

# СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том Том 20, №2, стр. 1200–1210 (2023)  
DOI 10.33048/semi.2023.20.074

УДК 512.55  
MSC 16P10,16W20

## О КЛАССАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ НЕЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Е.В. ЖУРАВЛЕВ

**ABSTRACT.** In this article we classified up to isomorphism all finite local rings  $R$  with Jacobson radical  $J$  and conditions:

$$\text{char} R \neq 2, R/J = F \subseteq Z(R), \dim_F J/J^2 = 2, \dim_F J^2 = 3, J^3 = 0.$$

**Keywords:** finite rings, local rings.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Квадратные матрицы  $M$  и  $M'$  над конечным полем  $F$  называются конгруэнтными, если существует невырожденная матрица  $P$  над  $F$ , такая, что  $M' = P^T M P$ , где  $P^T$  – транспонированная матрица. Причем, если  $P$  – ортогональная матрица,  $P^T = P^{-1}$ , то  $M$  и  $M'$  называются ортогонально подобными ([1, 2]). В работе [3] М. Ньюман нашел все классы конгруэнтности для симметрических матриц. В. Уотерхаус (см. [4]) для произвольных матриц вычислил количество классов конгруэнтности без указания их представителей. Случай для матриц порядка два был изучен в работах [5, 6], а для матриц порядка три в работах [7, 8, 9].

Пусть  $M_1, M_2, \dots, M_m, M'_1, M'_2, \dots, M'_m \in M_n(F)$ ,  $F = GF(p^r)$  – конечное поле,  $p$  – простое число,  $m, n, r \in \mathbb{N}$ . Упорядоченные последовательности матриц  $(M_1, M_2, \dots, M_m)$  и  $(M'_1, M'_2, \dots, M'_m)$  назовем эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы  $P = (p_{ij})_{n \times n}$  и  $Q = (q_{ij})_{m \times m}$  над полем  $F$  такие, что

$$M'_k = \sum_{i=1}^m q_{ki} P^T M_i P, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1)$$

ZHURAVLEV, E.V., ON EQUIVALENCE CLASSES OF MATRICES OVER A FINITE FIELD OF ODD CHARACTERISTIC.

© 2023 ЖУРАВЛЕВ Е.В..

Поступила 2023 г., опубликована 2023 г.

В частности, при  $m = 1$  получаем:

$$M'_1 = q_{11}P^T M_1 P. \quad (2)$$

Очевидно, что в этом случае из конгруэнтности матриц следует их эквивалентность. В работах [6, 10, 11, 12] авторы, используя полученные ранее классы конгруэнтности матриц порядка два и три над простым полем, нашли их представители классов эквивалентности.

Для двоек матриц порядка два ( $m = 2$  и  $n = 2$ ) эквивалентность определяется равенствами

$$\begin{cases} P^T (q_{11}M_1 + q_{12}M_2) P = M'_1; \\ P^T (q_{21}M_1 + q_{22}M_2) P = M'_2. \end{cases} \quad (3)$$

Б. Горбас и Г. Уильямс полностью изучили этот случай при  $p \neq 2$  в работе [13] и при  $p = 2$  в работе [14].

При  $m = 3$  и  $n = 2$  получаем, что тройки  $(M_1, M_2, M_3)$ ,  $(M'_1, M'_2, M'_3)$  матриц второго порядка эквивалентны, если существуют невырожденные матрицы  $P = (p_{ij})_{2 \times 2}$  и  $Q = (q_{ij})_{3 \times 3}$  такие, что

$$\begin{cases} P^T (q_{11}M_1 + q_{12}M_2 + q_{13}M_3) P = M'_1; \\ P^T (q_{21}M_1 + q_{22}M_2 + q_{23}M_3) P = M'_2; \\ P^T (q_{31}M_1 + q_{32}M_2 + q_{33}M_3) P = M'_3. \end{cases} \quad (4)$$

Цель данной работы – найти представители классов эквивалентности для данного случая, при  $p \neq 2$ , и применить полученный результат для классификации конечных локальных колец.

