой u-подалгебры $[g]$ подалгебра $\langle g\rangle$ также будет u-подалгеброй. Поэтому в силу (9) имеем

$$\alpha_1([g]) = \alpha_1(\langle g\rangle \vee \mathbb{R}_+^\vee) = \alpha_1(\langle g\rangle) \vee \alpha_1(\mathbb{R}_+^\vee) = \alpha_2(\langle g\rangle) \vee \alpha_2(\mathbb{R}_+^\vee) = \alpha_2(\langle g\rangle \vee \mathbb{R}_+^\vee) = \alpha_2([g]).$$

Поэтому выполняется условие (8). Отсюда (см. доказательство утверждения 1)) $[f_1] = [f_2]$, причем $\mathrm{Z}(f_1) = \mathrm{Z}(f_2) = \mathrm{Z}(f)$ в случае $|\operatorname{Im} f| = 2$. Кроме того, $|\operatorname{Im} f_1| = |\operatorname{Im} f_2| = |\operatorname{Im} f|$ в силу предложения 6. Значит, $\langle f_1\rangle = \langle f_2\rangle$ по предложению 7. □

## 3. Основные результаты

Дадим ответы на основные вопросы 1 и 2 для $S = \mathbb{R}_+^\vee$.

### 3.1. **Изоморфизмы полуколец $C(X,S)$ и $C(Y,S)$, которые индуцируют изоморфизмы решеток их подалгебр (подалгебр с единицей).**

Заметим, что $(f \vee g)^t = f^t \vee g^t$ и $(fg)^t = f^t g^t$ для любых $f, g \in C(X,S)$ и $t \in \mathbb{P}$. Поэтому для любого $t \in \mathbb{P}$ правило $f \mapsto f^t$ задает автоморфизм полукольца $C(X,S)$, который обозначим через $\psi_t$. Поскольку

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \psi_t(A) \subseteq \psi_t(B), \quad A \text{— подалгебра} \Longleftrightarrow \psi_t(A) \text{— подалгебра}$$

для любых подмножеств $A, B \subseteq C(X,S)$ и $\psi_t(S) = S$, автоморфизм $\psi_t$ индуцирует автоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C(X,S))$ и $\mathbb{A}_1(C(X,S))$, которые обозначим через $\alpha_{\psi_t}$ и $\alpha_{1,\psi_t}$ соответственно.

**Замечание 6.** Легко видеть, что правило $A \mapsto A\backslash\{0\}$ задает изоморфизм решеток подалгебр (подалгебр с единицей) полукольца $C^\vee(X)$ и полуполя $U^\vee(X)$.

**Теорема 1.** *Для произвольного изоморфизма $\psi$ полуколец $C(X,S)$ и $C(Y,S)$ равносильны следующие условия*:

1) *$\psi$ индуцирует изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C(X,S))$ и $\mathbb{A}(C(Y,S))$;*

2) *$\psi$ индуцирует изоморфизм решеток $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y,S))$;*

3) *$\psi$ действует по правилу $f \mapsto \psi_t(f \circ \varphi^{-1})$ для некоторого автоморфизма $\psi_t$ полукольца $C(X,S)$ и некоторого гомеоморфизма $\varphi$ пространств $X$ и $Y$.*

*Доказательство.* Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, соглашения 1–6 и теорема 1].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Импликации 3) ⇒ 1) и 3) ⇒ 2) очевидны. Докажем обратные импликации.

Рассмотрим изоморфизм $\psi$ полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$, который индуцирует изоморфизм решеток их подалгебр (подалгебр с единицей). В силу предложений 2 и 9 ограничение этого изоморфизма на решетку $\mathbb{A}_1(uC^\vee(X))$ является изоморфизмом решеток $\mathbb{A}_1(uC^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(uC^\vee(Y))$. Отсюда и из замечания 6 получаем, что $\psi$ индуцирует изоморфизм решеток $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(Y))$. Поэтому по теореме 1 для $S = \mathbb{R}_+^\vee$ получаем, что $\psi$ на $U^\vee(X)$ действует по правилу $f \mapsto \psi_t(f \circ \varphi^{-1})$ для некоторого автоморфизма $\psi_t$ полуполя $U^\vee(X)$ и некоторого гомеоморфизма $\varphi$ пространств $X$ и $Y$. Следовательно, для любых функций $f \in C^{\vee}(X)$ и $r \in \mathbb{P}^{\vee}$

$$(10)\quad \psi(f) \vee r^t = \psi(f) \vee \psi(r) = \psi(f \vee r) = \psi_t\big((f \vee r) \circ \varphi^{-1}\big) = \psi_t\big((f \circ \varphi^{-1}) \vee (r \circ \varphi^{-1})\big) = \psi_t\big(f \circ \varphi^{-1}\big) \vee \psi_t\big(r \circ \varphi^{-1}\big) = \psi_t\big(f \circ \varphi^{-1}\big) \vee r^t.$$

Легко видеть, что для произвольных функций $g, h \in C^{\vee}(Y)$

$$g = h \Longleftrightarrow g \vee r^t = h \vee r^t \text{ для всех } r \in \mathbb{P}^{\vee}.$$

Вместе с (10) это означает, что $\psi(f) = \psi_t\big(f \circ \varphi^{-1}\big)$. □

3.2. **Изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C(X,S))$ и $\mathbb{A}(C(Y,S))$.** Опишем изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C(X,S))$ и $\mathbb{A}(C(Y,S))$. Нам понадобится

**Предложение 13.** *Пусть $X = \{x, y\}$. Тогда для любых функций $f, g \in C^{\vee}(X)$ справедливы следующие утверждения*:

1) *если $f(x) > f(y)$ и $g(x) < g(y)$, то $uC^{\vee}(X) \subseteq \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$;*
2) *если $f(x) = g(x) > f(y) > 0$, то $g \in \langle f\rangle$ равносильно $f(y) \geq g(y) > 0$.*

*Доказательство.* 1) Не умаляя общности, будем считать, что $f(x) = g(y) = 1$. Тогда для любой функции $h > 0$ найдутся $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $h(y)g^m(x) \leq h(x)$ и $h(x)f^n(y) \leq h(y)$, так как $1 > f(y), g(x)$. Значит, $uC^{\vee}(X) \subseteq \langle f\rangle \vee \langle g\rangle$, так как

$$h = h(x)f^n \vee h(y)g^m \in \langle f\rangle \vee \langle g\rangle.$$

2) Не умаляя общности, будем считать, что $f(x) = g(x) = 1$. Если $g \in \langle f\rangle$, то функция $g$ имеет вид

$$g = a_1 f \vee \ldots \vee a_n f^n,$$

где $a_1 \vee \ldots \vee a_n = 1$, так как $f(x) = g(x) = 1$. Кроме того, $f(y) \geq f^i(y) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, так как $1 > f(y) > 0$. Значит, $f(y) \geq g(y) > 0$.

