Здравствуйте уважаемый господин рецензент!

Пересылаю список исправлений, внесенных в работу в соответствии с Вашими замечаниями в повторной рецензии.

Основные замечания:

Замечание 1. Стр. 158, строки 10 и 11 доказательства теоремы 3.5. Непонятно, почему выполняется условие $\forall t \in T(C)(a \neq t)$ при том, что определили $T(C)$ как множество всех Σ-термов от всех порождающих от $C \cup \{a\}$.

Ответ 1. Совершенно верное замечание. $T(C)$, точнее гомоморфный образ этой алгебры термов, – это в сущности и есть подалгебра A_0, а $a \in A \setminus A_0$. Это конечно описка! Выражение

"Рассмотрим множество $T(C)$ всех Σ-термов от всех порождающих от $C \cup \{a\}$"

заменено на

"Рассмотрим множество $T(C)$ всех Σ-термов".

Ведь суть именно в том, что для всякой конечно порожденной подалгебры A_0 и элемента a вне этой подалгебры найдется конгруэнция конечного индекса, в факторе по которой данный элемент лежит вне этой подалгебры. Спасибо за замечание! Иправлено.

Замечание 2. Стр. 158, строка 17 снизу. Непонятно, откуда следует существование негативного расширения η^*.

Ответ 2. Текст:

"В силу равномерности свойства вычислимой отделимости эквивалентности η, алгебра (A, ν) равномерно аппроксимируется негативными Ф-алгебрами (см. предыдущий раздел, теорема 2.14)."

расширен до следующего:

"В силу равномерности свойства вычислимой отделимости эквивалентности η, алгебра (A, ν) равномерно аппроксимируется негативными Ф-алгебрами (см. предыдущий раздел, теорема 2.14, согласно которой для равномерно вычислимо отделимой алгебры, если в ней выполняется любое вычислимо перечислимое множество универсальных ДИП-предложений Ф, то эта нумерованная алгебра аппроксимируется негативными Ф-алгебрами)."

Отсюда и следует существование негативного расширения η^*, фактор по которой будет Ф-алгеброй, т.е. в ней образ a лежит вне образа A_0.

Замечание 3. Стр. 158, строка 12 снизу. Непонятно, при чем здесь подалгебра $T(C)$, возможно тут должна быть подалгебра A_0.

Ответ 3. Да, конечно. Исправлено.

Замечание 4. Стр. 158, строка 8 снизу. Непонятно, почему этот переход очевиден.

Ответ 4. Согласен, переход не очевидный. Поэтому вместо слова очевидно вставлен следующий текст:

Допустим, что характеристическая трансверсаль $tr(\eta)$ бесконечной равномерно вычислимо отделимой эквивалентности η является иммунной, но при этом существует не финитно аппроксимируемая η-алгебра, скажем A, которая изоморфна вычислимой алгебре $\langle \omega/\eta; F\rangle$, где F – подходящее эффективное семейство вычислимых функций (для которых η является конгруэнцией), представляющих операции этой алгебры в данном представлении (имеется в виду естественная проектирующая нумерация $\nu_\eta : \omega \longrightarrow A$, сопоставляющая каждому натуральному числу содержащий его η-класс). Пусть пара различных элементов a_0, a_1 алгебры A не различается никакой конгруэнцией конечного индекса. Но по теореме 1.2 о негативной аппроксимируемости существует такое негативное конгруэнтное расширение η^* эквивалентности η, по модулю которого эти элементы различны, т.е. $a_0/\eta^* \neq a_1/\eta^*$. Индекс η^* необходимо бесконечен, $tr(\eta^*) \subseteq tr(\eta)$, но характеристическая трансверсаль $tr(\eta^*)$ вычислимо перечислима, а $tr(\eta)$ иммунна. Следовательно, число η^*-классов должно быть конечным. Противоречие. Заметим, что в доказательстве данного пункта можно пренебречь свойством равномерности.