## 2. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МАТРИЦ

Далее будем полагать, что  $F = GF(p^r)$  – конечное поле нечетной характеристики ( $p \neq 2$ ),  $\delta$  – некоторый фиксированный элемент из  $F^*$ , такой, что  $\delta \notin F^{*2}$ ,  $\delta \neq 1$ . Пусть  $\varepsilon \in \{1, \delta\}$ , то есть  $\varepsilon$  пробегает множество представителей смежных классов  $F^*/F^{*2}$ . Если  $\varepsilon = 1$  (соотв.  $\varepsilon = \delta$ ), то для каждого  $f \in F$  (соотв.  $f \in F^*$ ) найдем ненулевое решение  $(x, y)$  уравнения  $x^2 - \varepsilon y^2 = f$ . Обозначим  $\Omega_\varepsilon$  множество найденных таким образом элементов из  $F \times F$ . Кроме того, пусть  $\sigma$  пробегает множество представителей смежных классов  $F^*/\{\pm 1\}$ .

**Лемма 1.** *Всякая квадратная матрица  $M$  над полем  $F$  представима в виде суммы симметрической матрицы  $A$  и антисимметрической матрицы  $B$  (т.е. такой, что  $B^T = -B$ ). Причем матрицы, эквивалентные симметрическим матрицам, являются также симметрическими, а матрицы, эквивалентные антисимметрическим матрицам, являются также антисимметрическими.*

Основываясь на результатах работ [3, 13] приведем в таблице 1 последовательности матриц, являющихся представителями классов эквивалентности, определяемой соотношениями (2) и (3), у которых соответствующие симметрические матрицы являются линейно независимыми.

таблица 1

симметрические матрицы	несимметрические матрицы
1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix};$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$ где $\beta \in F^*$ ;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$	$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix},$ где $(\alpha, \beta) \in \Omega_\varepsilon$ ;
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix};$	$\begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ -\sigma & \varepsilon \end{pmatrix}.$

Всюду далее мы будем рассматривать тройки матриц порядка два над полем  $F$  и отношение эквивалентности, определяемое равенствами (4). Сначала укажем представителей классов эквивалентности симметрических матриц. Для этого разделим их на группы в соответствии с рангом. Так как симметрические матрицы это подпространство размерности три, то все тройки линейно независимых матриц образуют один класс эквивалентности и тройку матриц ранга три, представителя этого класса, мы можем выбрать, например,  $e_{11}, e_{12} + e_{21}, e_{22}$ . Тройки матриц ранга два это двойки линейно независимых матриц – представителей классов эквивалентности, определяемой соотношением (3), с добавленной нулевой матрицей. Тройки матриц ранга один это ненулевые матрицы – представители классов эквивалентности, определяемой соотношением (2), с добавленными нулевыми матрицами (см. таблицу 1).

Итак, пусть  $S$  – множество, состоящее из следующих троек матриц:

- (1)  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
- (2)  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (3)  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (4)  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Если при некоторых  $P$  и  $Q$  последовательность матриц  $(M_1, M_2, \dots, M_m)$  эквивалентна самой себе, то будем говорить, что пара матриц  $(P, Q)$  стабилизирует  $(M_1, M_2, \dots, M_m)$ . Кроме того, определим на тройках матриц покомпонентное сложение

$$(A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3) = (A_1, A_2, A_3) + (B_1, B_2, B_3),$$

где  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 \in M_2(F)$

**Лемма 2.**

(1) *Всякий класс эквивалентности содержит тройку*

$$(M_1, M_2, M_3) = (A_1, A_2, A_3) + (B_1, B_2, B_3),$$

где  $(A_1, A_2, A_3) \in S$  и  $(B_1, B_2, B_3)$  – тройка антисимметрических матриц. Причем каждый класс определяется  $(A_1, A_2, A_3) \in S$  единственным образом.

(2) Пусть  $(A_1, A_2, A_3) \in S$  и  $(B_1, B_2, B_3), (B'_1, B'_2, B'_3)$  – тройки антисимметрических матриц.

$$(A_1, A_2, A_3) + (B_1, B_2, B_3) \sim (A_1, A_2, A_3) + (B'_1, B'_2, B'_3)$$

тогда и только тогда, когда существуют  $P$  и  $Q$  такие, что

- (a)  $(P, Q)$  стабилизирует  $(A_1, A_2, A_3)$ ;
- (b)  $(B_1, B_2, B_3) \sim (B'_1, B'_2, B'_3)$  посредством  $P$  и  $Q$ .

