Рецензия статьи Байжанова-Умбетбаева "Constant expansion of theories and the number of countable models"

Настоящая статья касается метода константных обогащений полной теории для исследования динамики изменения числа счетных моделей. Тематика несомненно является интересной для широкого круга специалистов. В настоящей статье утверждается, что вопрос уменьшения числа счетных моделей с континуума до счетного числа остается открытым. К работе у рецензента появились вопросы и замечания, которые не позволяют пока рекомендовать ее к публикации. После ответа на все возникшие вопросы и устранения обнаруженных неточностей статья может быть рекомендована к публикации.

Abstract

В данном абстракте одновременно употребляется слова "article" и "paper". Надо оставить что-то одно из них.
Первое предложение рекомендую переписать в следующем виде: The present paper is dedicated to the method of constant expansion of a complete theory for studying its number of countable models.
Во втором предложении заменить "calculating" на "counting".
В третьем предложении заменить словосочетание "by means of a constant expansion" на "by a constant expansion".

Keywords

Добавить определенный артикль "the" перед словосочетанием "number of countable models".

Параграф 1

Страница 145, строка 1 второго абзаца: заменить "$2^{\aleph}_0$" на "$2^{\aleph_0}$". Вообще в этом параграфе Вы где-то используете $\aleph_0$, а где-то ω. Желательно остановится на одном варианте.
Страница 145, строка 3 третьего абзаца: добавить определенный артикль "the" перед словом "definition".

Параграф 2

Страница 145, строка 2 первого абзаца параграфа 2: вместо $q(\bar{x})$ следует писать $q(\bar{y})$.
Страница 145, строка 3: вместо "2-A-definable formula" следует писать "L_A-formula".
Страница 146, Definition 1: вместо "2-type" следует писать "$l(\bar{x}) + l(\bar{y})$-type".
Страница 146, строка 9: добавить определенный артикль "the" перед словом "definition".
Страница 146, строка 10: вместо "A-definable formula" следует писать "L_A-formula".
Страница 146, аксиома 1 для T_0: следует переписать в следующем виде: "$<$ is a dense linear ordering without endpoints".
Страница 146, аксиома 2 для T_0: достаточно написать в следующем виде: "$\forall x[f(f(x)) = x]$".
Страница 146, строка 33: заменить "and then complete" на "and therefore T_0 is complete".
Страница 148, строки 2-4 (аксиома 4 для T_2): Не совсем понятно, что имеется ввиду. В

Примере Омарова h_i было биективным отображением между этими двумя множествами, сохраняющим $<$ и f. Здесь написано так, будто h_i — это перестановка всего носителя, сохраняющая $<$ и дополнительно сохраняющая f на выделенных множествах.
Страницы 147-148 (аксиомы для T_2): Непонятно, почему заданная таким образом теория должна быть полной, более того, она по-видимому и не является таковой, поскольку на мой взгляд например не зависит от формулы

$$\forall x \exists y \forall z [H(x) \wedge H(y) \wedge ((A(z) \wedge z < x < f(z)) \rightarrow h_i(z) < y < h_i(f(z)))].$$

Возможно, из-за неясности с пунктом 4. Кванторы следует брать только по множествам, указанным в этом пункте.

Параграф 3

Страница 148, строка 3 параграфа 3: заменить "next" на "following".
Страница 148, строки 5-9 параграфа 3: Из-за неполноты теории T_2 сразу же вытекают вопросы к полноте этих типов, в частности, в некоторых пополнениях теории T_2 эти типы не полны.
Страница 148, строки 2-4 снизу (формула $S^{j+k}(x, \alpha)$): Таким образом, элементы x, для которых выполнена эта формула, это в точности все x из $A \cap B_n$, прообразы которых меньше α, и все x из $H \cap B_n$, которые лежат под образом некоторой дуги меньшей α. Т.е. эту формулу можно трактовать как "элемент x лежит слева от элемента α". Верно?
Здесь через множество B_n обозначается интервал

