

РЕЦЕНЗИЯ СТАТЬИ БАЙЖАНОВА-УМБЕТБАЕВА CONSTANT EXPANSION OF THEORIES AND THE NUMBER OF COUNTABLE MODELS

Настоящая статья касается метода константных обогащений полной теории для исследования динамики изменения числа счетных моделей. Тематика несомненно является интересной для широкого круга специалистов. В настоящей статье утверждается, что вопрос уменьшения числа счетных моделей с континуума до счетного числа остается открытым. К работе у рецензента появились вопросы и замечания, которые не позволяют пока рекомендовать ее к публикации. После ответа на все возникшие вопросы и устранения обнаруженных неточностей статья может быть рекомендована к публикации.

Abstract

В данном абстракте одновременно употребляются слова "article" и "paper". Надо оставить что-то одно из них.

Первое предложение рекомендую переписать в следующем виде: The present paper is dedicated to the method of constant expansion of a complete theory for studying its number of countable models.

Во втором предложении заменить "calculating" на "counting".

В третьем предложении заменить словосочетание "by means of a constant expansion" на "by a constant expansion".

Ответ: Изменения внесены

Keywords

Добавить определенный артикль "the" перед словосочетанием "number of countable models".

Ответ: Изменения внесены

Параграф 1

Страница 145, строка 1 второго абзаца: заменить " 2_0^{\aleph} " на " 2^{\aleph_0} ". Вообще в этом параграфе

Вы где-то используете \aleph_0 , а где-то ω . Желательно остановится на одном варианте.

Страница 145, строка 3 третьего абзаца: добавить определенный артикль "the" перед словом "definition".

Ответ: Изменения внесены

Параграф 2

Страница 145, строка 2 первого абзаца параграфа 2: вместо $q(\bar{x})$ следует писать $q(\bar{y})$.

Ответ: Изменения внесены

Страница 145, строка 3: вместо "2-A-definable formula" следует писать " \mathcal{L}_A -formula".

Ответ: Изменения внесены

Страница 146, Definition 1: вместо "2-type" следует писать " $l(\bar{x}) + l(\bar{y})$ -type".

Ответ: Изменения внесены

Страница 146, строка 9: добавить определенный артикль "the" перед словом "definition".

Ответ: Изменения внесены

Страница 146, строка 10: вместо "A-definable formula" следует писать " \mathcal{L}_A -formula".

Ответ: Изменения внесены

Страница 146, аксиома 1 для T_0 : следует переписать в следующем виде: « is a dense linear ordering without endpoints».

Ответ: Изменения внесены

Страница 146, аксиома 2 для T_0 : достаточно написать в следующем виде: " $\forall x[f(f(x)) = x]$ ".

Ответ: Изменения внесены

Страница 146, строка 33: заменить "and then complete" на "and therefore T_0 is complete".

Ответ: Изменения внесены

Страница 148, строки 2-4 (аксиома 4 для T_2): Не совсем понятно, что имеется в виду. В Примере Омарова h_i было биективным отображением между этими двумя множествами, сохраняющим $<$ и f . Здесь написано так, будто h_i — это перестановка всего носителя, сохраняющая $<$ и дополнительно сохраняющая f на выделенных множествах.

Добавили что h_i это биективное отображение двух разных множеств стр. 148, строки 5-8:

4. h_i is a bijective mapping preserving $<$ and f between two different sets definable by the following formulas:

$$A(x) \wedge (c_i < x < f(c_i)) \text{ and } A(x) \wedge (c_{i+1} < x < f(c_{i+1})), i < \omega.$$

That is $h_i : A(M) \cap (c_i, f(c_i)) \rightarrow A(M) \cap (c_{i+1}, f(c_{i+1}))$.

Ответ: Изменения внесены

Страницы 147-148 (аксиомы для T_2): Непонятно, почему заданная таким образом теория должна быть полной, более того, она по-видимому и не является таковой, поскольку на мой взгляд например не зависит от формулы

$$\forall x \exists y \forall z [H(x) \wedge H(y) \wedge ((A(z) \wedge z < x < f(z)) \rightarrow h_i(z) < y < h_i(f(z)))].$$

Возможно, из-за неясности с пунктом 4. Кванторы следует брать только по множествам, указанным в этом пункте.

Вопрос Возможно в Вашей формуле Вы имели в виду, что

$$\forall x [H(x) \rightarrow \exists y (H(y) \wedge \forall z (A(z) \wedge z < x < f(z)) \rightarrow h_i(z) < y < h_i(f(z)))]$$

Но и в этом случае эта формула не верна, так как в этой формуле H определяются не элементами, а сечением.