**Лемма 3.** Если  $(A_1, A_2, 0) \in S$ ,  $A_1 \neq 0$ ,  $A_2 \neq 0$ , то стабилизирующие матрицы  $P$  и  $Q$  для тройки  $(A_1, A_2, 0)$  имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix},$$

причем матрицы

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

являются стабилизирующими для двойки  $(A_1, A_2)$  в смысле эквивалентности, определяемой равенствами (3).

*Доказательство.* Так как матрицы  $A_1, A_2$  линейно независимы, то равенство  $P^T (q_{31}A_1 + q_{32}A_2) P = 0$  (см. (4)) возможно только при  $q_{31} = 0$  и  $q_{32} = 0$ .  $\square$

**Лемма 4.** Если  $(A_1, A_2, 0) \in S$ ,  $A_1 \neq 0$ , то стабилизирующие матрицы  $P$  и  $Q$  для тройки  $(A_1, 0, 0)$  имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix},$$

причем матрицы

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad (q_{11})$$

являются стабилизирующими для матрицы  $A_1$  в смысле эквивалентности, определяемой равенствами (2).

*Доказательство.* В этом случае система (4) принимает вид

$$\begin{cases} P^T (q_{11}A_1) P = A_1; \\ P^T (q_{21}A_1) P = 0; \\ P^T (q_{31}A_1) P = 0. \end{cases}$$

Так как  $\det(P) \neq 0$ , то  $P^T A_1 P \neq 0$  и, следовательно,  $q_{21} = 0$  и  $q_{31} = 0$ .  $\square$

Пусть далее  $\Delta = \det(P)$ ,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix},$$

$$B'_1 = \begin{pmatrix} 0 & x' \\ -x' & 0 \end{pmatrix}, B'_2 = \begin{pmatrix} 0 & y' \\ -y' & 0 \end{pmatrix}, B'_3 = \begin{pmatrix} 0 & z' \\ -z' & 0 \end{pmatrix},$$

где  $x, y, z, x', y', z' \in F$ . Если  $\Pi_B = (B_1, B_2, B_3) \sim \Pi_{B'} = (B'_1, B'_2, B'_3)$ , то

$$\begin{cases} (q_{11}x + q_{12}y + q_{13}z)\Delta = x'; \\ (q_{21}x + q_{22}y + q_{23}z)\Delta = y'; \\ (q_{31}x + q_{32}y + q_{33}z)\Delta = z'. \end{cases} \quad (5)$$

**Лемма 5.** Если  $\Pi_A = (A_1, A_2, 0) \in S$  и  $\Pi_B = (B_1, B_2, B_3)$ ,  $\Pi_{B'} = (B'_1, B'_2, 0)$ , причем  $B_3 \neq 0$ , то  $\Pi_M = \Pi_A + \Pi_B \approx \Pi_{M'} = \Pi_A + \Pi_{B'}$ .

*Доказательство.* Если  $\Pi_M \sim \Pi_{M'}$ , для некоторых  $P$  и  $Q$ , то в силу леммы 3 равенство  $(q_{31}x + q_{32}y + q_{33}z)\Delta = z'$  системы (5) принимает вид  $q_{33}z\Delta = 0$ . Так как  $z \neq 0$  и  $\Delta \neq 0$ , то  $q_{33} = 0$ , что противоречит условию  $\det(Q) \neq 0$ .  $\square$

**Лемма 6.** Если  $\Pi_A = (A_1, 0, 0) \in S$  и  $\Pi_B = (B_1, B_2, B_3)$ ,  $\Pi_{B'} = (B'_1, 0, 0)$ , причем  $B_2 \neq 0$  или  $B_3 \neq 0$ , то  $\Pi_M = \Pi_A + \Pi_B \approx \Pi_{M'} = \Pi_A + \Pi_{B'}$ .

