Здравствуйте уважаемый господин рецензент!

Пересылаю список исправлений, внесенных в работу в соответствии с Вашими замечаниями в очередной рецензии.

Основные замечания:

Замечание 1. Стр. 157, строки 8 доказательства предложения 3.3. Определенное таким образом отношение $\alpha_{\langle m,n\rangle}$ не является отношением эквивалентности, так как оно не транзитивно. Если добавить транзитивность, то оно не будет иметь ровно два смежных класса, как это необходимо в доказательстве. Возможно имелось в виду $\{\langle x,y\rangle | g(a_m,a_n,x)=g(a_m,a_n,y)\}$.

Ответ 1. Совершенно справедливо возникло недоразумение. Приношу тысячу извинений. Я задал эквивалентность через ее дополнение. Правильным будет следующее изменение, внесенное в текст:

Пусть η – бесконечная равномерно вычислимо отделимая эквивалентность, $\lambda z.g(x,y,z)$ – функция из определения равномерности η, $tr(\eta)$ не иммунна и $\alpha=\{0=a_0<a_1<\ldots\}$ – бесконечное вычислимое подмножество $tr(\eta)$. Определим нумерацию $\nu:\omega^2\longrightarrow\Omega$ (где Ω – подсемейство семейства всех вычислимых расширений эквивалентности η, имеющих ровно два класса), сопоставляя каждой паре $\langle m,n\rangle$ при $m\neq n$ вычислимую эквивалентность $\alpha_{\langle m,n\rangle}$ как *разность* между ω^2 и симметричным замыканием множества $\{\langle x,y\rangle \mid g(a_m,a_n,x)=1\wedge g(a_m,a_n,y)=0\}$. Т.к. при различных по модулю эквивалентности η числах a_m,a_n функция $\lambda x.g(a_m,a_n,x)$ является всюду определенной вычислимой характеристической функцией некоторого η-замкнутого вычислимого множества β, отделяющего a_m от a_n, то ω разбивается на две части: β и $\omega\setminus\beta$, т.е. эквивалентность $\alpha_{\langle m,n\rangle}$ имеет ровно два вычислимых смежных класса – β и $\omega\setminus\beta$.

И далее по тексту.

Замечание 2. Стр. 159, строка 19. "Индекс η^* необходимо бесконечен". Непонятно, почему это так.

Ответ 2. Текст доказательства слегка расширен до следующего:

Пусть пара различных элементов a_0,a_1 алгебры A не различается никакой конгруэнцией конечного индекса. Но по теореме 1.2 о негативной аппроксимируемости существует такое негативное конгруэнтное расширение η^* эквивалентности η, по модулю которого эти элементы различны, т.е. $a_0/\eta^*\neq a_1/\eta^*$. Индекс η^* необходимо бесконечен (т.к. по условию элементы a_0 и a_1 на различаются никакой конгруэнцией конечного индекса) и $tr(\eta^*)\subseteq tr(\eta)$. Но характеристическая трансверсаль $tr(\eta^*)$ вычислимо перечислима, а $tr(\eta)$ иммунна. Следовательно, число η^*-классов должно быть конечным. Противоречие. Заметим, что в доказательстве данного пункта можно пренебречь свойством равномерности.

Замечание 3. Стр. 168, доказательство леммы 4.4.2. Для того, чтобы $tr(\eta)=\alpha$ необходимо, чтобы пара $\langle a,b\rangle$, найденная на шаге $s+1$ удовлетворяла еще одному дополнительному условию: $a=a_{l(b)}$ такому, что

$a_{l(b)} < b < a_{l(b)+1}$ (т.е. a – ближайший меньший b элемент из множества α). Так как если это не выполняется, то эквивалентность η_{s+1} "склеит" пары $\langle a, b\rangle, \langle a_{l(b)}, b\rangle$, и, следовательно и $\langle a, a_{l(b)}\rangle$, и в этом случае $a_{l(b)}$ не попадет в характеристическую трансверсаль эквивалентности η.

При этом, если данное условие добавить, то существование пары $\langle a, b\rangle$, необходимой для выполнения шага $s+1$ остается под вопросом, так как для каждого множества α существует элиминируемая эквивалентность, для которой нет ни одной пары $\langle a, b\rangle$ с требуемыми свойствами: $W_\alpha = \{\langle x, y\rangle | x, y \in [a_l, a_{l+1})$ для некоторого $l \in \omega$.

Возможно, доказательство можно спасти, если не добавлять пару $\langle a_{l(b)}, b\rangle$ в эквивалентность η_{s+1}.