Обратно, пусть $f(y) \geq g(y) > 0$. Поскольку $1 > f(y)$, найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $g(y) \geq f^n(y)$. Тогда

$$g = \frac{g(y)}{f(y)} \cdot f \vee f^n \in \langle f\rangle.$$

□

Наибольшее значение функции $f \in C(X,S)$ обозначим через $\max f$. Отрезок $[0,1]$ с естественным порядком является цепью. Для произвольных порядковых автоморфизмов $\varphi_x$ и $\varphi_y$ цепи $[0,1]$ через $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$ обозначим взаимно-однозначное преобразование полукольца $C(X,S)$, действующее по правилу

$$(11)\quad f = (f(x), f(y)) \mapsto \begin{cases} 0, \text{ если } f = 0, \\ \max f \cdot \left(\varphi_x\left(\dfrac{f(x)}{\max f}\right), \varphi_y\left(\dfrac{f(y)}{\max f}\right)\right), \text{ если } f \neq 0. \end{cases}$$

Для функции $f \in C(X,S)$ и подмножества $A \subseteq C(X,S)$ обозначим через $f'$ и $A'$ их образы $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}(f)$ и $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}(A)$. Из определения $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$ находим, что

$$(12)\qquad \max f = \max f', \quad \mathrm{Z}(f) = \mathrm{Z}(f')$$

и

$$(13)\qquad f(x) < f(y) \Longleftrightarrow f'(x) < f'(y), \quad f(x) = f(y) \Longleftrightarrow f'(x) = f'(y).$$

Кроме того, справедливы следующие утверждения:

- если $f = 0$, то $\langle f\rangle = \{0\}$;

- если $f \in \mathbb{P}^\vee$, то $\langle f\rangle = S$;
- если $f(x) > f(y) = 0$, то $\langle f\rangle = \left\{a\cdot(1,0)\colon a \in \mathbb{R}_+^\vee\right\}$;
- если $f(x) > f(y) > 0$, то $\langle f\rangle = \{a\cdot(1,b)\colon a\in S,\ f(y)/f(x) \geq b > 0\}$ в силу утверждения 2 предложения 13.

Вместе с (11) это означает, что

$$(\langle f\rangle)' = \langle f'\rangle \text{ для всех } f \in C(X,S). \tag{14}$$

**Предложение 14.** *Любое преобразование* $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$ *индуцирует автоморфизм решетки* $\mathbb{A}(C(X,S))$, $X = \{x,y\}$, *причем*

$$\psi_{\varphi_x,\varphi_y}\colon spb\mathrm{Min}_x \mapsto spb\mathrm{Min}_x,\ spb\mathrm{Min}_y \mapsto spb\mathrm{Min}_y. \tag{15}$$

*Доказательство.* Утверждение (15) получаем из определения $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$.

Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 6].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Заметим, что $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}(U^\vee(X)) = U^\vee(X)$. Вместе с предложением 14 для $S = \mathbb{P}^\vee$ и замечанием 6 это означает, что преобразование $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$ индуцирует автоморфизм решетки $\mathbb{A}(uC^\vee(X))$. В частности,

$$(uA)' \text{ — подалгебра для любой подалгебры } A \subseteq C^\vee(X). \tag{16}$$

Докажем, что $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$ индуцирует автоморфизм решетки $\mathbb{A}(C^\vee(X))$. Поскольку $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$ — взаимно-однозначное преобразование, включения $A \subseteq B$ и $A' \subseteq B'$ равносильны для любых подмножеств $A, B \subseteq C^\vee(X)$. Поэтому достаточно показать, что $A$ — подалгебра тогда и только тогда, когда $A'$ — подалгебра для любого подмножества $A \subseteq C^\vee(X)$.

Пусть $A$ — подалгебра. Докажем, что $A'$ — подалгебра или, что равносильно, $f'\vee g', f'g', rf' \in A'$ для любых $f', g' \in A'$ и $r \in \mathbb{R}_+^\vee$.

Заметим, что $rf \in A$, так как $f \in A$ и $A$ — подалгебра. Поэтому $rf' \in A'$, так как $(rf)' = rf'$ в силу (11). В частности,

$$h' \in A' \iff (rh' \in A' \text{ для всех } r \in \mathbb{P}^\vee) \iff (rh' \in A' \text{ для некоторого } r \in \mathbb{P}^\vee)\,. \tag{17}$$

Если $f' = 0$ или $g' = 0$, то $f'\vee g', f'g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Если $f', g' > 0$, то $f, g \in uA$. Поэтому $f', g' \in (uA)'$. Значит, $f'\vee g', f'g' \in A'$, так как $(uA)' \subseteq A'$ и $(uA)'$ — подалгебра в силу (16).

Остается разобрать случай, когда $f'(x) > f'(y) = 0$ и $g' \neq 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $f'(x) = 1$, так как в силу (17)

$$f'\vee g' \in A' \iff \frac{f'}{f(x)} \vee \frac{g'}{f(x)} \in A', \quad f'g' \in A' \iff \frac{f'}{f(x)}\cdot g' \in A'.$$

Заметим, что $f'g' \in A'$, так как $f'g' = g'(x)f'$ и $g'(x)f' \in A'$ в силу (17).

Докажем, что $f'\vee g' \in A'$.

Случай 1: $g' \in \mathbb{P}^\vee$. Если $g' \leq f'(y)$ или $g' \geq 1$, то $f'\vee g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Пусть $1 > g' > f'(y)$. Заметим, что $g = g'$ в силу (11). Поэтому $\mathbb{R}_+^\vee \subseteq A$, так как $g \in \mathbb{P}^\vee$, $g \in A$ и $A$ — подалгебра. В частности, $\varphi_y^{-1}(g') \in A$. Следовательно, $\varphi_y^{-1}(g')\vee f \in A$, так как $f \in A$ и $A$ — подалгебра. Значит, $f'\vee g' \in A'$, так как

$$\left(\varphi_y^{-1}(g')\vee f\right)' = \left(1, \varphi_y^{-1}(g')\right)' = (1, g') = f'\vee g'.$$

Случай 2: $g'(x) > g'(y)$. Если $g'(y) = 0$, то $f'\vee g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Пусть $g'(y) > 0$. Тогда если $g'(x) \geq 1$, то $f' \vee g' = g' \in A'$. Наконец, если $g'(x) < 1$, то $g'(x)(f' \vee g') = (g'(x), g'(x)g'(y)) \in \langle g' \rangle$ по утверждению 2 предложения 13, так как $g'(y) > g'(x)g'(y) > 0$. Значит, $f' \vee g' \in A'$, так как $\langle g' \rangle \subseteq A'$ в силу (14).

