S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 144–144 (2015) УДК 512.54
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 20D60, 05C25

ОДНО СЛЕДСТВИЕ ОПИСАНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП БЕЗ ЭЛЕМЕНТОВ ПОРЯДКА 6

А.С. Кондратьев, М.С. Нирова

Abstract. Let G be a finite group. The set of all prime divisors of the order of G is denoted by $\pi(G)$. The Gruenberg-Kegel graph (the prime graph) $\Gamma(G)$ of G is defined as the graph with the vertex set $\pi(G)$ in which two different vertices p and q are adjacent if and only if G contains an element of order pq. If the order of G is even, then $\pi_1(G)$ denotes the connected component of $\Gamma(G)$ containing 2. It is actual the problem of describing finite groups with disconnected Gruenberg-Kegel graphs. In the present article, all finite non-solvable groups G with $3 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$ are determined.

Keywords: finite group, non-solvable group, Gruenberg-Kegel graph.

1. Введение

Пусть G — конечная группа. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G. Граф Грюнберга — Кегеля (граф простых чисел) $\Gamma(G)$ группы G определяется как граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$. Если порядок группы G четен, то $\pi_1(G)$ обозначает связную компоненту графа $\Gamma(G)$, содержащую 2.

В рамках общей задачи изучения конечных групп по свойствам их графов Грюнберга — Кегеля (см. [9]) наше внимание прежде всего привлекает более

Кондратьев А.С., Нирова М.С., Одно следствие описания конечных групп без элементов порядка 6.

Исследование первого автора выполнено при поддержке министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта "Уральский математический центр" (соглашение № 075-02-2023-935).

Received , published .

подробное изучение класса конечных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля.

Это мотивировано следующим. Указанный класс широко обобщает класс конечных групп Фробениуса, что сразу видно из известной общей структурной теоремы Грюнберга — Кегеля о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля (см. предложение 1 ниже). Роль же групп Фробениуса в теории конечных групп совершенно исключительна.

Заметим также, что класс конечных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля совпадает с классом конечных групп, имеющих изолированную подгруппу (т. е. собственную подгруппу, содержащую централизатор каждого своего неединичного элемента), который изучался многими авторами (см., например, [1]).

Конечные простые группы с несвязным графом Грюнберга — Кегеля были классифицированы (по модулю классификации конечных простых групп) в работах Уильямса [14], А.С. Кондратьева [8] и Ииери и Ямаки [7]. Они составляют довольно узкий подкласс всех конечных простых групп, однако включают многие “малые” в различных смыслах группы, часто возникающие в исследованиях. Например, все конечные простые группы исключительного лиева типа, кроме групп $E_7(q)$ при $q > 3$, а также простые группы из известного “Атласа конечных групп” [3], кроме группы A_{10}, имеют несвязный граф Грюнберга — Кегеля. Эта классификация была применена Лучидо [12] для получения аналогичной классификации для всех конечных почти простых групп.

В связи с теоремой Грюнберга — Кегеля и классификации конечных почти простых групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля естественно возникает следующая проблема.

Проблема. *Описать строение конечных неразрешимых групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля и нетривиальной подгруппой Фиттинга.*

Эта проблема во многом сводится к изучению модулярных представлений конечных простых групп (подробнее см. в [10]). По этой важной проблеме получены только некоторые частные результаты, в общем случае она далека от решения.

В настоящей статье, используя описание конечных групп без элементов порядка 6 (см. предложение 4), мы получаем следующий полезный для исследования указанной проблемы результат.

Теорема. *Пусть G — конечная неразрешимая группа. Тогда $3 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$ если и только если группа G изоморфна одной из следующих групп: $L_2(2^n)$, $L_2(3^n)$, $PGL_2(3^n)$, $L_2(3^n).2_3$ (n четно), $L_2(q)$ ($q \equiv \pm 5 \ (mod\ 12)$), $L_3(4)$, расширение нетривиальной элементарной абелевой 2-группы E посредством группы $L_2(2^n)$, где E как G/E-модуль изоморфна прямой сумме естественных $GF(2^n)L_2(2^n)$-модулей.*

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология, в основном, стандартны, их можно найти в [3, 4, 5].

