

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
<http://semr.math.nsc.ru>

Том , стр. (2023)
DOI 10.33048/semi.2023.20.xxx

УДК 512.55
MSC 16P10,16W20

О КЛАССАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ НЕЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Е.В. Журавлев

ABSTRACT. In this article we classified up to isomorphism all finite local rings R with Jacobson radical J and conditions:

$$\text{char}R \neq 2, R/J = F \subseteq Z(R), \dim_F J/J^2 = 2, \dim_F J^2 = 3, J^3 = 0.$$

Keywords: finite rings, local rings.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квадратные матрицы M и M' над конечным полем F называются конгруэнтными, если существует невырожденная матрица P над F , такая, что $M' = P^T M P$, где P^T – транспонированная матрица. Причем, если P – ортогональная матрица, $P^T = P^{-1}$, то M и M' называются ортогонально подобными ([1, 2]). В работе [3] М. Ньюман нашел все классы конгруэнтности для симметрических матриц. В. Уотерхаус (см. [4]) для произвольных матриц вычислил количество классов конгруэнтности без указания их представителей. Случай для матриц порядка два был изучен в работах [5, 6], а для матриц порядка три в работах [7, 8, 9].

Пусть $M_1, M_2, \dots, M_m, M'_1, M'_2, \dots, M'_m \in M_n(F)$, $F = GF(p^r)$ – конечное поле, p – простое число, $m, n, r \in \mathbb{N}$. Упорядоченные последовательности матриц (M_1, M_2, \dots, M_m) и $(M'_1, M'_2, \dots, M'_m)$ назовем эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{n \times n}$ и $Q = (q_{ij})_{m \times m}$ над полем F такие, что

$$M'_k = \sum_{i=1}^m q_{ki} P^T M_i P, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1)$$

ZHURAVLEV, E.V., ON EQUIVALENCE CLASSES OF MATRICES OVER A FINITE FIELD OF ODD CHARACTERISTIC.

© 2023 ЖУРАВЛЕВ Е.В..

Поступила 2023 г., опубликована 2023 г.

В частности, при $m = 1$ получаем:

$$M'_1 = q_{11}P^T M_1 P. \quad (2)$$

Очевидно, что в этом случае из конгруэнтности матриц следует их эквивалентность. В работах [6, 10, 11, 12] авторы, используя полученные ранее классы конгруэнтности матриц порядка два и три над простым полем, нашли их представители классов эквивалентности.

Для двоек матриц порядка два ($m = 2$ и $n = 2$) эквивалентность определяется равенствами

$$\begin{cases} P^T (q_{11}M_1 + q_{12}M_2) P = M'_1; \\ P^T (q_{21}M_1 + q_{22}M_2) P = M'_2. \end{cases} \quad (3)$$

Б. Горбас и Г. Уильямс полностью изучили этот случай при $p \neq 2$ в работе [13] и при $p = 2$ в работе [14].

При $m = 3$ и $n = 2$ получаем, что тройки (M_1, M_2, M_3) , (M'_1, M'_2, M'_3) матриц второго порядка эквивалентны, если существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{2 \times 2}$ и $Q = (q_{ij})_{3 \times 3}$ такие, что

$$\begin{cases} P^T (q_{11}M_1 + q_{12}M_2 + q_{13}M_3) P = M'_1; \\ P^T (q_{21}M_1 + q_{22}M_2 + q_{23}M_3) P = M'_2; \\ P^T (q_{31}M_1 + q_{32}M_2 + q_{33}M_3) P = M'_3. \end{cases} \quad (4)$$

Цель данной работы – найти представители классов эквивалентности для данного случая, при $p \neq 2$, и применить полученный результат для классификации конечных локальных колец.

2. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МАТРИЦ

Далее будем полагать, что $F = GF(p^r)$ – конечное поле нечетной характеристики ($p \neq 2$), δ – некоторый фиксированный элемент из F^* , такой, что $\delta \notin F^{*2}$, $\delta \neq 1$. Пусть $\varepsilon \in \{1, \delta\}$, то есть ε пробегает множество представителей смежных классов F^*/F^{*2} . Если $\varepsilon = 1$ (соотв. $\varepsilon = \delta$), то для каждого $f \in F$ (соотв. $f \in F^*$) найдем ненулевое решение (x, y) уравнения $x^2 - \varepsilon y^2 = f$. Обозначим Ω_ε множество найденных таким образом элементов из $F \times F$. Кроме того, пусть σ пробегает множество представителей смежных классов $F^*/\{\pm 1\}$.