Случай 3: $g'(y) > g'(x)$. Тогда $uC^{\vee}(X) \subseteq \langle f \rangle \vee \langle g \rangle$ по утверждению 2 предложения 13, так как $f(x) > f(y)$ и $g(x) < g(y)$ в силу (11). Следовательно, $uC^{\vee}(X) \subseteq A$, так как $f, g \in A$. Отсюда $uC^{\vee}(X) \subseteq A'$, так как $(uC^{\vee}(X))' = uC^{\vee}(X)$ в силу (11). Значит, $f' \vee g' \in A'$, так как $f' \vee g' \in uC^{\vee}(X)$.

Итак, если $A$ — подалгебра, то $A'$ — подалгебра.

Обратно, пусть $A$ — подмножество полукольца $C^{\vee}(X)$ такое, что его образ $A'$ является подалгеброй. Заметим, что $\psi^{-1}_{\varphi_x,\varphi_y} = \psi_{\varphi_x^{-1},\varphi_y^{-1}}$. Поэтому, как было показано ранее, множество $\psi_{\varphi_x^{-1},\varphi_y^{-1}}(A') = A$ является подалгеброй. □

Обозначим через $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}$ автоморфизм решетки $\mathbb{A}(C(X,S)$, который согласно предложению 14 индуцирует преобразование $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$.

**Теорема 2.** *Для любого изоморфизма $\alpha$ решеток $\mathbb{A}(C(X,S))$ и $\mathbb{A}(C(Y,S))$ справедливы следующие утверждения*:

1) *отображение $\varphi_\alpha \colon X \to Y$, заданное правилом*

$$\varphi_\alpha(x) = x' \Longleftrightarrow \alpha(spb\mathrm{Min}_x) = spb\mathrm{Min}_{x'},$$

*является гомеоморфизмом*;

2) *если $|X| \neq 2$, то $\alpha$ индуцируется изоморфизмом полуколец $C(X,S)$ и $C(Y,S)$, который действует по правилу $f \mapsto \psi_t\left(f \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)$ для некоторого автоморфизма $\psi_t$ полукольца $C(X,S)$*;

3) *если $|X| = 2$, то $\alpha$ индуцируется отображением полуколец $C(X,S)$ и $C(Y,S)$, которое действует по правилу $f \mapsto \psi_{\varphi_x,\varphi_y}\left(f \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)$ для некоторого преобразования $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}$ полукольца $C(X,S)$.*

*Доказательство.* Для $S = \mathbb{P}^{\vee}$ — это [1, соглашения 1–6 и теорема 2].

Пусть $S = \mathbb{R}^{\vee}_{+}$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение изоморфизма $\alpha$ на решетку $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ является изоморфизмом решеток $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ и $\mathbb{A}(U^{\vee}(Y))$. Отсюда и из утверждения 1) для $S = \mathbb{P}^{\vee}$ получаем, что отображение $\varphi_\alpha$ является гомеоморфизмом пространств $X$ и $Y$.

Отождествим точки пространств $X$ и $Y$ гомеоморфизмом $\varphi_\alpha$. После чего, не умаляя общности, будем считать, что $\alpha$ — автоморфизм решетки $\mathbb{A}(C^{\vee}(X))$ такой, что $spb\mathrm{Min}_x \mapsto spb\mathrm{Min}_x$, $x \in X$.

Случай $|X| \neq 2$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение автоморфизма $\alpha$ на решетку $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ является автоморфизмом решетки $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$. Отсюда и из утверждения 2) для $S = \mathbb{P}^{\vee}$ получаем, что ограничение автоморфизма $\alpha$ на решетку $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ индуцируется ограничением на полуполе $U^{\vee}(X)$ некоторого автоморфизма $\psi_t$ полукольца $C^{\vee}(X)$. Тогда $\alpha(\langle f \rangle) = \alpha_{\psi_t}(\langle f \rangle)$ для всех u-подалгебр $\langle f \rangle$ полукольца $C^{\vee}(X)$. Кроме того, легко видеть, что $\alpha_{\psi_t} \colon spb\mathrm{Min}_x \mapsto spb\mathrm{Min}_x$, $x \in X$. Значит, $\alpha = \alpha_{\psi_t}$ по утверждению 2 предложения 12.

Случай $X = \{x, y\}$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение автоморфизма $\alpha$ на решетку $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ является автоморфизмом решетки $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$. Отсюда и из утверждения 3) для $S = \mathbb{P}^{\vee}$ получаем, что найдутся автоморфизмы $\varphi_x$ и $\varphi_y$ цепи $(0, 1]$ такие, что $\alpha = \alpha_{\varphi_x,\varphi_y}$ на решетке

$\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Доопределим автоморфизмы $\varphi_x$ и $\varphi_y$ цепи $(0,1]$ до автоморфизмов цепи $[0,1]$ равенствами $\varphi_x(0)=0$ и $\varphi_y(0)=0$. Тогда $\alpha(\langle f\rangle)=\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}(\langle f\rangle)$ для любой u-подалгебры $\langle f\rangle$ полукольца $C^\vee(X)$. Кроме того, легко видеть, что $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}\colon spb\mathrm{Min}_x\mapsto spb\mathrm{Min}_x$, $x\in X$. Значит, $\alpha=\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}$ по утверждению 2 предложения 12. □

**Предложение 15.** *Произвольные автоморфизмы $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}$ и $\alpha_{\psi_t}$ равны тогда и только тогда, когда $\varphi_x(r)=\varphi_y(r)=r^t$ для всех $r\in(0,1]$.*

*Доказательство.* Для $S=\mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 7].

Пусть $S=\mathbb{R}_+^\vee$. Если $\varphi_x(r)=\varphi_y(r)=r^t$ для всех $r\in(0,1]$, то $\psi_{\varphi_x,\varphi_y}=\psi_t$, так как $\varphi_x(0)=\varphi_y(0)=0^t=0$. Значит, $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}=\alpha_{\psi_t}$.