Замечание 5. Стр. 159, строка 11. Утверждается, что примеры указанных множеств можно найти в книге Роджерса. Тем не менее рецензенту не удалось этого сделать. Пожалуйста, укажите точнее, где найти указанный пример, так как существование гиперпростого множества с регрессивным дополнением используется в доказательстве. Кроме того, определение регрессивного множества стоит внести в текст статьи, как не являющееся общеизвестным, а также функция ψ, использующаяся в доказательстве, по всей видимости из этого определения.

Ответ 5. Текст "Зафиксируем произвольное гиперпростое множество β с регрессивным дополнением, некоторый пересчет которого прослеживается частичной вычислимой регрессирующей функцией ψ (примеры таких множеств можно найти, например, в книге Х.Роджерса [3])."

заменим на следующий

"Напомним, что множество α называется регрессивным, если существует некоторый пересчет этого множества (не обязательно эффективный) без повторений $\alpha = \{a_0, a_1, \ldots\}$ такой, что для подходящей частичной вычислимой (прослеживающей) функции ψ имеет место место следующее:

$\psi(a_0) = a_0 \wedge \forall x[x \in \alpha \wedge x = a_{n+1} \Rightarrow \psi(x) = a_n]$.

Зафиксируем произвольное гиперпростое множество β с регрессивным дополнением, некоторый пересчет которого прослеживается частичной вычислимой функцией ψ (примеры таких множеств можно найти, например, в книге Х.Роджерса [3], глава 9, с. 182, теорема XVI (теорема Деккера, которая утверждает, что для любой разнозначной функции f с невычислимой областью значений множество ее минимальных элементов $M_f = \{x | \forall y(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))\}$ регрессивно, а $\omega \setminus M_f$ гиперпросто), см. также упражнение 9-44, с. 206.)".

Замечание 6. Стр. 159, строка 5 доказательства леммы 3.6.1. Пожалуйста, укажите в явном виде, что такое полный прообраз δ-прообраз $\delta^{-1}\alpha$, или возможно лучше указать, что такое отображение δ, так как из написанного "$\delta_0 = \{0\}, \delta_1 = \{1, 2\}, \ldots$"сложилось впечатление, что отображение

δ сопоставляет натуральному числу некоторое конечное множество. А в доказательстве по всей видимости имеется ввиду наоборот.

Ответ 6. Согласен, крайне неудачное обозначение, вводящее в заблуждение. Имелось в виду, что через $\delta^{-1}\alpha$ обозначается множество δ-номеров всех таких конечных множеств, которые пересекаются с α, т.е.

$$\delta^{-1}\alpha = \bigcup_{x\in\alpha}\{n|x \in \delta_n\}.$$

Теперь это называется δ-замыканием α и обозначается через α^δ.

Окончательная отредактированная часть текста по данному замечанию теперь выглядит следующим образом:

Для всякого множества $\alpha \subseteq \omega$ через α^δ обозначим оператор, сопоставляющий каждому α множество всех δ-номеров всех элементов из множества α, т.е.

$$\alpha^\delta = \bigcup_{x\in\alpha}\{n|x \in \delta_n\}.$$

Заметим, что для любого x имеется не более одного такого n, что $x \in \delta_n$.

Построим следующую последовательность конечных множеств $\sigma_0^*, \sigma_1^*, \dots$ по шагам.

Шаг 0.

$$\sigma_0^* = \bigcup_{x\in\sigma_0}\{z \mid x \in \delta_z\}.$$

Шаг $s+1$.

$$\sigma_{s+1}^* = \bigcup_{x\in\sigma_k}\{z \mid x \in \delta_z\},$$

где

$$k = \min\{y \mid \sigma_y^\delta \cap (\sigma_0^* \cup \ldots \cup \sigma_s^*)^\delta = \emptyset\}.$$

Конец шага $s+1$.