Если группа G действует на группе H, то мы будем говорить, что неединичный элемент $g \in G$ действует на H *свободно* (или *без неподвижных точек*), если $C_H(g)=1$. Если n — четное натуральное число, то через $L_2(3^n).2_3$ обозначается группа $L_2(3^n)\langle df_1\rangle$, где $PGL_2(3^n)=L_2(3^n)\langle d\rangle$ и f_1 — инволютивный полевой автоморфизм группы $L_2(3^n)$.

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теоремы.

Предложение 1 (теорема Грюнберга —Кегеля [14, теорема A]). *Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга–Кегеля. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

(а) *G — группа Фробениуса;*

(б) *G — 2-фробениусова группа, т. е. $G=ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G, а AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно;*

(в) *$\overline{G}:=G/F(G)$ — почти простая группа с цоколем T, для которого $s(T)\geq s(G)$ и $\pi(F(G))\cup\pi(\overline{G}/T)\subseteq\pi_1(G)$.*

Предположим, что выполняется утверждение (в) предложения 1 и $F(G)\neq 1$. Тогда любой элемент простого порядка из $\pi(G)\setminus\pi_1(G)$ группы G действует свободно на $F(G)$. Пусть K и L — два соседних члена главного ряда группы G ($K<L$), содержащиеся в $F(G)$. Тогда (главный) фактор $V=L/K$ группы G яляется элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа $p\in\pi_1(G)$ (мы называем его *p-главным фактором* группы G). Подгруппа V содержится в центре группы $F(G)/K$, так как V — минимальная нетривиальная нормальная подгруппа в G/K, а группа $F(G)/K$ нильпотентна. Поэтому $F(G)/K\leq C_{G/K}(V)$. Если $F(G)/K<C_{G/K}(V)$, то фактор-группа группы $C_{G/K}(V)$ по ее нормальной подгруппе $F(G)/K$ изоморфна подгруппе группы $\overline{G}$, содержащей ее цоколь T, что противоречит несвязности графа $\Gamma(G)$. Таким образом, $C_{G/K}(V)=F(G)/K$ и, следовательно, V можно рассматривать как точный неприводимый $GF(p)\overline{G}$-модуль, причем каждый элемент простого порядка из $\pi(\overline{G})\setminus\pi_1(G)$ группы $\overline{G}$ действует свободно на V.

Предложение 2 ([13, предложение 3.2]). *Пусть G — конечная группа, $H\trianglelefteq G$, $G/H\cong L_2(q)$, где $q>5$ нечетно и $C_H(t)=1$ для некоторого элемента t порядка 3 из $G\setminus H$. Тогда $H=1$.*

Предложение 3 ([6, теорема 8.2]). *Пусть G — конечная группа, $1\neq H\trianglelefteq G$ и $G/H\cong L_2(2^n)$, где $n\geq 2$. Предположим, что $C_H(t)=1$ для некоторого элемента $t\in G\setminus H$ порядка 3. Тогда $H=O_2(G)$ и H является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{2n} в G, каждая из которых как G/H-модуль изоморфна естественному $GF(2^n)SL_2(2^n)$-модулю.*