Обратно, если $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}=\alpha_{\psi_t}$, то $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}=\alpha_{\psi_t}$ на решетке $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Из предложения 15 для $S=\mathbb{P}^\vee$ получаем, что $\varphi_x(r)=\varphi_y(r)=r^t$, $r\in(0,1]$. □

**Замечание 7.** Из предложения 15 получаем, что семейство автоморфизмов $\alpha_{\varphi_x,\varphi_y}$ строгим образом включает семейство автоморфизмов $\alpha_{\psi_t}$. Вместе с теоремами 1 и 2 это означает, что в случае $|X|=|Y|=2$ существуют изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C(X,S))$ и $\mathbb{A}(C(Y,S))$, которые не индуцируются изоморфизмами полуколец $C(X,S)$ и $C(Y,S)$.

3.3. **Изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y,S))$.** Опишем изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y,S))$.

Пусть $X=\{x,y,z\}$. Для произвольной функции $f\in C(X,S)$ такой, что $\operatorname{Im} f=\{a,b,c\}$ и $a>b>c$, обозначим через $\operatorname{mid} f$ значение $b$. Рассмотрим множество $\mathrm{Mid}_y$, заданное равенством

$$\mathrm{Mid}_y=\{f\in C(X,S)\colon |\operatorname{Im} f|=3,\ f(y)=\operatorname{mid} f\}.$$

Нетрудно заметить, что для любых $a,s\in\mathbb{P}$ и $f\in\mathrm{Mid}_y$, где $s>1>a>0$ и $f(x)>f(y)>f(z)$, найдутся единственные $k\in\mathbb{R}$ и $r,p\in\mathbb{P}$ такие, что

$$f=\begin{cases} a^k\left(1,a^r,(a^r)^{1+p(s-1)}\right), & \text{если } f(z)>0,\\ a^k\left(1,a^r,0\right), & \text{если } f(z)=0.\end{cases}$$

Аналогичное верно и для функций $f\in\mathrm{Mid}_y$, $f(x)<f(y)<f(z)$.

Для произвольного набора $T_y=(a,b,s,t)$, где $s,t>1>a,b>0$, положим

$$c=a^{s-1},\quad l=\frac{s}{s-1},\quad d=b^{t-1},\quad q=\frac{t}{t-1}.$$

Тогда

$$l,q>1>c,d>0,\quad (s-1)(l-1)=(t-1)(q-1)=1.$$

Легко видеть, что правило

$$f\mapsto\begin{cases} b^k\left(1,b^r,(b^r)^{1+p(t-1)}\right), & \text{если } f=a^k\left(1,a^r,(a^r)^{1+p(s-1)}\right),\\ b^k\left(1,b^r,0\right), & \text{если } f=a^k\left(1,a^r,0\right),\\ d^k\left((d^r)^{1+p(q-1)},d^r,1\right), & \text{если } f=c^k\left((c^r)^{1+p(l-1)},c^r,1\right),\\ d^k\left(0,d^r,1\right), & \text{если } f=c^k\left(0,c^r,1\right),\end{cases}\tag{18}$$

задает взаимно-однозначное преобразование множества $\mathrm{Mid}_y$, которое обозначим через $\psi_{T_y}$. Множества $\mathrm{Mid}_x$ и $\mathrm{Mid}_z$ и их преобразования $\psi_{T_x}$ и $\psi_{T_z}$ определим аналогичным образом. Тогда для любой тройки $T = (T_x, T_y, T_z)$ правило

$$f \mapsto \begin{cases} \psi_{T_x}(f), \text{ если } f \in \mathrm{Mid}_x, \\ \psi_{T_y}(f), \text{ если } f \in \mathrm{Mid}_y, \\ \psi_{T_z}(f), \text{ если } f \in \mathrm{Mid}_z, \\ f, \text{ если } |\operatorname{Im} f| \le 2, \end{cases} \tag{19}$$

задает взаимно-однозначное преобразование полукольца $C(X,S)$, которое обозначим через $\psi_T$. Для произвольной функции $f \in C(X,S)$ и подмножества $A \subseteq C(X,S)$ обозначим через $f'$ и $A'$ их образы $\psi_T(f)$ и $\psi_T(A)$.

Из определения $\psi_T$ находим, что для любой функции $f \in C(X,S)$

$$\mathrm{Z}(f) = \mathrm{Z}(f'), \quad f(u) < f(v) \Longleftrightarrow f'(u) < f'(v) \text{ для любых } u, v \in X. \tag{20}$$

Отсюда и из (5) находим, что

$$([e_Z])' = [e_Z], \quad ([\overline{e}_Z])' = [\overline{e}_Z] \text{ для всех } Z \subseteq X. \tag{21}$$

**Предложение 16.** *Любое преобразование $\psi_T$ индуцирует автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(C(X,S))$, $X = \{x,y,z\}$, причем*

$$\psi_T \colon spb\mathrm{Min}_x \mapsto spb\mathrm{Min}_x,\ spb\mathrm{Min}_y \mapsto spb\mathrm{Min}_y,\ spb\mathrm{Min}_z \mapsto spb\mathrm{Min}_z. \tag{22}$$

*Доказательство.* Рассмотрим преобразование $\psi_T$, где $T = (T_x, T_y, T_z)$ и

$$T_x = (a_x, b_x, s_x, t_x), \quad T_y = (a_y, b_y, s_y, t_y), \quad T_z = (a_z, b_z, s_z, t_z).$$

Утверждение (22) получаем из определения преобразования $\psi_T$.

Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 8].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Поскольку $\psi_T(U^\vee(X)) = U^\vee(X)$ и $\psi_T(\mathbb{P}^\vee) = \mathbb{P}^\vee$, из предложения 16 для $S = \mathbb{P}^\vee$ и замечания 6 получаем, что преобразование $\psi_T$ индуцирует автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(uC^\vee(X))$. Поэтому $(uA)'$ — подалгебра с единицей для любой подалгебры $A$ с единицей полукольца $C^\vee(X)$. Отсюда

$$f' \vee g', f'g' \in (uA)' \subseteq A' \text{ для любых } f', g' \in A',\ f', g' > 0, \tag{23}$$

так как если $f', g' > 0$, то $f, g \in uA$ в силу (18).

Докажем, что $\psi_T$ индуцирует автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$. Поскольку $\psi_T$ — взаимно-однозначное преобразование, включения $A \subseteq B$ и $A' \subseteq B'$ равносильны для любых подмножеств $A, B \subseteq C^\vee(X)$. Поэтому достаточно показать, что $A$ — подалгебра с единицей тогда и только тогда, когда $A'$ — подалгебра с единицей для любого подмножества $A \subseteq C^\vee(X)$.