Лемма 1. *Всякая квадратная матрица M над полем F представима в виде суммы симметрической матрицы A и антисимметрической матрицы B (т.е. такой, что $B^T = -B$). Причем матрицы, эквивалентные симметрическим матрицам, являются также симметрическими, а матрицы, эквивалентные антисимметрическим матрицам, являются также антисимметрическими.*

Основываясь на результатах работ [3, 13] приведем в таблице 1 последовательности матриц, являющихся представителями классов эквивалентности, определяемой соотношениями (2) и (3), у которых соответствующие симметрические матрицы являются линейно независимыми.

таблица 1

симметрические матрицы	несимметрические матрицы
1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix};$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$ где $\beta \in F^*$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$	$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\beta \\ 1-\beta & 0 \end{pmatrix},$ где $(\alpha, \beta) \in \Omega_\varepsilon$;
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix};$	$\begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ -\sigma & \varepsilon \end{pmatrix}.$

Всюду далее мы будем рассматривать тройки матриц порядка два над полем F и отношение эквивалентности, определяемое равенствами (4). Сначала укажем представителей классов эквивалентности симметрических матриц. Для этого разделим их на группы в соответствии с рангом. Так как симметрические матрицы это подпространство размерности три, то все тройки линейно независимых матриц образуют один класс эквивалентности и тройку матриц ранга три, представителя этого класса, мы можем выбрать, например, $e_{11}, e_{12} + e_{21}, e_{22}$. Тройки матриц ранга два это двойки линейно независимых матриц – представителей классов эквивалентности, определяемой соотношением (3), с добавленной нулевой матрицей. Тройки матриц ранга один это ненулевые матрицы – представители классов эквивалентности, определяемой соотношением (2), с добавленными нулевыми матрицами (см. таблицу 1).

Итак, пусть S – множество, состоящее из следующих троек матриц:

- (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
- (2) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (3) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (4) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Если при некоторых P и Q последовательность матриц (M_1, M_2, \dots, M_m) эквивалентна самой себе, то будем говорить, что пара матриц (P, Q) стабилизирует (M_1, M_2, \dots, M_m) . Кроме того, определим на тройках матриц покомпонентное сложение

$$(A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3) = (A_1, A_2, A_3) + (B_1, B_2, B_3),$$

где $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 \in M_2(F)$

Лемма 2.

(1) *Всякий класс эквивалентности содержит тройку*

$$(M_1, M_2, M_3) = (A_1, A_2, A_3) + (B_1, B_2, B_3),$$

где $(A_1, A_2, A_3) \in S$ и (B_1, B_2, B_3) – тройка антисимметрических матриц. Причем каждый класс определяется $(A_1, A_2, A_3) \in S$ единственным образом.

(2) Пусть $(A_1, A_2, A_3) \in S$ и $(B_1, B_2, B_3), (B'_1, B'_2, B'_3)$ – тройки антисимметрических матриц.

$$(A_1, A_2, A_3) + (B_1, B_2, B_3) \sim (A_1, A_2, A_3) + (B'_1, B'_2, B'_3)$$

тогда и только тогда, когда существуют P и Q такие, что

(a) (P, Q) стабилизирует (A_1, A_2, A_3) ;

(b) $(B_1, B_2, B_3) \sim (B'_1, B'_2, B'_3)$ посредством P и Q .

Лемма 3. Если $(A_1, A_2, 0) \in S$, $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, то стабилизирующие матрицы P и Q для тройки $(A_1, A_2, 0)$ имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix},$$

причем матрицы

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

являются стабилизирующими для двойки (A_1, A_2) в смысле эквивалентности, определяемой равенствами (3).

Доказательство. Так как матрицы A_1, A_2 линейно независимы, то равенство $P^T (q_{31}A_1 + q_{32}A_2) P = 0$ (см. (4)) возможно только при $q_{31} = 0$ и $q_{32} = 0$. \square

Лемма 4. Если $(A_1, A_2, 0) \in S$, $A_1 \neq 0$, то стабилизирующие матрицы P и Q для тройки $(A_1, 0, 0)$ имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix},$$

причем матрицы

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad (q_{11})$$

являются стабилизирующими для матрицы A_1 в смысле эквивалентности, определяемой равенствами (2).