$$[h_{j+k-1}(...(h_1(h_0(b_n)))...), h_{j+k-1}(...(h_1(h_0(f(b_n))))...)]$$

т.е. интервал под образом дуги b_n после соответствующих переносов функциями h_i, в который обязаны попадать x, удовлетворяющие формуле $S^{j+k}(x, \alpha)$.
Страница 149, строка 7: Что означает что формула splits некоторый тип? Делит? Если да, то совсем не очевидно почему в этом случае это так.
Страница 149, формулировка Теоремы 1: следует писать в следующем виде: The theory T_2 has countably many countable models ...
Страница 149, формулировка Claim 1: следует писать в следующем виде: The theory T_2 has at least countably many non-isomorphic ...
Страница 149, строка 4 доказательства Claim 1: заменить "countable number of" на "countably many".
Страница 150, формулировка Claim 3: зачем используется слово Then? Возможно, где-то потеряно условие данного утверждения.
Страница 150, строка 1 доказательства Claim 3: почему мы можем предположить, что $\alpha_k \in S^k(M, \alpha_j) \wedge H(M)$? Для пары α_k, α_j случай $\alpha_k \notin S^k(M, \alpha_j) \cap H(M)$ делится на два подслучая: 1. $\alpha_j \in S^j(M, \alpha_k) \cap H(M)$; 2. $\alpha_j \notin S^j(M, \alpha_k) \cap H(M)$.
Только первый из них учитывается при Вашем предположении.
Страница 150, строки 7-8: Разве это не является буквально частью определения h_i?
Страница 150, первое предложение доказательства Claim 4: Почему?
Страница 150, второе предложение доказательства Claim 4: Выглядит как что-то, из чего выводится противоречие с предыдущим утверждением...
Страница 150, третье предложение доказательства Claim 4, условие $\alpha_k \in S^k(M, \alpha_j) \cap H(M)$: Опять таки, почему мы можем это предположить, куда теряется случай когда они оба лежат не слева друг от друга?
Страница 150, строка 13 доказательства Claim 4: Нет, h оставляет не месте элементы $q_k(N) \cap H(N)$, сами же его так определяли.
Страница 150, строка 13-14 доказательства Claim 4: Почему "we can map them to $q(M_{j,k})$"? Ведь N и $M_{j,k}$ все же разные модели.
Страница 150, строка 14-16 доказательства Claim 4: Крайне непонятное утверждение. Во-первых, в $q(N)$ есть элементы b такие, что $f(b) < b$, или такие, что $S^0(b, \alpha_k)$ и $S^0(f(b), \alpha_k)$

одновременно, а во-вторых, то что здесь вероятно подразумевается буквально означает, что α_k и α_j одновременно лежат не слева друг от друга, что противоречит Вашему начальному предположению.

Страница 150, строка 17 доказательства Claim 4: Что здесь имеется ввиду? Что они не пусты? Если да, то это и так очевидно.

Страница 151, строка 6, условие (2): Почему? Куда делись элементы x из $q(M_{j,k})$ такие, что $S^0(x,\alpha_k) \wedge \neg S^0(f(x),\alpha_k) \wedge S^0(x,\alpha_j) \wedge \neg S^0(f(x),\alpha_j)$? Если бы это было верно, то как минимум в одном случае следовало остаться на левых концах?

Страница 151, строка 7: Что здесь имеется ввиду под represented, если что $q(M_{j,k})$ равно вот этому всему, то вообще там еще и элементы из H есть.

Страница 151, строка 9: заменить "next" на "following".

Страница 153, пункт 1 в Conjecture 1: По всей видимости это не является необходимым условием. Контрпример: счетное число копий плотного дерева с максимальными элементами, вместе с отношением эквивалентности, объединяющим одинаковые элементы в разных деревьях, дополненное отношением эквивалентности на максимальных элементах, объединяющим их в бесконечные классы плотные относительно всех формул и фиксированным счетным числом эквивалентных последовательностей, имеет континуум моделей (зависящих от того к чему сходятся эти последовательности), но обладает расширением одной константой со всего лишь тремя счетными моделями. Несложно заметить, что разные модели достигаются здесь не за счет большого семейства ортогональных 1-типов, а за счет того, что для любого n существуют семейства из n штук хороших (ортогональных?) m-типов для всех $m > N(n)$, где $N(n)$ — это некоторая нижняя оценка для длин кортежей m относительно n типов.