Пусть $A$ — подалгебра с единицей полукольца $C^\vee(X)$ и $f', g' \in A'$. Докажем, что $A'$ — подалгебра с единицей, т. е. $\mathbb{R}_+^\vee \subseteq A'$ и $f' \vee g', f'g', rf' \in A'$ для любых $f', g' \in A'$ и $r \in \mathbb{R}_+^\vee$. Заметим, что $\mathbb{R}_+^\vee \subseteq A'$, так как $\mathbb{R}_+^\vee \subseteq A$ и $\psi_T(\mathbb{R}_+^\vee) = \mathbb{R}_+^\vee$. Поэтому достаточно показать, что $f' \vee g'$ и $f'g' \in A'$ для всех $f', g' \in A'$.

Если $f' = 0$ или $g' = 0$, то $f' \vee g', f'g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Пусть $f', g' \neq 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $|\operatorname{Im} g'| \ge |\operatorname{Im} f'|$ и $f'(x) \ge f'(y) \ge f'(z)$.

Случай 1: $f' \in \mathbb{P}^\vee$, $|\operatorname{Im} g'| \le 2$. Тогда $f' = f$, $g' = g$ и $|\operatorname{Im} f \vee g|$, $|\operatorname{Im} fg| \le 2$. Кроме того, $f \vee g, fg \in A$, так как $f, g \in A$ и $A$ — подалгебра. Значит,

$$f' \vee g' = f \vee g = (f \vee g)' \in A', \quad f'g' = fg = (fg)' \in A'.$$

Случай 2: $f' \in \mathbb{P}^\vee$, $|\operatorname{Im} g'| = 3$. Если $g' > 0$, то $f' \vee g', f'g' \in A'$ в силу (23).

Пусть $\mathrm{Z}(g') \neq \emptyset$. Не умаляя общности, будем считать, что $g' = b_y^k\left(1, b_y^r, 0\right)$ для некоторых $k \in \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{P}$. Поскольку $f' \in \mathbb{P}^\vee$, имеем $f' = b_y^l$ для некоторого $l \in \mathbb{R}$. Кроме того, $a_y^l g \in A$, так как $g \in A$ и $A$— подалгебра. Значит,

$$f'g' = b_y^{l+k}\left(1, b_y^r, 0\right) = \left(a_y^{l+k}\left(1, a_y^r, 0\right)\right)' = \left(a_y^l g\right)' \in A'.$$

Докажем, что $f' \vee g' \in A'$. Если $f' < g'(y)$, то $f' = b_y^k\left(b_y^r\right)^{1+p(t-1)}$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Положим $e = a_y^k\left(a_y^r\right)^{1+p(s-1)}$. Тогда $e \vee f \in A$, так как $e, f \in A$ и $A$— подалгебра. Значит,

$$f' \vee g' = b_y^k\left(1, b_y^r, \left(b_y^r\right)^{1+p(t-1)}\right) = \left(a_y^k\left(1, a_y^r, \left(a_y^r\right)^{1+p(s-1)}\right)\right)' = (e \vee f)' \in A'.$$

Пусть $f' \geq g'(y)$. Тогда $(f' \vee g')(x) \geq (f' \vee g')(y) = (f' \vee g')(z)$. Поэтому $f' \vee g' \in [\overline{e}_{y,z}]$. Кроме того, $[g(y) \vee g] \subseteq A$, так как $g(y), g \in A$ и $A$— подалгебра. Следовательно, $[\overline{e}_{y,z}] \subseteq A'$, так как $[\overline{e}_{y,z}] = [g(y) \vee g]$ и $([\overline{e}_{y,z}])' = [\overline{e}_{y,z}]$ в силу (21). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Итак, (см. случаи 1 и 2) для любых ненулевых функций $f', g' \in A'$ имеем

$$\begin{aligned} &f' \vee g' \in A' \Longleftrightarrow \frac{f'}{\max f'} \vee \frac{g'}{\max f'} \in A', \\ &f'g' \in A' \Longleftrightarrow \frac{f'}{\max f'} \cdot \frac{g'}{\max g'} \in A'. \end{aligned} \tag{24}$$

Поэтому при доказательстве $f' \vee g' \in A'$ или $f'g' \in A'$, не умаляя общности, будем считать, что $\max f' = 1$ или $\max f' = \max g' = 1$ соответственно.

Отметим также, что если $f' \vee g' > 0$, то для $r = \min(f' \vee g')$

$$r \vee f', r \vee g' > 0, \quad f' \vee g' = (r \vee f') \vee (r \vee g').$$

Поэтому (см. случаи 1 и 2) $r \vee f', r \vee g' \in A'$. Значит, в силу (23) имеем

$$f' \vee g' > 0 \Longrightarrow f' \vee g' \in A'. \tag{25}$$

Случай 3: $f' = (1, 0, 0)$. Тогда $f'g' \in \{f', 0\} \subseteq A'$. Докажем, что $f' \vee g' \in A'$.

Случай 3.1: $g'(y), g'(z) > 0$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$.

Случай 3.2: $g'(x) = g'(y) > g'(z) = 0$. Тогда $[f] = [(1, 0, 0)]$ и $[g] = [(1, 1, 0)]$. Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) \colon h(x) \geq h(y) \geq h(z)\}.$$

Тогда $B$— подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B = [f] \vee [g]$ по утверждению 1) предложения 8. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Случай 3.3: $g'(x) = g'(z) > g'(y) = 0$. Аналогичен случаю 3.2.

Случай 3.4: $g'(y) > g'(x) = g'(z) = 0$. Тогда $[f] = [(1, 0, 0)]$ и $[g] = [(0, 1, 0)]$. Положим

$$B = \{h \in C^\vee(X) \colon \mathrm{Z}(h) = \{z\} \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда $B$— подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 2) предложения 8. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Случай 3.5: $g'(x) = g'(y) > g'(z) = 0$. Аналогичен случаю 3.4.

Случай 3.6: $g'(x) > g'(y) = g'(z) = 0$. Тогда $f' \vee g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Случай 3.7: $g'(x) > g'(y) > g'(z) = 0$. Если $f'(x) \leq g'(x)$, то $f' \vee g' = g' \in A'$.

Пусть $1 = f'(x) > g'(x)$. Тогда $1 = f(x) > g(x)$ и $g' = b_y^k\left(1, b_y^r, 0\right)$ для некоторых $k, r \in \mathbb{P}$. Значит,

$$f' \vee g' = \left(1, b_y^r, 0\right) = \left(1, a_y^r, 0\right)' = (f \vee g)' \in A'.$$

Случай 3.8: $g'(x) > g'(z) > g'(y) = 0$. Аналогичен случаю 3.7.