Прочие замечания:

Замечание 7. Определение понятия финитно аппроксимируемой алгебры необходимо добавить в работу.

Ответ 7. В преамбуле перед определением финитной и локально финитной отделимости добавлено данное определение:

Напомним, что универсальная алгебра называется финитно аппроксимируемой, если для любых двух различных ее элементов существует гомоморфизм на конечную алгебру, в котором образы этих элементов также различны. Аналогично, универсальная алгебра A называется финитно отделимой, если для всякой ее подалгебры A_0 и любого элемента $a \in A \setminus A_0$ найдется такая конгруэнция конечного индекса, по модулю которой элемент a отличен от всех элементов подалгебры A_0. Другими словами, на языке гомоморфизмов, существует такой гомоморфизм φ из алгебры A на конечную алгебру, что $\varphi(a) \notin \varphi(A_0)$. Аналогично, алгебра называется локально финитно отделимой, если для всякой ее конечно порожденной подалгебры и любого элемента вне этой подалгебры найдется конгруэнция конечного индекса, различающая данные элемент и подалгебру.

Замечание 8. Стр. 150. В статье используется обозначение T_0, есть подозрение, что его определение содержится в абзаце 3 на этой странице, хотелось бы, чтобы было сформулировано явно, что такое T_0.

Ответ 8. Первоначальный текст:

Другими словами, эффективная отделимость эквивалентности η означает, что существует вычислимое полное T_0-отделяющее семейство η-замкнутых вычислимо перечислимых множеств для пространства ω/η.

расширен до следующего;

Другими словами, эффективная отделимость эквивалентности η означает, что существует вычислимое полное T_0-отделяющее семейство η-замкнутых вычислимо перечислимых множеств для пространства ω/η, т.е. соответствующее топологическое пространство (порожденное базой вычислимо перечислимых множеств), является T_0-пространством или, иными словами, для любых двух различных классов эквивалентности найдется вычислимо перечислимая окрестность одного из них, не содержащая другой.

Замечание 9. Стр. 155, строка 2. Неясно, что такое "сильная таблица"

Ответ 9. Первоначальный текст:

Ясно, что в этом случае эквивалентность η^*_α эффективно бесконечна, т.к. наличие сильной таблицы $\delta_0, \delta_1, \ldots$ для $\omega \setminus \alpha$ гарантирует, что $m \neq n \Rightarrow \delta_m \setminus \alpha \neq \delta_n \setminus \alpha$, т.е. $\gamma^{-1}\delta_m \neq \gamma^{-1}\delta_n \pmod{\eta^*_\alpha}$, где γ – каноническая нумерация конечных множеств.

расширен до следующего:

Ясно, что в этом случае эквивалентность η^*_α эффективно бесконечна, т.к. наличие сильной таблицы $\delta_0, \delta_1, \ldots$ для $\omega \setminus \alpha$ (т.е. вычислимого по каноническим индексам семейства попарно непересекающихся конечных множеств, каждое из которых содержит число из $\omega \setminus \alpha$) гарантирует, что $m \neq n \Rightarrow \delta_m \setminus \alpha \neq \delta_n \setminus \alpha$, т.е. $\gamma^{-1}\delta_m \neq \gamma^{-1}\delta_n \pmod{\eta^*_\alpha}$, где γ – каноническая нумерация конечных множеств.

Замечание 10. Стр. 155, строки 7 и 9. Неясно, что значит "равномерная"эквивалентность.

Ответ 10. Первоначальный текст:

Рассмотрим теперь вычислимо отделимые эквивалентности типа η_α с иммунными характеристическими трансверсалями – с точки зрения наличия свойства "быть равномерной".

дополнен следующим:

Рассмотрим теперь вычислимо отделимые эквивалентности типа η_α с иммунными характеристическими трансверсалями – с точки зрения наличия свойства "быть равномерной" (в смысле определения 1.7).