Доказательство. В этом случае система (4) принимает вид

$$\begin{cases} P^T (q_{11}A_1)P = A_1; \\ P^T (q_{21}A_1)P = 0; \\ P^T (q_{31}A_1)P = 0. \end{cases}$$

Так как $\det(P) \neq 0$, то $P^T A_1 P \neq 0$ и, следовательно, $q_{21} = 0$ и $q_{31} = 0$. \square

Пусть далее $\Delta = \det(P)$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix},$$

$$B'_1 = \begin{pmatrix} 0 & x' \\ -x' & 0 \end{pmatrix}, B'_2 = \begin{pmatrix} 0 & y' \\ -y' & 0 \end{pmatrix}, B'_3 = \begin{pmatrix} 0 & z' \\ -z' & 0 \end{pmatrix},$$

где $x, y, z, x', y', z' \in F$. Если $\Pi_B = (B_1, B_2, B_3) \sim \Pi_{B'} = (B'_1, B'_2, B'_3)$, то

$$\begin{cases} (q_{11}x + q_{12}y + q_{13}z)\Delta = x'; \\ (q_{21}x + q_{22}y + q_{23}z)\Delta = y'; \\ (q_{31}x + q_{32}y + q_{33}z)\Delta = z'. \end{cases} \quad (5)$$

Лемма 5. Если $\Pi_A = (A_1, A_2, 0) \in S$ и $\Pi_B = (B_1, B_2, B_3)$, $\Pi_{B'} = (B'_1, B'_2, 0)$, причем $B_3 \neq 0$, то $\Pi_M = \Pi_A + \Pi_B \approx \Pi_{M'} = \Pi_A + \Pi_{B'}$.

Доказательство. Если $\Pi_M \sim \Pi_{M'}$, для некоторых P и Q , то в силу леммы 3 равенство $(q_{31}x + q_{32}y + q_{33}z)\Delta = z'$ системы (5) принимает вид $q_{33}z\Delta = 0$. Так как $z \neq 0$ и $\Delta \neq 0$, то $q_{33} = 0$, что противоречит условию $\det(Q) \neq 0$. \square

Лемма 6. Если $\Pi_A = (A_1, 0, 0) \in S$ и $\Pi_B = (B_1, B_2, B_3)$, $\Pi_{B'} = (B'_1, 0, 0)$, причем $B_2 \neq 0$ или $B_3 \neq 0$, то $\Pi_M = \Pi_A + \Pi_B \approx \Pi_{M'} = \Pi_A + \Pi_{B'}$.

Доказательство. Если $\Pi_M \sim \Pi_{M'}$, для некоторых P и Q , то в силу леммы 4 система (5) имеет вид

$$\begin{cases} (q_{11}x + q_{12}y + q_{13}z)\Delta = x'; \\ (q_{22}y + q_{23}z)\Delta = 0; \\ (q_{32}y + q_{33}z)\Delta = 0. \end{cases}$$

Если $y \neq 0$ или $z \neq 0$, то $\det(Q) = 0$. Противоречие. \square

Далее, следуя вышеуказанному списку симметрических матриц S , рассмотрим каждый из четырех случаев в отдельности. Для конкретных симметрических матриц $(A_1, A_2, A_3) \in S$, используя стабилизирующие их P и Q , мы найдем неэквивалентные между собой, посредством этих P и Q , тройки антисимметрических матриц (B_1, B_2, B_3) . Затем, складывая тройки симметрических и антисимметрических матриц, мы получим необходимые представители классов эквивалентности.