Ответ 3. Пожалуй, это важнейшее замечание! В конструкции говорится о наименьшей эквивалентности η_{s+1}, расширяющей η_s и удовлетворяющей определенным требованиям. Впрочем, описание вводило в заблуждение. В новой редакции конструкция дана в развернутом виде. И, разумеется, упомянутая выше рецензентом пара $\langle a, a_{l(b)}\rangle$ не попадает в η_{s+1}. Кроме того, полностью переделана лемма 4.2.1. Теперь эта лемма в прежней формулировке становится тривиальным следствием леммы в новой формулировке. Новое и развернутое определение конструкции следующее:

Шаг 0. $\eta_0 = \emptyset, \omega_0 = \emptyset$.

Шаг $s+1$. Для каждого числа x назовем следующим за ним числом $x+1$. Для числа $x+1$ число x назовем предыдущим.

Выберем в W_s такую пару различных по модулю W_s элементов a, b, что
(1) $a < b$;
(2) $a \in \alpha, b \in \beta$;
(3) $\max \omega_s < a$.

Допустим, что такая пара $\langle a, b\rangle$ существует. Тогда полагаем

$$\omega_{s+1} = \{0, \dots, b\},$$

а в качестве η_{s+1} выбираем такую наименьшую эквивалентность на множестве ω_{s+1}, которая расширяет η_s, содержит пару $\langle a, b\rangle$, а также для всякого числа $z \in (\omega_{s+1} \setminus \omega_s) \cap \beta$, такого, что $a_l < z < a_{l+1}$ для некоторого l, отнесем пару $\langle a_l, z\rangle$ к η_{s+1}.

При этом, если $m = \min(\omega_{s+1} \setminus \omega_s)$ есть число из β, то полагаем $m = \max \omega_s \pmod{\eta_{s+1}}$, т.е. мы "склеиваем" элемент из β (наименьший в $\omega_{s+1} \setminus \omega_s$) с наибольшим числом из ω_s. Если же $m = \min(\omega_{s+1} \setminus \omega_s)$ есть число из α, то классы η_{s+1}-эквивалентности, определенные на множествах ω_s и $\omega_{s+1} \setminus \omega_s$ не пересекаются. Далее, на отрезке $[m, b]$ строим эквивалентность η_{s+1} следующим образом.

Пару $\langle a, b\rangle$ относим к η_{s+1}. Если $y \in \beta$ и y эквивалентно $x \in \alpha$, то все следующие за y элементы из β также объявим эквивалентными x, вплоть до первого элемента из α. Для каждого $x \in \alpha$ из отрезка $[m, b]$, если следующее за x число лежит в α, то полагаем, что x образует одноэлементный класс η_{s+1}-эквивалентности, вплоть до первого элемента из α, следующий за которым лежит в β (этот элемент из α будет лежать в нетривиальном классе эквивалентности).

Рассмотрим особый случай для пары $\langle a, b\rangle$. Пусть b_0 такой элемент из β, что предыдущий для b_0 элемент лежит в α, а все следующие за b_0 вплоть до b лежат в β, т.е. все числа из отрезка $b_0, b_0+1, \ldots, b$ лежат в β. Все числа из этого отрезка объявляем η_{s+1}-эквивалентными числу a, а число b_0-1 — наибольшее число из отрезка $[m, b]$ лежащее в α, образует одноэлементный класс η_{s+1}-эквивалентности.

Таким образом, если существует пара $\langle a, b\rangle$ со свойствами (1)–(3), то шаг $s+1$ корректно завершается с занесением всех чисел из α на отрезке $[0, b]$ в характеристическую трансверсаль эквивалентности η_{s+1} и при этом никакой элемент из β на отрезке $[0, b]$ в нее не попадает.

Конец шага $s+1$.

Определим

$$\eta = \bigcup_{s\in\omega} \eta_s.$$

Покажем, что эквивалентность η и будет удовлетворять условиям теоремы. Прежде всего убедимся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 4.2.1. *Пусть $\gamma = \{c_0 < c_1 < \ldots\}$ – бесконечное подмножество ω с бесконечным дополнением $\delta = \{d_0 < d_1 < \ldots\}$ и E – элиминируемая эквивалентность на ω. Тогда существуют такие $c \in \gamma$ и $d \in \delta$, что $c < d$ и $c \neq d \pmod{E}$.*

Доказательство. Выбираем любой элемент c_k из γ и обозначим через D класс E-эквивалентности элемента c_k. Предположим, что не существует больших чем c_k элементов из δ, которые не равны c_k по модулю E. Тогда почти все элементы из δ (за исключением, быть может, конечного подмножества δ) лежат в D. Если E имеет бесконечное число смежных классов, то почти все они целиком лежат в γ. Берем любое число c из какого-то класса вне D и выбираем в δ (которое почти целиком лежит в D) число d большее чем c. Если же классов конечное число, то, в силу элиминируемости E, найдется по крайней мере еще один бесконечный смежный класс E-эквивалентности, скажем C, в котором содержится бесконечное число элементов из γ. Выбираем любое $c \in C$ и большее чем c число d из $\delta \subseteq C$. Таким образом, в любом случае найдется пара элементов c, d со свойством $c \in \gamma, d \in \delta, c < d, c \neq d \pmod{E}$.