Случай 3.9: $g'(y) > g'(x) > g'(z) = 0$. Положим

$$B = \{h \in C^{\vee}(X) \colon \mathrm{Z}(h) = \{z\} \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда $B$ — подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B \subseteq [f \vee g/(2g(y))] \vee [g]$ по утверждению 4) предложения 8. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f \vee g/(2g(y))] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Случай 3.10: $g'(z) > g'(x) > g'(y) = 0$. Аналогичен случаю 3.9.

Случай 4: $f' = \left(1, b_y^r, b_y^r\right), r \in \mathbb{P}$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$. Докажем, что $f'g' \in A'$. Поскольку $f' > 0$, в силу (25) достаточно разобрать случай $\mathrm{Z}(g) \neq \emptyset$.

Случай 4.1: $|\mathrm{Z}(g')| = 2$ или $g' = (0, 1, 1)$. Тогда $f'g' \in A'$ в силу (24), так как $f'g' / \max(f'g') = g' \in A'$.

Случай 4.2: $g' = (1, 1, 0)$. Положим

$$B = \{h \in C^{\vee}(X) \colon h(x) \geq h(y) > h(z) = 0 \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда $B$ — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 3) предложения 8. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 4.3: $g' = (1, 0, 1)$. Аналогичен случаю 4.2.

Случай 4.4: $g' = \left(1, b_y^l, 0\right), l \in \mathbb{P}$. Положим $h = \left(1, a_y^l, a_y^l\right)$. Тогда

$$f'g' = \left(1, b_y^{r+l}, 0\right) = \left(1, a_y^{r+l}, 0\right)' = (fh)' \in A',$$

так как $h \in [\overline{e}_{y,z}] = [f] \subseteq A$ и $fh \in A$.

Случай 4.5: $g' = \left(1, 0, b_z^l\right), l \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 4.4.

Случай 4.6: $g' = \left(b_x^l, 1, 0\right), l \in \mathbb{P}$. Положим

$$B = \{h \in C^{\vee}(X) \colon \mathrm{Z}(h) = \{z\} \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда $B$ — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [g] \vee [f]$ по утверждению 4) предложения 8. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[g] \vee [f] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 4.7: $g' = \left(b_x^l, 0, 1\right), l \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 4.6.

Случай 4.8: $g' = \left(0, 1, b_z^l\right), l \in \mathbb{P}$. Тогда $f'g' = b_y^r g' \in A'$ (см. случай 2).

Случай 4.9: $g' = \left(0, b_y^l, 1\right), l \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 4.8.

Случай 5: $f' = (1, 1, 0)$. Докажем, что $f' \vee g' \in A'$.

Случай 5.1: $g'(z) > 0$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$.

Случай 5.2: $g'(x) = g'(y) > g'(z) = 0$. Тогда $f' \vee g' \in \{f', g'\} \subseteq A'$.

Случай 5.3: $g'(x) > g'(y) = g'(z) = 0$. Положим

$$B = \{h \in C^{\vee}(X) \colon h(x) \geq h(y) \geq h(z) = 0 \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда $B$ — подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 1) предложения 8, так как $[f] = [(1, 1, 0)]$ и $[g] = [(1, 0, 0)]$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Случай 5.4: $g'(y) > g'(x) = g'(z) = 0$. Аналогичен случаю 5.3.

Случай 5.5: $g'(x) > g'(y) > g'(z) = 0$. Положим

$$B = \{h \in C^{\vee}(X) \colon h(x) \geq h(y) > h(z) = 0 \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда $B$ — подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 3) предложения 8, так как $[f] = [(1,1,0)]$ и $[g] = [(1, a_y^l, 0)], l \in \mathbb{P}$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Случай 5.6: $g'(y) > g'(x) > g'(z) = 0$. Аналогичен случаю 5.5.

Докажем, что $f'g' \in A'$.

Случай 5.7: $|\operatorname{Im} g'| = 2$, причем $\mathrm{Z}(g') \neq \emptyset$, или $g'(x) = g'(y)$. Тогда $2 = |\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| \geq |\operatorname{Im} fg|$. Значит, $f'g' = fg = (fg)' \in A'$.

Случай 5.8: $1 = g'(x) > g'(y) = g'(z) > 0$ или $1 = g'(y) > g'(x) = g'(z) > 0$. Аналогичен случаю 4.2.

Случай 5.9: $g' = \left(1, b_y^r, 1\right), r \in \mathbb{P}$. Положим $h = a_y^r f \vee f g^n$, где $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\left(b_y^r\right)^n \leq a_y^r$. Тогда $h \in A$ и $h = \left(1, a_y^r, 0\right)$. Значит, $f'g' \in A'$, так как $f'g' = \left(1, b_y^r, 0\right) = h'$.

Случай 5.10: $g' = (b_x^r, 1, 1), r \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 5.9.

Случай 5.11: $g' = \left(1, b_y^r, g'(z)\right)$, где $b_y^r > g'(z) \geq 0$ и $r \in \mathbb{P}$. Тогда $f'g' \in A'$, так как $fg \in A$ и $f'g' = \left(1, b_y^r, 0\right) = \left(1, a_y^r, 0\right)' = (fg)'$.

Случай 5.12: $g' = (b_x^r, 1, g'(z))$, где $b_x^r > g'(z) \geq 0$ и $r \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 5.11.

Случай 5.13: $1 = g'(z) > g'(y) > g'(x)$. Если $g'(x) = 0$, то $(g'(y)/g(y))fg \in A$. Значит, $f'g' = (0, g'(y), 0) = ((g'(y)/g(y))fg)' \in A$.

Если $g'(x) > 0$, то положим

$$B = \{h \in C^{\vee}(X) \colon h(y) \geq h(x) > h(z) = 0 \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда $B$ — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 3) предложения 8, так как $f = (1,1,0)$ и $g(y) > g(x)$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 5.14: $1 = g'(z) > g'(x) > g'(y)$. Аналогичен случаю 5.13.

Случай 6: $f' = (1, 1, b_z^r), r \in \mathbb{P}$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$. Докажем, что $f'g' \in A'$.

Случай 6.1: $g' > 0$. Тогда $f'g' \in A'$ в силу (25), так как $f'g' > 0$.

Случай 6.2: $|\mathrm{Z}(g')| = 2$. Тогда $f' = f$, $g' = g$ и $(fg)' = fg$, так как $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = |\operatorname{Im} fg| = 2$. Значит, $f'g' \in A'$, так как $fg \in A$.