Замечание 11. Стр. 157, строка 11. Видимо вместо $\lambda z.g(x, y, z)$ должно быть $\lambda z.g(a_m, a_n, z)$.

Ответ 11. Спасибо, смотрите ответ на следующее замечание.

Замечание 12. Стр. 157, строка 14. В предложении надо построить эквивалентность η', в данной формуле η' определяется как пересечение множеств $\alpha_{\langle m,n \rangle}$, но $\alpha_{\langle m,n \rangle} \subseteq \omega$, а η' должно быть множеством пар. По всей видимости η' должна строиться как пересечение некоторого семейства конгруэнций.

Ответ 12. Большое спасибо! Нелепость, определение $\alpha_{\langle m,n \rangle}$ конечно нужно заменить. Вот измененный вариант данной части текста:

Пусть η – бесконечная равномерно вычислимо отделимая эквивалентность, $\lambda z.g(x,y,z)$ – функция из определения равномерности η, $tr(\eta)$ не иммунна и $\alpha = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots\}$ – бесконечное вычислимое подмножество $tr(\eta)$. Определим нумерацию $\nu : \omega^2 \longrightarrow \Omega$ (где Ω – подсемейство семейства всех вычислимых расширений эквивалентности η, имеющих ровно два класса), сопоставляя каждой паре $\langle m,n \rangle$ при $m \neq n$ вычислимую эквивалентность $\alpha_{\langle m,n \rangle}$ как симметричное и рефлексивное замыкание отношения $\{\langle x,y \rangle \mid g(a_m,a_n,x) = 1 \wedge g(a_m,a_n,y) = 0\}$. Очевидно, что ν – вычислимая нумерация семейства $\{\alpha_{\langle m,n \rangle} \mid \langle m,n \rangle \in \omega^2; m \neq n\}$ и потому, по предложению 3.2, эквивалентность

$$\eta' = \bigcap_{\langle m,n \rangle \in \omega} \alpha_{\langle m,n \rangle}$$

(для всех $m \neq n$) является негативным и, очевидно, бесконечным расширением эквивалентности η. По предложению 2.16 эквивалентность η' имеет бесконечное вычислимое расширение η^*, характеристическая трансверсаль которой есть α.

Замечание 13. Стр. 158, строка 6 снизу. Некорректна ссылка на лемму 3.3.1. Предлагаю заменить на "Тогда согласно доказательству предложения 3.3 существует унарная ...".

Ответ 13. Изменено.

Замечание 14. Стр. 158, строка 4 снизу. Предлагаю слова "ясно, что"заменить на "аналогично доказательству леммы 3.3.1".

Ответ 14. Принято. Изменено.

Замечание 15. Стр. 159, строка 10 снизу. По всей видимости вместо $\omega \setminus \beta$ имеется ввиду $\omega \setminus \beta^*$.

Ответ 15. Да, разумеется, спасибо!

Замечание 16. Стр. 160, строка 1 замечания 3.7. Приведите, пожалуйста, определение абсолютно свободной алгебры.

Ответ 16. Исходный текст следующий:

Пусть $T_\Sigma(C)$ – абсолютно свободная алгебра Σ-термов эффективной сигнатуры Σ от конечного множества C сигнатурных порождающих. Зафиксируем некоторую геделевскую нумерацию γ этой алгебры.

в новой редакции он расширен до следующего:

Пусть $T_\Sigma(C)$ – абсолютно свободная алгебра Σ-термов эффективной сигнатуры Σ от конечного множества C сигнатурных порождающих. Напомним, что алгебра абсолютно свободна, если с учетом мощности множества порождающих из нее есть гомоморфизм в любую алгебру из класса всех Σ-алгебр. С точностью до изоморфизма удобно воспринимать ее как алгебру слов (Σ-термов), при этом значения любых Σ-термов различны. Легко заметить, что любая универсальная алгебра является гомоморфным образом подходящей абсолютно свободной. Зафиксируем некоторую геделевскую нумерацию γ этой алгебры.