Предложение 4 ([11, теорема 2]). *Пусть G — конечная неразрешимая группа и 3 делит $|G|$. Тогда G не содержит элементов порядка 6 если и только если группа $O^{\{2,3\}'}(G/O_{\{2,3\}'}(G))$ изоморфна одной из следующих групп: $L_2(2^n)$, $L_2(3^n)$, $PGL_2(3^n)$, $L_2(3^n).2_3$ (n четно), $L_2(q)$ ($q\equiv\pm 5\ (mod\ 12)$), $L_3(2^n)$ ($n\geq 2$, $(2^n-1)_3\leq 3$), $U_3(2^n)$ ($n\geq 2$, $((2^n+1)_3\leq 3)$, расширение нетривиальной элементарной абелевой 2-группы E посредством группы $L_2(2^n)$, где E как G/E-модуль изоморфна прямой сумме естественных $GF(2^n)L_2(2^n)$-модулей.*

3. Доказательство теоремы

Докажем необходимость. Пусть G — конечная неразрешимая группа и $3 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$. Тогда в G нет элементов порядка 6 и по предложению 4 группа $H := O^{\{2,3\}'}(G/O_{\{2,3\}'}(G))$ изоморфна одной из следующих групп: $L_2(2^n)$, $L_2(3^n)$, $PGL_2(3^n)$, $L_2(q)$ ($q \equiv \pm 5$ $(mod\ 12)$), $L_3(2^n)$ ($(2^n-1)_3 \leq 3$), $U_3(2^n)$ ($3 \mid (2^n-1)$ или $(2^n+1)_3 = 3$), расширение нетривиальной элементарной абелевой 2-группы E посредством группы $L_2(2^n)$, где E как G/E-модуль изоморфна прямой сумме естественных $GF(2^n)L_2(2^n)$-модулей.

Поскольку $3 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$, граф $\Gamma(G)$ несвязен. По предложению 1 выполняется одно из утверждений (а), (б) или (в) этого предложения.

Если выполняется утверждение (а), то ввиду [4, теорема 10.3.1, замечание на стр. 377] имеем $3 \in \pi_1(G)$, что противоречит условию.

Пусть выполняется утверждение (б). Тогда $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G, а AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно. Ввиду свойств групп Фробениуса (см. например, [4, теорема 10.3.1]) подгруппа A нильпотентна, а подгруппа B циклическая и, следовательно, группа $Aut(B)$ абелева. Поскольку подгруппа C изоморфна подгруппе из $Aut(B)$, она абелева. Получаем, что группа G разрешима, что противоречит условию.

Итак, выполняется утверждение (в). Тогда $O_{\{2,3\}'}(G) \leq S(G) = F(G)$, $\overline{G} := G/F(G)$ — почти простая группа с цоколем T и $\pi(F(G)) \cup \pi(\overline{G}/T \subseteq \pi_1(G)$. Ясно, что $3 \in \pi(T)$ и элемент порядка 3 из T действует свободно на $F(G)$.

Предположим, что $O_{\{2,3\}'}(G) \neq 1$. Если $T \cong L_2(q)$ для некоторого q, то ввиду предложений 2 и 3 имеем $O_{\{2,3\}'}(G)) = 1$; противоречие с предположением. Поэтому $T \cong L_3^{\epsilon}(q)$, где $\epsilon \in \{+,-\}$ и $q = 2^n$ для некоторого $n \geq 2$. Ввиду [2, табл. 8.3, 8.5] группа T содержит подгруппу, изоморфную $L_2(q)$, и мы приходим к противоречию как выше.

Таким образом, $O_{\{2,3\}'}(G) = 1$ и, следовательно, $F(G) = O_2(G)$ и $H = O^{\{2,3\}'}(G)$.

Предположим, что $T \cong L_3^{\epsilon}(2^n)$, где $\epsilon \in \{+,-\}$ и $n \geq 2$. Тогда $F(G) = O_2(G) = 1$ и ввиду [8] либо $3 \in \pi_1(T) = \pi(2(2^{2n}-1)) \subseteq \pi_1(G)$, либо $T \cong L_3(4)$. Первый случай противоречит условию. Поэтому $T \cong L_3(4)$. Поскольку $Out(T)$ является $\{2,3\}$-группой (см. [3]), имеем $G = H = T$, т. е. выполняется утверждение теоремы.