*Доказательство.* Если  $\Pi_M \sim \Pi_{M'}$ , для некоторых  $P$  и  $Q$ , то в силу леммы 4 система (5) имеет вид

$$\begin{cases} (q_{11}x + q_{12}y + q_{13}z)\Delta = x'; \\ (q_{22}y + q_{23}z)\Delta = 0; \\ (q_{32}y + q_{33}z)\Delta = 0. \end{cases}$$

Если  $y \neq 0$  или  $z \neq 0$ , то  $\det(Q) = 0$ . Противоречие.  $\square$

Далее, следуя вышеуказанному списку симметрических матриц  $S$ , рассмотрим каждый из четырех случаев в отдельности. Для конкретных симметрических матриц  $(A_1, A_2, A_3) \in S$ , используя стабилизирующие их  $P$  и  $Q$ , мы найдем неэквивалентные между собой, посредством этих  $P$  и  $Q$ , тройки антисимметрических матриц  $(B_1, B_2, B_3)$ . Затем, складывая тройки симметрических и антисимметрических матриц, мы получим необходимые представители классов эквивалентности.

**Случай 1.**  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Определим стабилизирующие матрицы  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  и  $Q = (q_{ij})_{3 \times 3}$  для тройки  $(A_1, A_2, A_3)$ ,  $a, b, c, d, q_{ij} \in F$ . Система (4), при  $A_1 = A'_1, A_2 = A'_2,$

$A_3 = A'_3$ , дает нам три системы линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} a^2 q_{11} + 2acq_{12} + c^2 q_{13} = 1; \\ abq_{11} + (ad + bc)q_{12} + cdq_{13} = 0; \\ b^2 q_{11} + 2bdq_{12} + d^2 q_{13} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 q_{21} + 2acq_{22} + c^2 q_{23} = 0; \\ abq_{21} + (ad + bc)q_{22} + cdq_{23} = 1; \\ b^2 q_{21} + 2bdq_{22} + d^2 q_{23} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 q_{31} + 2acq_{32} + c^2 q_{33} = 0; \\ abq_{31} + (ad + bc)q_{32} + cdq_{33} = 0; \\ b^2 q_{31} + 2bdq_{32} + d^2 q_{33} = 1. \end{cases}$$

Определитель матрицы каждой из систем равен  $\Delta^3 \neq 0$ . Решая их, получаем

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} d^2 & -bd & b^2 \\ -2cd & ad + bc & -2ab \\ c^2 & -ac & a^2 \end{pmatrix},$$

где  $\Delta = ad - bc$ ,  $a, b, c, d \in F$ .

Если  $x \neq 0$ , то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y/(2x) & 1/x \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y & x & 0 \\ y^2/4 & -xy/2 & x^2 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z' \\ -z' & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где  $z' = (-y^2 + 4xz)/4$ .

Если  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z \neq 0$ , то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/z^2 \\ 0 & -1/z & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , то

$$\Pi_B \sim \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если  $x = 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $z \neq 0$ , то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2/y \\ 0 & -4z/y^2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -y/(2z) & y^2/(4z^2) \\ 0 & -y^2/(4z) & y^3/(4z^2) \\ 0 & 0 & y^4/(16z^2) \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -y^2/4 \\ y^2/4 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если  $x = 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $z = 0$ , то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2/y \\ 1 & 2/y \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -y/4 & 0 & y/4 \\ y^2/16 & -y^2/16 & y^2/16 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -y^2/4 \\ y^2/4 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Рассмотрим тройки вида

$$\Pi_B = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix} \right), \text{ где } z \in F,$$

и докажем, что каждая тройка является представителем класса эквивалентности. Если

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix} \right) \sim \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z' \\ -z' & 0 \end{pmatrix} \right),$$

при некоторых  $z, z' \in F, z \neq z'$ , то

$$\begin{cases} (d^2 + b^2z)/\Delta = 1; \\ -2(cd + abz)/\Delta = 0; \\ (c^2 + a^2z)/\Delta = z' \end{cases}$$

Отсюда  $d\Delta = ad^2 - bcd = ad^2 + ab^2z = a(d^2 + b^2z) = a\Delta$ . Следовательно,  $a = d$  и  $cd = ca = -abz$ . Если  $a \neq 0$ , то  $c = -bz$ ,  $\Delta = ad - bc = a^2 - bc$ ,  $z' = (za^2 - cbz)/\Delta = z(a^2 - bc)/\Delta = z$ . Если  $a = d = 0$ , то  $b \neq 0, c \neq 0$ ,  $zb^2 = \Delta = -bc$ ,  $c^2 = -bcz'$ , а значит,  $zb = -c$ ,  $c = -bz'$  и  $z = z'$ . Противоречие.