Случай 1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Определим стабилизирующие матрицы $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $Q = (q_{ij})_{3 \times 3}$ для тройки (A_1, A_2, A_3) , $a, b, c, d, q_{ij} \in F$. Система (4), при $A_1 = A'_1, A_2 = A'_2,$

$A_3 = A'_3$, дает нам три системы линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} a^2q_{11} + 2acq_{12} + c^2q_{13} = 1; \\ abq_{11} + (ad + bc)q_{12} + cdq_{13} = 0; \\ b^2q_{11} + 2bdq_{12} + d^2q_{13} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2q_{21} + 2acq_{22} + c^2q_{23} = 0; \\ abq_{21} + (ad + bc)q_{22} + cdq_{23} = 1; \\ b^2q_{21} + 2bdq_{22} + d^2q_{23} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2q_{31} + 2acq_{32} + c^2q_{33} = 0; \\ abq_{31} + (ad + bc)q_{32} + cdq_{33} = 0; \\ b^2q_{31} + 2bdq_{32} + d^2q_{33} = 1. \end{cases}$$

Определитель матрицы каждой из систем равен $\Delta^3 \neq 0$. Решая их, получаем

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} d^2 & -bd & b^2 \\ -2cd & ad + bc & -2ab \\ c^2 & -ac & a^2 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = ad - bc$, $a, b, c, d \in F$.

Если $x \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y/(2x) & 1/x \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y & x & 0 \\ y^2/4 & -xy/2 & x^2 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z' \\ -z' & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где $z' = (-y^2 + 4xz)/4$.

Если $x = 0$, $y = 0$, $z \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/z^2 \\ 0 & -1/z & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, то

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если $x = 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2/y \\ 0 & -4z/y^2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -y/(2z) & y^2/(4z^2) \\ 0 & -y^2/(4z) & y^3/(4z^2) \\ 0 & 0 & y^4/(16z^2) \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -y^2/4 \\ y^2/4 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если $x = 0$, $y \neq 0$, $z = 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2/y \\ 1 & 2/y \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -y/4 & 0 & y/4 \\ y^2/16 & -y^2/16 & y^2/16 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -y^2/4 \\ y^2/4 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Рассмотрим тройки вида

$$\Pi_B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix} \right), \text{ где } z \in F,$$

и докажем, что каждая тройка является представителем класса эквивалентности. Если

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z' \\ -z' & 0 \end{pmatrix} \right),$$

при некоторых $z, z' \in F, z \neq z'$, то

$$\begin{cases} (d^2 + b^2z)/\Delta = 1; \\ -2(cd + abz)/\Delta = 0; \\ (c^2 + a^2z)/\Delta = z' \end{cases}$$

Отсюда $d\Delta = ad^2 - bcd = ad^2 + ab^2z = a(d^2 + b^2z) = a\Delta$. Следовательно, $a = d$ и $cd = ca = -abz$. Если $a \neq 0$, то $c = -bz$, $\Delta = ad - bc = a^2 - bc$, $z' = (za^2 - cbz)/\Delta = z(a^2 - bc)/\Delta = z$. Если $a = d = 0$, то $b \neq 0, c \neq 0$, $zb^2 = \Delta = -bc, c^2 = -bcz'$, а значит, $zb = -c, c = -bz'$ и $z = z'$. Противоречие.

Случай 2. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\zeta \in \{0, 1, \delta\}$.

Если $z \neq 0$, то, полагая

$$P = E, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x/z \\ 0 & 1 & -y/z \\ 0 & 0 & 1/z \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если $z = 0$ ($B_3 = 0$), то, в силу леммы 5, задача сводится к классификации пар $(A_1, A_2) + (B_1, B_2)$ (см. таблицу 1, строки 1,2).

Случай 3. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\zeta \in \{0, 1, \delta\}$.

Полагая

$$P = E, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

заметим, что $(B_1, B_2, B_3) \sim (B_1, B_3, B_2)$. Если $y \neq 0$ или $z \neq 0$, то, без потери общности, полагаем $y \neq 0$,

$$P = E, Q = \begin{pmatrix} 1 & -x/y & 0 \\ 0 & 1/y & 0 \\ 0 & -z/y & 1 \end{pmatrix},$$

и получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Если $x = 0$ и $y = 0$, то, в силу леммы 6, задача сводится к классификации матриц вида $A_1 + B_1$ (см. таблицу 1, строки 3, 4).

$$\text{Случай 4. } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стабилизирующими матрицами являются любые невырожденные матрицы P и Q . Если Π_B содержит ненулевые матрицы, то, без потери общности, полагая $x \neq 0$,

$$P = E, Q = \begin{pmatrix} 1/x & 0 & 0 \\ -y/x & 1 & 0 \\ -z/x & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi_B \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Таким образом, рассмотрены все возможные случаи и мы можем сформулировать полученный результат.