Добавили уточнения в аксиому 5

стр. 148, строки 9-17:

5. $\forall x (c_i < x < c_{i+1} \rightarrow (H(x) \leftrightarrow h_i(x) = x)), i < \omega.$

Notice that for $\alpha \in H(M)$ such that $c_i < \alpha < f(c_i)$ the formula

$$K(x, \alpha) := H(\alpha) \wedge \exists y (A(y) \wedge c_i < y < \alpha \wedge h_i(y) = x)$$

defines an irrational cut in $(c_{i+1}, f(c_{i+1}))$ and provides that the following formula is satisfiable:

$$\neg \forall x [(H(x) \wedge c_i < x < f(c_i)) \rightarrow \exists y (H(y) \wedge \forall z (A(z) \wedge (c_i < z < x < f(z)) \rightarrow h_i(z) < y < h_i(f(z))))].$$

Добавили доказательство полноты T_2 со стр. 148 строки 16 до стр. 151 строки 10.

Ответ: Изменения внесены

Параграф 3

Страница 148, строка 3 параграфа 3: заменить "next" на "following".

Ответ: Изменения внесены

Страница 148, строки 5-9 параграфа 3: Из-за неполноты теории T_2 сразу же вытекают вопросы к полноте этих типов, в частности, в некоторых пополнениях теории T_2 эти типы не полны.

Ответ: Изменения внесены

Добавили уточнения

стр. 151 строки 5-11 параграфа 3

For $j < \omega$ consider extentions of $q_j(x)$ to the complete types. Every element from $q(\mathfrak{M})$ must satisfy exactly one of the following 1-formulas: $H(x)$, $A_l(x)$, $A_r(x)$. Therefore $q_j(x)$ has exactly three completions:

$$\begin{aligned} q_j^1(x) &= q_j(x) \cup \{H(x)\}; \\ q_j^2(x) &= q_j(x) \cup \{A_l(x)\}; \\ q_j^3(x) &= q_j(x) \cup \{A_r(x)\}; \\ q_j(\mathfrak{M}) &= q_j^1(\mathfrak{M}) \cup q_j^2(\mathfrak{M}) \cup q_j^3(\mathfrak{M}). \end{aligned}$$

Страница 148, строки 2-4 снизу (формула $S^{j+k}(x, \alpha)$): Таким образом, элементы x , для которых выполнена эта формула, это в точности все x из $A \cap B_n$, прообразы которых меньше α , и всех из $H \cap B_n$, которые лежат под образом некоторой дуги меньшей α .

Это верно, если немного подкорректировать Ваш вопрос и внести индексы следующим образом:

Формула $S^{j+k}(x, \alpha)$: Таким образом, элементы x , для которых выполнена эта формула, это в точности все x из $A \cap B_n^{j+k}$, прообразы которых меньше α , и всех из $H \cap B_n^{j+k}$, которые лежат под образом некоторой дуги меньшей α из $A \cap B_n^j$.

Т.е. эту формулу можно трактовать как "элемент x лежит слева от элемента α ". Верно? Здесь через множество B_n обозначается интервал

$$[(h_{j+k-1}(\dots(h_1(h_0(b_n))))\dots), (h_{j+k-1}(\dots(h_1(h_0(f(b_n))))\dots)]$$

т.е. интервал под образом дуги b_n после соответствующих переносов функциями h_i , в который обязаны попадать x , удовлетворяющие формуле $S^{j+k}(x, \alpha)$.

Не совсем верно, эту формулу можно трактовать как "элемент x лежит слева от сечения определяемого элементом α ," так как $\alpha \in q_j^1(M)$, а сечение определяется в $q_{j+k}^1(M)$.

Ответ: Изменения внесены

Страница 149, строка 7: Что означает что формула splits некоторый тип? Делит? Если да, то совсем не очевидно почему в этом случае это так.

Добавили определение Splits и уточнения

стр. 145, строки снизу 7-8:

Definition 1. We say $\phi(x)$ splits a linearly ordered set B (not necessary definable) if $\phi(M) \cap B < \neg\phi(M) \cap B$.

стр. 152, строки 10-15:

And, similarly to the remark to Axiom 5, $S^{j+k}(x, \alpha)$ splits q_{j+k}^s , for every $s \in \{1, 2, 3\}$. In particular $S^{j+k}(x, \alpha)$ splits $q_{j+k}(M)$, if

$$(S^{j+k}(M, \alpha) \cap q_{j+k}(M)) \cup (\neg S^{j+k}(M, \alpha) \cap q_{j+k}(M)) = q_{j+k}(M)$$

and,

$$S^{j+k}(M, \alpha) < (\neg S^{j+k}(M, \alpha) \cap q_{j+k}(M)).$$

The same is true for the formula $S^i(M, \alpha)$.

Ответ: Изменения внесены

Страница 149, формулировка Теоремы 1: следует писать в следующем виде:
The theory T_2 has countably many countable models ...

Ответ: Изменения внесены

Страница 149, формулировка Claim 1: следует писать в следующем виде:
The theory T_2 has at least countably many non-isomorphic ...

Ответ: Изменения внесены

Страница 149, строка 4 доказательства Claim 1: заменить "countable number of" на "countably many".

Ответ: Изменения внесены

Страница 150, формулировка Claim 3: зачем используется слово Then? Возможно, где-то потеряно условие данного утверждения.