Замечание 17. Стр. 162, строка 6 снизу. По всей видимости вместо "(f, h)-терм"должно быть "(f, g)-терм".

Ответ 17. Да, конечно. Исправлено.

Замечание 18. Стр. 163, строка 1. Неясно, что такое стандартная нумерация конечной алгебры.

Ответ 18. Сразу после формулировки леммы 3.9.1 вставлено следующее предложение:

Напомним, что нумерация универсальной алгебры называется стандартной, если она является наименьшей относительно сводимости (классов эквивалентных) нумераций этой алгебры (см. А.И.Мальцев [5]).

Замечание 19. Стр. 163, строка 25. Неясно, что такое инициальная алгебра.

Ответ 19. Следующий исходный текст:

Очевидно, что инициальная алгебра $T_\Sigma(C)/E$ для системы тождеств E является гомоморфным прообразом алгебры B (этот гомоморфный прообраз – инициальная алгебра в многообразии заданном тождествами E).

расширен до следующего:

Очевидно, что инициальная (т.е. свободная без свободных порождающих в многообразии алгебр, заданном конечным множеством тождеств E) алгебра $T_\Sigma(C)/E$ для системы тождеств E является гомоморфным прообразом алгебры B (этот гомоморфный прообраз – инициальная алгебра в многообразии заданном тождествами E).

Замечание 20. Стр. 163, по всей видимости угловые скобки в последней строке не нужны.

Ответ 20. Верно, исправлено.

Замечание 21. Стр. 164, строка 12. Похоже γ^{-1}, стоящее сразу после знака равенства – лишнее, так как результат функции h^* – это уже номер, а не конечное множество.

Ответ 21. Да конечно. Тем более там и со скобками была путаница. Исправлено.

Замеченные опечатки:

Замечание 22. В статье встречается два обозначения: $x \neq y \pmod{(ker\theta)}$ (определение 1.7 на странице 151) и $x \neq y \pmod{\eta}$ (определение 2.5 на странице 154). Второй вариант кажется рецензенту предпочтителен, предлагаю привести к единому обозначению в пользу второго варианта.

Ответ 22. Согласен, т.к. в равенстве по модулю указание ядра (ker) излишне. В определении 1.7 элиминировано обозначение ядра.

Замечание 23. Стр. 153, первая строка в разделе 2. "носящим"$\longrightarrow$"носящем".

Ответ 23. Исправлено.

Замечание 24. Стр. 153, строка 10 снизу. Присутствуют две лишние закрывающие угловые скобки.

Ответ 24. Удалены.

Замечание 25. Стр. 154, в конце замечания 2.4 нет точки.

Ответ 25. Поставлена.

Замечание 26. Стр. 154, 8 абзац. Слова "неэффективно бесконечной"надо выделить курсивом, так как это определение.

Ответ 26. Выделено.

Замечание 27. Стр. 159, строка 4 и стр. 161 строка 4 снизу – присутствует лишнее слово "доказательство".

Ответ 27. Удалено.

Замечание 28. Стр. 161, лемма 3.8.1. Пропущены квадратные скобки вокруг ссылки на источник [12].

Ответ 28. Вставлены.

Замечание 29. Стр. 165, первая строка доказательства предложения 3.12. Пропущен дефис после η.

Ответ 29. Первое и единственное возражение. Речь идет о подходящем вычислимом расширении эквивалентности η, хотя из этого следует, что существует η-алгебра, содержащая в качестве подалгебры алгебру предшествования. В новой редакции первая строка доказательства предложения 3.12 звучит так:

Определим над подходящим вычислимым расширением эквивалентности η алгебру предшествования как в предложении 3.3.

Автор еще раз выражает огромную признательность рецензенту, особенно на фоне того, что степень его участия в процессе приведения статьи в приемлемое состояние, его замечания, проникновение в тематику можно оценить на уровне полноценного соавторства.

С уважением,
Автор