**Случай 2.**  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , где  $\zeta \in \{0, 1, \delta\}$ .

Если  $z \neq 0$ , то, полагая

$$P = E, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x/z \\ 0 & 1 & -y/z \\ 0 & 0 & 1/z \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если  $z = 0$  ( $B_3 = 0$ ), то, в силу леммы 5, задача сводится к классификации пар  $(A_1, A_2) + (B_1, B_2)$  (см. таблицу 1, строки 1,2).

**Случай 3.**  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , где  $\zeta \in \{0, 1, \delta\}$ .

Полагая

$$P = E, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

заметим, что  $(B_1, B_2, B_3) \sim (B_1, B_3, B_2)$ . Если  $y \neq 0$  или  $z \neq 0$ , то, без потери общности, полагаем  $y \neq 0$ ,

$$P = E, Q = \begin{pmatrix} 1 & -x/y & 0 \\ 0 & 1/y & 0 \\ 0 & -z/y & 1 \end{pmatrix},$$

и получаем

$$\Pi_B \sim \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если  $x = 0$  и  $y = 0$ , то, в силу леммы 6, задача сводится к классификации матриц вида  $A_1 + B_1$  (см. таблицу 1, строки 3, 4).

**Случай 4.**  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Стабилизирующими матрицами являются любые невырожденные матрицы  $P$  и  $Q$ . Если  $\Pi_B$  содержит ненулевые матрицы, то, без потери общности, полагая  $x \neq 0$ ,

$$P = E, Q = \begin{pmatrix} 1/x & 0 & 0 \\ -y/x & 1 & 0 \\ -z/x & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Таким образом, рассмотрены все возможные случаи и мы можем сформулировать полученный результат.

**Теорема 1.** *В следующем списке перечислены представители всех классов эквивалентности, определенной на тройках матриц порядка два посредством соотношения (4):*

- (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
- (2)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 1 \end{pmatrix}, z \in F;$
- (3)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (4)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (5)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta \in F^*;$
- (6)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$
- (7)  $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, \delta\}, (\alpha, \beta) \in \Omega_\varepsilon;$
- (8)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (9)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (10)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$
- (11)  $\begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ -\sigma & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, \delta\};$
- (12)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$$(13) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\delta$  – некоторый фиксированный элемент из  $F^*$ ,  $\delta \notin F^{*2}$ ,  $\delta \neq 1$ , и  $\sigma$  пробегает множество представителей смежных классов  $F^*/\{\pm 1\}$ .

В работе [15] Ч. Чикунджи с помощью пакета прикладных программ Matlab вычислил количество линейно независимых матриц, являющихся представителями классов эквивалентности в смысле равенств (4), при конкретных значениях  $p = 2, 3, \dots$ . Им было сделано предположение о том, что при всяком значении  $p$  их количество равно  $p^r + 4$ . Теорема 1 подтверждает это предположение при  $p \neq 2$ . Линейно независимые тройки матриц указаны в пунктах 1, 2 и 4.

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ КОНЕЧНЫХ КОЛЕЦ

Всюду далее мы будем рассматривать только конечные ассоциативные кольца с единицей. Всякое конечное кольцо единственным образом представимо в виде прямой суммы колец, порядки которых есть степени некоторых простых чисел, то есть  $R = \bigoplus_p R_p$ ,  $R_p = \{x \in R \mid p^n x = 0 \text{ для некоторого } n \geq 1\}$  (см. [16], стр. 29). Поэтому при классификации колец достаточно рассматривать только кольца порядка  $p^n$ . В.Г. Антипкин и В.П. Елизаров описали кольца порядка  $p^n$  для  $n \leq 3$  (см. [17, 18]). Д. Дерр, Г. Орт, П. Пек впервые указали исчерпывающий список некоммутативных колец порядка  $p^4$  (см. [19]). Б. Горбас и Г. Уильямс в работах [10, 11] классифицировали с точностью до изоморфизма все кольца порядка не более  $p^5$ . Кольца порядка  $p^6$ , с некоторыми ограничениями на радикал Джекобсона  $J$ , классифицированы в работах [20, 21]. Важно заметить, что классификация колец сводится к классификации локальных колец (см. [10]), то есть таких колец  $R$ , что  $R/J$  – поле. Известно, что всякое коммутативное кольцо является прямой суммой локальных колец (см. [16], стр. 36).