Случай 6.3: $g' = (1,1,0)$. Тогда $f'g' = g' \in A'$.

Случай 6.4: $g' = (1,0,1)$. Положим

$$B = \{h \in C^{\vee}(X) \colon h(x) \geq h(z) > h(y) = 0 \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда $B$ — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 3) предложения 8, так как $1 = f(x) > f(z)$ и $g = (1,0,1)$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 6.5: $g' = (0,1,1)$. Аналогичен случаю 6.4.

Случай 6.6: $g' = (1, b_y^l, 0)$ или $g' = (b_x^l, 1, 0)$, где $l \in \mathbb{P}$. Тогда $f'g' = g' \in A'$.

Случай 6.7: $g' = (1, 0, b_z^l), l \in \mathbb{P}$. Тогда $g = \left(1, 0, a_z^l\right)$ и $h \in [g] \subseteq A$, где $h = \left(1, 0, a_z^{l+r}\right)$. Значит, $f'g' = \left(1, 0, b_z^{l+r}\right) = h' \in A'$.

Случай 6.8: $g' = \left(0, 1, b_z^l\right), l \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 6.7.

Случай 6.9: $g' = \left(0, b_y^l, 1\right), l \in \mathbb{P}$. Положим

$$B = \{h \in C^{\vee}(X) \colon \mathrm{Z}(h) = \{x\} \text{ или } h = 0\}$$

Тогда $B$ — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 4) предложения 8, так как $1 = f(y) > f(z)$ и $1 = g(z) > g(y) > g(x) = 0$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 6.10: $g' = \left(b_x^l, 0, 1\right), l \in \mathbb{P}$. Аналогичен случаю 6.9.

Случай 7: $f' = \left(1, b_y^r, 0\right), r \in \mathbb{P}$. Докажем, что $f' \vee g' \in A'$.

Случай 7.1: $g'(z) > 0$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$.

Случай 7.2: $g' = b_y^k \left(1, b_y^l, 0\right)$ для некоторых $k \in \mathbb{R}$ и $l \in \mathbb{P}$. Не умаляя общности, будем считать, что $f'(x) \geq g'(x)$, т. е. $k \geq 0$. Заметим, что

$$f \vee g = \left(1, a_y^r, 0\right) \vee a_y^k \left(1, a_y^l, 0\right) = \left(1, a_y^r \vee a_y^{k+l}, 0\right) \in A.$$

Значит, $f' \vee g' = \left(1, b_y^r \vee b_y^{k+l}, 0\right) = (f \vee g)' \in A'$.

Случай 7.3: $g'(y) > g'(x) > g'(z) = 0$. Положим

$$B = \{h \in C^{\vee}(X) \colon \mathrm{Z}(h) = \{z\} \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда $B$ — подалгебра, $f' \vee g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 4) предложения 8, так как $1 = f(x) > f(y) > f(z) = 0$ и $1 = g(y) > g(x)$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f' \vee g' \in A'$.

Докажем, что $f'g' \in A'$.

Случай 7.4: $|\operatorname{Im} g'| = 3$, $g'(x) = 0$ или $g'(y) = 0$. Тогда $f'g'/\max(f'g') = (fg/\max(fg))'$. Значит, $f'g' \in A'$ в силу (24), так как $fg/\max(fg) \in A$.

Случай 7.5: $g'(y) > g'(x) > 0$. Положим

$$B = \{h \in C^{\vee}(X) \colon \mathrm{Z}(h) = \{z\} \text{ или } h = 0\}.$$

Тогда $B$ — подалгебра, $f'g' \in B$ и $B \subseteq [f] \vee [g]$ по утверждению 4) предложения 8, так как $1 = f(x) > f(y) > f(z) = 0$ и $1 = g(y) > g(x)$. Отсюда $B \subseteq A'$, так как $[f] \vee [g] \subseteq A$ и $B' = B$ в силу (20). Значит, $f'g' \in A'$.

Случай 7.6: $g'(x) > g'(y) > 0$. Тогда $g' = g'(x) \left(1, b_y^l, g'(z)/g'(x)\right)$ для некоторого $l \in \mathbb{P}$. Положим $h = g'(x) \left(a_y^l f \vee f^n\right)$, где $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^n(y) \leq a_y^l f(y)$. Тогда $h = g'(x) \left(1, a_y^{r+l}, 0\right) \in [f] \subseteq A$. Значит, $f'g' = g'(x) \left(1, b_y^{r+l}, 0\right) = h' \in A'$.

Случай 8: $f' = \left(1, b_y^r, \left(b_y^r\right)^{1+p(t-1)}\right), r, p \in \mathbb{P}$. Тогда $f' \vee g' \in A'$ в силу (25), так как $f' \vee g' > 0$. Докажем, что $f'g' \in A'$.

Случай 8.1: $g' > 0$. Тогда $f'g' \in A'$ в силу (25), так как $f'g' > 0$.

Случай 8.2: $\mathrm{Z}(g') \neq \emptyset$. Аналогичен случаю 7.

Итак, если $A$ — подалгебра, то $A'$ — подалгебра.

Обратно, пусть $A$ — подмножество полукольца $C^{\vee}(X)$ такое, что его образ $A'$ является подалгеброй. Заметим, что $\psi_T^{-1} = \psi_{T'}$, где $T' = (T_x', T_y', T_z')$ и

$$T_x' = (b_x, a_x, t_x, s_x), \quad T_y' = (b_y, a_y, t_y, s_y), \quad T_z' = (b_z, a_z, t_z, s_z).$$

Поэтому, как было показано ранее, $\psi_{T'}(A') = A$ — подалгебра. □

Обозначим через $\alpha_{1,\psi_T}$ автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(C^{\vee}(X))$, $|X| = 3$, который согласно предложению 16 индуцирует преобразование $\psi_T$.

**Теорема 3.** *Для любого изоморфизма $\alpha_1$ решеток $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y,S))$ справедливы следующие утверждения*:

1) *отображение $\varphi_{\alpha_1} \colon X \to Y$, заданное правилом*

$$\varphi_{\alpha_1}(x) = x' \Longleftrightarrow \alpha_1(spb\mathrm{Min}_x) = spb\mathrm{Min}_{x'},$$

*является гомеоморфизмом*;

2) *если* $|X| \neq 3$, *то* $\alpha_1$ *индуцируется изоморфизмом полуколец* $C(X,S)$ *и* $C(Y,S)$, *который действует по правилу* $f \mapsto \psi_t\left(f \circ \varphi_{\alpha_1}^{-1}\right)$ *для некоторого автоморфизма* $\psi_t$ *полукольца* $C(X,S)$;

3) *если* $|X| = 3$, *то* $\alpha$ *индуцируется отображением полуколец* $C(X,S)$ *и* $C(Y,S)$, *которое действует по правилу* $f \mapsto \psi_T\left(f \circ \varphi_{\alpha_1}^{-1}\right)$ *для некоторого преобразования* $\psi_T$ *полукольца* $C(X,S)$.