Итак, можно считать, что $T \cong L_2(q)$ для некоторого q. Осталось доказать, что $G = H$.

Предположим, что $H < G$. Ввиду [5, теорема 2.5.12] группа $\overline{G}$ изоморфна подгруппе из $Aut(T) = Inndiag(T) \rtimes F$, где F — циклическая группа полевых автоморфизмов группы $T \cong L_2(q)$ (мы отождествляем группы T и $Inn(T)$). Поскольку $\overline{G}/H$ — нетривиальная $\{2,3\}'$-группа, группа $\overline{G}$ содержит элемент x простого порядка $p > 3$, индуцирующий на T нетривиальный полевой автоморфизм. Но ввиду [5, теорема 4.9.1] централизатор $C_T(x)$ содержит подгруппу, изоморфную $L_2(\sqrt[p]{q})$. Ясно, что порядок этой подгруппы делится на 6 и, следовательно, $3 \in \pi_1(G)$. Полученное противоречие доказывает, что $H = G$ и, следовательно, выполняется условие необходимости теоремы.

Докажем достаточность. Пусть G — группа из заключения теоремы. Ясно, что $3 \in \pi(G)$. По предложению 4 в G нет элементов порядка 6. Теперь условие

$3 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$ легко следует из вида компонент связности несвязного графа Грюнберга–Кегеля группы G (см. [14, 8, 12]). Достаточность доказана.

Теорема доказана.

References

[1] Z. Arad, W. Herfort, *Classification of finite groups with a CC-subgroup*, Comm. Algebra, **32**:6 (2004), 2087–2098.

[2] J.N. Bray, D.F. Holt, C.M. Roney-Dougal, *The maximal subgroups of low-dimensional finite classical groups*, Cambrige University Press, Cambridge, 2013.

[3] J.H. Conway, R.T. Curtis., S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[4] D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, New York, 1968.

[5] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, *The classification of the finite simple groups. Number* 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[6] G. Higman, *Odd characterizations of finite simple groups: lecture notes*, University of Michigan, Michigan, 1968.

[7] N. Iiyori, H. Yamaki, *Prime graph components of the simple groups of Lie type over the fields of even characteristic*, J. Algebra, **155**:2 (1993), 335–343; Corrigenda, J. Algebra, **181**:2 (1996), 659.

[8] A.S. Kondrat'ev, *Prime graph components of finite simple groups*, Math. USSR Sb., **67**:1 (1990), 235–247.

[9] A.S. Kondrat'ev, *Finite groups with given properties of their prime graphs*, Algebra and Logic, **55**:1 (2016), 77–82.

[10] A.S. Kondrat'ev, I.V. Khramtsov, *The complete reducibility of some $GF(2)A_7$-modules*, Труды Института математики и механики УрО РАН, **18**:3 (2012), Proc. Steklov Inst. Math., **283** (2013), Suppl. 1, S86–S90.

[11] A.S. Kondrat'ev, N.A. Minigulov, *Finite groups without elements of order six*, Math. Notes, **104**:5 (2018), 696–701.

[12] M.S. Lucido, *Prime graph components of finite almost simple groups*, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **102** (1999), 1–22; *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **107** (2002), 189–190.

[13] W.B. Stewart, *Groups having strongly self-centralizing* 3*-centralizers*, Proc. London Math. Soc. (3), **26**:4 (1973), 653–680.

[14] J.S. Williams, *Prime graph components of finite groups*, J. Algebra, **69**:2 (1981), 487–513.

Anatoly Semenovich Kondrat'ev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS,
S. Kovalevskaya St., 16,
620108, Yekaterinburg, Russia
Ural Federal University, Ural Matematical Center,
Mira St., 19,
620002, Yekaterinburg, Russia
E-mail address: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Marina Sefovna Nirova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
Chernyshevsky St., 175,
360004, Nalchik, Russia
E-mail address: nirova_m@mail.ru