В работе [22] Ч. Чикунджи описал строение локальных колец с радикалом  $J$  индекса нильпотентности три и сформулировал необходимые и достаточные условия их изоморфности. Далее рассмотрим один из типов таких колец. Пусть  $R$  – локальное кольцо характеристики  $p$ ,  $J^3 = 0$ ,  $Z(R)$  – центр кольца и  $R/J = GF(p^r) = F \subseteq Z(R)$ . Тогда  $R$  – конечномерное векторное пространство над  $F$  и

$$R = F \oplus J, \quad J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus \dots \oplus Fu_n \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus \dots \oplus Fv_m,$$

где  $\dim_F J/J^2 = n$ ,  $\dim_F J^2 = m$  и  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m\}$  – базис  $J$  над  $F$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_n \in J \setminus J^2$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_m \in J^2$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ . (см. [22, 23]). Пусть

$$u_i u_j = m_{ij}^{(1)} v_1 + m_{ij}^{(2)} v_2 + \dots + m_{ij}^{(m)} v_m \quad (6)$$

для некоторых  $m_{ij}^{(k)} \in F$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, m}$ . Рассмотрим матрицы умножения из структурных констант:  $M_k = \left( m_{ij}^{(k)} \right)_{n \times n}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, m}$ . Такие матрицы линейно независимы и, если  $R$  – коммутативно, то матрицы являются симметрическими. По всякой последовательности  $M_k = \left( m_{ij}^{(k)} \right)_{n \times n}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, m}$ , линейно независимых матриц однозначно определяется рассмотренное выше кольцо с умножением (6).

Пусть  $R$  и  $R'$  – произвольные кольца, указанного выше типа, с матрицами умножения  $M_1, M_2, \dots, M_m$  и  $M'_1, M'_2, \dots, M'_m$ , соответственно.

**Теорема 2.** [22]  $R \cong R'$  тогда и только тогда, когда существуют невырожденные матрицы  $P = (p_{ij})_{n \times n}$ ,  $Q = (q_{ij})_{m \times m}$  над полем  $F$  и автоморфизм  $\rho$  поля  $F$  такие, что

$$M'_k = \sum_{i=1}^m q_{ki} P^T M_i^\rho P, \quad k = \overline{1, m}, \quad (7)$$

где  $M_k^\rho = \left( \left( m_{ij}^{(k)} \right)^\rho \right)$ ,  $k = \overline{1, m}$ .

Равенства (7) при  $n = 2$ ,  $m = 3$  отличаются от (4) только наличием автоморфизма  $\rho$  поля  $F$ . Пусть  $\Sigma$  – множество всех таких элементов поля  $F = GF(p^r)$ , что для любых  $a, b \in \Sigma$  не существует изоморфизма  $\rho$  поля  $F$  при котором  $a^\rho = b$  (равносильно – для любых  $a, b \in \Sigma$  не существует такого натурального числа  $k$ , что  $a^{p^k} = b$ ). Используя линейно независимые тройки матриц из теоремы 1 и учитывая действие  $\rho$  мы получаем следующую теорему.

**Теорема 3.** Тройки матриц, представленные ниже, с точностью до изоморфизма определяют все конечные локальные кольца с единицей и условиями:

$$\text{char} R \neq 2, \quad R/J = F \subseteq Z(R), \quad \dim_F J/J^2 = 2, \quad \dim_F J^2 = 3, \quad J^3 = 0.$$

- (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
- (2)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Sigma;$
- (3)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta \in \{0, 1, \delta\}.$

Автор выражает благодарность профессору Ю.Н. Мальцеву за внимание, проявленное к данной работе.