Теорема 1. В следующем списке перечислены представители всех классов эквивалентности, определенной на тройках матриц порядка два посредством соотношения (4):

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 1 \end{pmatrix}, z \in F;$
- (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 + \beta \\ 1 - \beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta \in F^*;$
- (6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$
- (7) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 + \beta \\ 1 - \beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, \delta\}, (\alpha, \beta) \in \Omega_\varepsilon;$
- (8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \zeta \in \{0, 1, \delta\};$
- (10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$
- (11) $\begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ -\sigma & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon \in \{1, \delta\};$
- (12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$$(13) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где δ – некоторый фиксированный элемент из F^* , $\delta \notin F^{*2}$, $\delta \neq 1$, и σ пробегает множество представителей смежных классов $F^*/\{\pm 1\}$.

В работе [15] Ч. Чикунджи с помощью пакета прикладных программ Matlab вычислил количество линейно независимых матриц, являющихся представителями классов эквивалентности в смысле равенств (4), при конкретных значениях $p = 2, 3, \dots$. Им было сделано предположение о том, что при всяком значении p их количество равно $p^r + 4$. Теорема 1 подтверждает это предположение при $p \neq 2$. Линейно независимые тройки матриц указаны в пунктах 1, 2 и 4.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ КОНЕЧНЫХ КОЛЕЦ

Всюду далее мы будем рассматривать только конечные ассоциативные кольца с единицей. Всякое конечное кольцо единственным образом представимо в виде прямой суммы колец, порядки которых есть степени некоторых простых чисел, то есть $R = \bigoplus_p R_p$, $R_p = \{x \in R \mid p^n x = 0 \text{ для некоторого } n \geq 1\}$ (см. [16], стр. 29). Поэтому при классификации колец достаточно рассматривать только кольца порядка p^n . В.Г. Антипкин и В.П. Елизаров описали кольца порядка p^n для $n \leq 3$ (см. [17, 18]). Д. Дерр, Г. Орт, П. Пек впервые указали исчерпывающий список некоммутативных колец порядка p^4 (см. [19]). Б. Горбас и Г. Уильямс в работах [10, 11] классифицировали с точностью до изоморфизма все кольца порядка не более p^5 . Кольца порядка p^6 , с некоторыми ограничениями на радикал Джекобсона J , классифицированы в работах [20, 21]. Важно заметить, что классификация колец сводится к классификации локальных колец (см. [10]), то есть таких колец R , что R/J – поле. Известно, что всякое коммутативное кольцо является прямой суммой локальных колец (см. [16], стр. 36).

В работе [22] Ч. Чикунджи описал строение локальных колец с радикалом J индекса нильпотентности три и сформулировал необходимые и достаточные условия их изоморфности. Далее рассмотрим один из типов таких колец. Пусть R – локальное кольцо характеристики p , $J^3 = 0$, $Z(R)$ – центр кольца и $R/J = GF(p^r) = F \subseteq Z(R)$. Тогда R – конечномерное векторное пространство над F и

$$R = F \oplus J, \quad J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus \dots \oplus Fu_n \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus \dots \oplus Fv_m,$$

где $\dim_F J/J^2 = n$, $\dim_F J^2 = m$ и $\{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m\}$ – базис J над F , $u_1, u_2, \dots, u_n \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2, \dots, v_m \in J^2$, $n, m \in \mathbb{N}$. (см. [22, 23]). Пусть

$$u_i u_j = m_{ij}^{(1)} v_1 + m_{ij}^{(2)} v_2 + \dots + m_{ij}^{(m)} v_m \quad (6)$$

для некоторых $m_{ij}^{(k)} \in F$, $i, j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$. Рассмотрим матрицы умножения из структурных констант: $M_k = \left(m_{ij}^{(k)} \right)_{n \times n}$, $i, j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$. Такие матрицы линейно независимы и, если R – коммутативно, то матрицы являются симметрическими. По всякой последовательности $M_k = \left(m_{ij}^{(k)} \right)_{n \times n}$, $i, j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$, линейно независимых матриц однозначно определяется рассмотренное выше кольцо с умножением (6).