Новая формулировка Claim 3

стр. 153 строки 16-18:

Claim 3 For every $j \neq k < \omega$, $\mathfrak{M}_{j,k}$ contains an infinite number of realizations of q_i^1 , q_i^2 and q_i^3 for $i < \omega$. And consequently, for every $i < \omega$,

$$\langle q_j^2(\mathfrak{M}_{j,k}); =, <, f \rangle \cong \langle q_i^2(\mathfrak{M}_{j,k}); =, <, f \rangle.$$

Ответ: Изменения внесены

Страница 150, строка 1 доказательства Claim 3: почему мы можем предположить, что $\alpha_k \in S^k(M, \alpha_j) \wedge H(M)$? Для пары α_k, α_j случай $\alpha_k \notin S^k(M, \alpha_j) \cap H(M)$ делится на два подслучая: 1. $\alpha_j \in S^j(M, \alpha_k) \wedge H(M)$; 2. $\alpha_j \notin S^j(M, \alpha_k) \wedge H(M)$.

Только первый из них учитывается при Вашем предположении.

Внесли правки согласно Вашим замечаниям и новое доказательство Claim 3 на стр. 153, строки 19-34.

Ответ: Изменения внесены

Страница 150, строки 7-8: Разве это не является буквально частью определения h_i ?

Добавили уточнения

стр. 153, строки 7-8 снизу:

Since h_i and h_i^{-1} are bijections for any $i < \omega$, $\langle q_j^2(\mathfrak{M}_{j,k}); =, <, f \rangle \cong \langle q_i^2(\mathfrak{M}_{j,k}); =, <, f \rangle$.

Ответ: Изменения внесены

Страница 150, первое предложение доказательства Claim 4: Почему?

Ответ: Изменения внесены

Страница 150, второе предложение доказательства Claim 4: Выглядит как что-то, из чего выводится противоречие с предыдущим утверждением... Страница 150, третье предложение доказательства Claim 4, условие $\alpha_k \in S^k(M, \alpha_j) \wedge H(M)$: Опять таки, почему мы можем это предположить, куда теряется случай когда они оба лежат не слева друг от друга?

Ответ: Изменения внесены

Страница 150, строка 13 доказательства Claim 4: Нет, h оставляет не месте элементы $q_k(N) \cap H(N)$, сами же его так определяли.

Ответ: Изменения внесены

Страница 150, строка 13-14 доказательства Claim 4: Почему "we can map them to $q(\mathfrak{M}_{j,k})$ "? Ведь \mathfrak{N} и $\mathfrak{M}_{j,k}$ все же разные модели.

Ответ: Изменения внесены

Страница 150, строка 14-16 доказательства Claim 4: Крайне непонятное утверждение. Во-первых, в $q(\mathfrak{N})$ есть элементы b такие, что $f(b) < b$, или такие, что $S^0(b, \alpha_k) S^0(f(b), \alpha_k)$ одновременно, а во-вторых, то что здесь вероятно подразумевается буквально означает, что α_k и α_j одновременно лежат не слева друг от друга, что противоречит Вашему начальному предположению.

Ответ: Изменения внесены

Страница 150, строка 17 доказательства Claim 4: Что здесь имеется ввиду? Что они не пусты? Если да, то это и так очевидно.

Ответ: Изменения внесены

Страница 151, строка 6, условие (2): Почему? Куда делись элементы x из $q(\mathfrak{M}_{j,k})$ такие, что $S^0(x, \alpha_k) \wedge \neg S^0(f(x), \alpha_k)$ и $S^0(x, \alpha_j) \wedge \neg S^0(f(x), \alpha_j)$? Если бы это было верно, то как минимум в одном случае следовало остаться на левых концах?

Ответ: Изменения внесены

Страница 151, строка 7: Что здесь имеется ввиду под represented, если что $q(\mathfrak{M}_{j,k})$ равно вот этому всему, то вообще там еще и элементы из H есть.

Ответ: Изменения внесены

Благодарим за полезные замечания, внесли правки согласно Вашим замечаниям и новое доказательство Claim 4 на стр. 153 строка 3 снизу - стр. 155 строка 18 снизу.

Ответ: Изменения внесены

Страница 151, строка 9: заменить "next" на "following".

Ответ: Изменения внесены

Страница 153, пункт 1 в Conjecture 1: По всей видимости это не является необходимым условием. Контрпример: счетное число копий плотного дерева с максимальными элементами, вместе с отношением эквивалентности, объединяющим одинаковые элементы в разных деревьях, дополненное отношением эквивалентности на максимальных элементах, объединяющим их в бесконечные классы плотные относительно всех формул и фиксированным счетным числом эквивалентных последовательностей, имеет континуум моделей (зависящих от того к чему сходятся эти последовательности), но обладает расширением одной константой со всего лишь тремя счетными моделями. Несложно заметить, что разные модели достигаются здесь не за счет большого семейства ортогональных 1-типов, а за счет того, что для любого n существуют семейства из n штук хороших (ортогональных?) m типов для всех $m > N(n)$, где $N(n)$ — это некоторая нижняя оценка для длин кортежей m относительно n типов.

Новая формулировка Conjecture 1 уточнена для линейного порядка, новая формулировка Conjecture 1 на стр. 157 строки 15-28.

Ответ: Изменения внесены