#### REFERENCES

- [1] A.D. Porter, *Orthogonal similarity in a finite field*, Math. Nachr., **40** (1969), 327–331. Zbl 0186.05904
- [2] A.D. Porter, J. Adams, *Similarity and orthogonal similarity in a finite field*, Duke Math. J., **35** (1968), 519–524. Zbl 0181.04102
- [3] M. Newman, *Integral Matrices*, Academic Press, New York-London, 1972. Zbl 0254.15009
- [4] W.C. Waterhouse, *The number of congruence classes in  $M_n(F_q)$* , Finite Fields and Their Applications, **1:1** (1995), 57–63.
- [5] P.S. Bremser, *Congruence classes of matrices in  $GL_2(F_q)$* , Discrete Math., **118:1-3** (1993), 243–249. Zbl 0781.15007
- [6] G.D. Williams, *Congruence of  $(2 \times 2)$  matrices*, Discrete Math., **224:1-3** (2000), 293–297. Zbl 0999.15022
- [7] B. Gorbas, G.D. Williams, *Matrix representatives for three-dimensional bilinear forms over finite fields*, Discrete Math., **185:1-3** (1998), 51–61. Zbl 0951.11014
- [8] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence classes in  $M_3(F_q)$  ( $q$  odd)*, Discrete Math., **219:1-3** (2000), 37–47. Zbl 0957.15007
- [9] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence classes in  $M_3(F_q)$  ( $q$  even)*, Discrete Math., **257:1** (2002), 15–27. Zbl 1014.15010
- [10] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order  $p^5$ . I: Nonlocal rings*, J. Algebra, **231:2** (2000), 677–690. Zbl 1017.16014
- [11] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order  $p^5$ . II: Local rings*, J. Algebra, **231:2** (2000), 691–704. Zbl 1017.16015

- [12] C.J. Chikunji, *On a class of rings of order  $p^5$* , Math. J. Okayama Univ., **45** (2003), 59–71. Zbl 1055.16023
- [13] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence of two-dimensional subspaces in  $M_2(K)$  (characteristic  $\neq 2$ )*, Pac. J. Math., **188**:2 (1999), 225–235. Zbl 0929.16029
- [14] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence of two-dimensional subspaces in  $M_2(K)$  (characteristic 2)*, Pac. J. Math., **188**:2 (1999), 237–249. Zbl 0929.16030
- [15] C.J. Chikunji, *Using Matlab to solve a classification problem in finite rings*, 2<sup>nd</sup> international conference on the teaching of mathematic (Greece), 2002.
- [16] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Gelios ARV, Moscow, 2006.
- [17] V.G. Antipkin, V.P. Elizarov, *Rings of order  $p^3$* , Sib. Math. J., **23** (1982), 457–464. Zbl 0507.16016
- [18] V.P. Elizarov, *Nonnilpotent finite rings*, The manuscript of the dep. in the SB of the USSR Academy of Sciences (editorial board of the Siberian Mathematical Journal), **1472**, 1985.
- [19] J.B. Derr, G.F. Orr, P.S. Peck, *Noncommutative rings of order  $p^4$* , J. Pure Appl. Algebra, **97**:2 (1994), 109–116. Zbl 0821.16024
- [20] E.V. Zhuravlev, *Local rings of order  $p^6$  with 4-nilpotent Jacobson radical*, Sib. Electron. Mat. Izv., **3** (2006), 15–59. Zbl 1117.16009
- [21] E.V. Zhuravlev, *On the classification of finite commutative local rings*, Sib. Electron. Mat. Izv., **12** (2015), 625–638. Zbl 1383.13002
- [22] C.J. Chikunji, *On a class of finite rings*, Commun. Algebra, **27**:10 (1999), 5049–5081. Zbl 0942.16027
- [23] R. Raghavendran, *Finite associative rings*, Compos. Math., **21** (1969), 195–229. Zbl 0179.33602

EVGENIY VLADIMIROVICH ZHURAVLEV  
ALTAI STATE UNIVERSITY,  
PR. LENINA, 61,  
656049, BARNAUL, RUSSIA  
Email address: evzhuravlev@mail.ru