*Доказательство.* Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, соглашения 1–6 и теорема 3].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение изоморфизма $\alpha_1$ на решетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ является изоморфизмом решеток $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(Y))$. Отсюда и из утверждения 1) для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что отображение $\varphi_{\alpha_1}$ является гомеоморфизмом пространств $X$ и $Y$.

Отождествим точки пространств $X$ и $Y$ гомеоморфизмом $\varphi_{\alpha_1}$. После чего, не умаляя общности, будем считать, что $\alpha_1$ — автоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(C^\vee(X))$ такой, что $\alpha_1 \colon spb\mathrm{Min}_x \mapsto spb\mathrm{Min}_x$, $x \in X$.

Пусть $|X| \neq 3$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение автоморфизма $\alpha_1$ на решетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ является автоморфизмом решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Отсюда и из утверждения 2) для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что ограничение изоморфизма $\alpha_1$ на решетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ индуцируется ограничением на полуполе $U^\vee(X)$ некоторого автоморфизма $\psi_t$ полукольца $C^\vee(X)$. Тогда $\alpha_1([f]) = \alpha_{1,\psi_t}([f])$ для всех u-подалгебр $[f]$ полукольца $C^\vee(X)$. Кроме того, легко видеть, что $\alpha_1, \alpha_{1,\psi_t} \colon spb\mathrm{Min}_x \mapsto spb\mathrm{Min}_x$, $x \in X$. Значит, $\alpha_1 = \alpha_{1,\psi_t}$ по утверждению 1) предложения 12.

Пусть $|X| = 3$. Из предложения 9 и замечания 6 получаем, что ограничение автоморфизма $\alpha_1$ на решетку $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$ является автоморфизмом решетки $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Отсюда и из утверждения 3) для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что найдется преобразование $\psi_T$ полукольца $C^\vee(X)$ такое, что $\alpha_1 = \alpha_{1,\psi_T}$ на решетке $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$. Тогда $\alpha_1([f]) = \alpha_{1,\psi_T}([f])$ для всех u-подалгебр $[f]$ полукольца $C^\vee(X)$. Кроме того, легко видеть, что $\alpha_1, \alpha_{1,\psi_T} \colon spb\mathrm{Min}_x \mapsto spb\mathrm{Min}_x$, $x \in X$. Значит, $\alpha_1 = \alpha_{1,\psi_T}$ по утверждению 1) предложения 12. □

**Предложение 17.** *Произвольные автоморфизмы* $\alpha_{1,\psi_t}$ *и* $\alpha_{1,\psi_T}$, *где*

$$T\colon T_x = (a_x, b_x, s_x, t_x),\ T_y = (a_y, b_y, s_y, t_y),\ T_z = (a_z, b_z, s_z, t_z),$$

*равны тогда и только тогда, когда*

$$b_x = a_x^t,\ t_x = s_x, \quad b_y = a_y^t,\ t_y = s_y, \quad b_z = a_z^t,\ t_z = s_z. \tag{26}$$

*Доказательство.* Для $S = \mathbb{P}^\vee$ — это [1, предложение 9].

Пусть $S = \mathbb{R}_+^\vee$. Если выполняется условие (26), то, очевидно, $\psi_t = \psi_T$. Значит, $\alpha_{1,\psi_t} = \alpha_{1,\psi_T}$.

Обратно, если $\alpha_{1,\psi_t} = \alpha_{1,\psi_T}$, то $\alpha_{1,\psi_t} = \alpha_{1,\psi_T}$ на решетке $\mathbb{A}(U^\vee(X))$. Отсюда и из предложения 26 для $S = \mathbb{P}^\vee$ получаем, что условие (26) выполняется. □

**Замечание 8.** Из предложения 17 получаем, что семейство автоморфизмов $\alpha_{1,\psi_T}$ строгим образом включает семейство автоморфизмов $\alpha_{1,\psi_t}$. Вместе с теоремами 1 и 3 это означает, что в случае $|X| = |Y| = 3$ существуют изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_1(C(X,S))$ и $\mathbb{A}_1(C(Y,S))$, которые не индуцируются изоморфизмами полуколец $C(X,S)$ и $C(Y,S)$.

## References

[1] V.V. Sidorov, *Isomorphisms of lattices of subalgebras of the semifields of continuous positive functions with max-addition*, Sib. Electron. Math. Izv., **16** (2019), 1493–1530. Zbl 07128004

[2] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Springer-Verlag, New York, 1976. Zbl 0327.46040

[3] I.M. Gelfand, A.N. Kolmogorov, *On rings of continuous functions on topological spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **22**:1 (1939), 11–15. Zbl 0021.41103

[4] E. Hewitt, *Rings of real-valued continuous functions. I*, Trans. Am. Math. Soc., **64**:1 (1948), 45–99. Zbl 0032.28603

[5] E.M. Vechtomov, *Lattice of subalgebras of the ring of continuous functions and Hewitt spaces*, Mat. Notes, **62**:5 (1997), 575–580. Zbl 0924.54021

[6] V.V. Sidorov, *Lattices of subalgebras of semirings of continuous nonnegative functions with the max-plus*, J. Math. Sci., **221**:3 (2017), 409–435. Zbl 06856055

[7] E.M. Vechtomov, V.V. Sidorov, *Determinability of Hewitt spaces by the lattices of subalgebras of semifields of continuous positive functions with max-plus*, Tr. Inst. Mat. i Mech. UrO RAN **21**:3 (2015), 78–88.

[8] V.V. Sidorov, *Determinability of Hewitt spaces by the lattices of subalgebras with unit of semifields of continuous positive functions with max-plus*, Lobachevskii J. Math., **38**:4 (2017), 741–750. Zbl 1379.54016

[9] V.V. Sidorov, *Determinability of semirings of continuous nonnegative functions with max-plus by the lattices of their subalgebras*, Lobachevskii J. Math., **40**:1 (2019), 90–100. Zbl 07080623

Vadim Veniaminovich Sidorov
Vyatka State University,
36, Moskovskaya str.,
Kirov, 610000, Russia
*E-mail address*: sedoy_vadim@mail.ru