Из леммы 4.2.1 немедленно следует, что для каждого шага $s+1$ найдутся такие a, b, различные по модулю W_s, что $\max \omega_s < a < b$, $a \in \alpha$ и $b \in \beta$ и при этом все элементы из α трансверсальны (ни один элемент из β не трансверсален), т.е. каждый шаг конструкции корректно завершается. Заметим, что тривиальным фактом является то обстоятельство, что если элемент не принадлежит характеристической трансверсали эквивалентности η_s, то таковым же он остается и для любого расширения этой эквивалентности. Гораздо более тонкое свойство заключается в том, что все элементы из α сохраняют свойство быть трансверсальными для предельного расширения η эквивалентностей η_s.

Далее по тексту.

При этом лемма 4.2.2 получает совсем иное звучание.

Прочие замечания:

Замечание 4. Стр. 147, строка 18. Непонятно, почему написано $\{x|x \in A\}$ вместо A.

Ответ 4. $\{x|x \in A\}$ заменено на A.

Замечание 5. Стр. 151, строка перед замечанием 1.8. По всей видимости должно быть "$a_1 \in \nu S$" вместо "$a_1 \in S$".

Ответ 5. Конечно. Исправлено.

Замечание 6. Стр. 157, строка 12 доказательства предложения 3.3. Фраза "(для всех $m \neq n$)"по всей видимости должна быть в индексе пересечения в предыдущей строке.

Ответ 6. Принято, внесено в индекс пересечения.

Замечание 7.

Стр. 160, строка 1. ”Теорема Деккера, которая утверждает...” – теорема Деккера действительно утверждает, что $B = \omega \setminus M_f$ гиперпросто, но ничего не говорится о том, что M_f – регрессивно, хотя это несложно показать. Если доказательство этого факта содержится в более ранних работах автора, необходимо дать ссылку, или вставить фразу типа "Заметим, что множество M_f из теоремы Деккера является регрессивным".

Ответ 7. Вставлена фраза: "Заметим, что множество M_f из теоремы Деккера является регрессивным".

Замечание 8. Стр. 161, строка 19. Нужна запятая после "n".

Ответ 8. Запятая вставлена.

Замечание 9.

Стр. 167, строка 5 доказательства теоремы 4.2. ”Так и все ее факторы” – непонятно какие факторы имеются ввиду и в каком месте доказательства это требуется.

Ответ 9. После слова факторы вставлено:

"(т.е. эквивалентные расширения)".

Пожелания:

Замечание 10. Стр. 155, предложение 2.11. Предлагаю заменить ”не является равномерной” на ”не является равномерно вычислимо отделимой” подобно тому, как это сформулировано в предложении 2.12, чтобы формулировка этого утверждения была полноценной.

Ответ 10. Заменено.

Замечание 11. Стр. 155, предложение 2.12.

Используется понятие регрессивного множества, определение которого вводится позже. Раз это определение присутствует в статье, имеет смысл поставить его до этого.

Ответ 11. Между предложениями 2.11 и 2.12 вставлено следующее определение:

Напомним ([3]), что множество α называется регрессивным, если существует некоторый его пересчет без повторений $\alpha = \{a_0, a_1, \ldots\}$ такой, что для подходящей частичной вычислимой функции ψ имеет место $\psi(a_{n+1}) = a_n$ для всех $n \in \omega$ и $\psi(a_0) = a_0$.

Следующее определение регрессивного множества, приведенное в доказательстве предложения 3.6 удалено.

Замечание 12. Стр. 160, доказательство леммы 3.6.1. Было бы удобнее для понимания поменять местами обозначения σ_k и σ_k^*, так как в данный момент σ_k имеет отношение к β^*, а σ_k^* к β.

Ответ 12. Обозначения поменялись.

Замечание 13. Стр. 167, первая строка шага $s+1$. Необходимо заменить "Выберем в W_s такую пару различных по модулю W_s элементов" на "Выберем такую пару различных по модулю W_s элементов", так как W_s – это эквивалентность, и ее элементами являются пары *одинаковых* по модулю W_s элементов.

Ответ 13. Заменено.

Автор выражает огромную признательность рецензенту, особенно в связи с критическими замечаниями и вопросами касающимися предложения 3.3 и теоремы 4.2, содержащими ключевые методы и результаты работы.

С уважением,
Автор

9 сентября 2023