Пусть R и R' – произвольные кольца, указанного выше типа, с матрицами умножения M_1, M_2, \dots, M_m и M'_1, M'_2, \dots, M'_m , соответственно.

Теорема 2. [22] $R \cong R'$ тогда и только тогда, когда существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{n \times n}$, $Q = (q_{ij})_{m \times m}$ над полем F и автоморфизм ρ поля F такие, что

$$M'_k = \sum_{i=1}^m q_{ki} P^T M_i^\rho P, \quad k = \overline{1, m}, \quad (7)$$

где $M_k^\rho = \left(\left(m_{ij}^{(k)} \right)^\rho \right)$, $k = \overline{1, m}$.

Равенства (7) при $n = 2$, $m = 3$ отличаются от (4) только наличием автоморфизма ρ поля F . Пусть Σ – множество всех таких элементов поля $F = GF(p^r)$, что для любых $a, b \in \Sigma$ не существует изоморфизма ρ поля F при котором $a^\rho = b$ (равносильно – для любых $a, b \in \Sigma$ не существует такого натурального числа k , что $a^{p^k} = b$). Используя линейно независимые тройки матриц из теоремы 1 и учитывая действие ρ мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. Тройки матриц, представленные ниже, с точностью до изоморфизма определяют все конечные локальные кольца с единицей и условиями:

$$\text{char} R \neq 2, \quad R/J = F \subseteq Z(R), \quad \dim_F J/J^2 = 2, \quad \dim_F J^2 = 3, \quad J^3 = 0.$$

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \Sigma;$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta \in \{0, 1, \delta\}.$$

Автор выражает благодарность профессору Ю.Н. Мальцеву за внимание, проявленное к данной работе.

REFERENCES

- [1] A.D. Porter, *Orthogonal similarity in a finite field*, Math. Nachr., **40** (1969), 327–331.
- [2] A.D. Porter, J. Adams, *Similarity and orthogonal similarity in a finite field*, Duke Math. J., **35** (1968), 519–524.
- [3] M. Newman, *Integral Matrices*, Academic Press, N.Y., 1972.
- [4] W.C. Waterhouse, *The number of congruence classes in $M_n(F_q)$* , Finite fields and their applications, **1** (1995), 57–63.
- [5] P.S. Bremser, *Congruence classes of matrices in $GL_2(F_q)$* , Discrete Math., **118** (1993), 243–249.
- [6] G.D. Williams, *Congruence of (2×2) matrices*, Discrete Math., **224** (2000), 293–297.
- [7] B. Gorbas, G.D. Williams, *Matrix representatives for three-dimensional bilinear forms over finite fields*, Discrete Math., **185** (1998), 51–61.
- [8] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence classes in $M_3(F_q)$ (q odd)*, Discrete Math., **219** (2000), 37–47.
- [9] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence classes in $M_3(F_q)$ (q even)*, Discrete Math., **257** (2002), 15–27.
- [10] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5 . Part 1. Nonlocal rings*, Journal of Algebra, **231** (2000), 677–690.
- [11] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5 . Part 2. Local rings*, Journal of Algebra, **231** (2000), 691–704.
- [12] C.J. Chikunji, *On a class of rings of order p^5* , Math. J. Okayama Univ., **45** (2003), 59–71.
- [13] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ ($\text{characteristic} \neq 2$)*, Pacific Journal of Mathematics, **188:2** (1999), 225–235.

- [14] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ (characteristic 2)*, Pacific Journal of Mathematics, **188**:2 (1999), 237–249.
- [15] C.J. Chikunji, *Using Matlab to solve a classification problem in finite rings*, 2nd international conference on the teaching of mathematic (Greece), (2002), Mode of access:<http://www.math.uoc.gr/ictm2/Proceedings/pap252.pdf>.
- [16] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Gelios ARV, Moscow, 2006.
- [17] V.G. Antipkin, V.P. Elizarov, *Rings of order p^3* , Siberian Mathematical Journal, **23** (1982), 457–464.
- [18] V.P. Elizarov, *Nonnilpotent finite rings*, The manuscript of the dep. in the SB of the USSR Academy of Sciences (editorial board of the Siberian Mathematical Journal), **1472** (1985).
- [19] J.B. Derr, G.F. Orr, P.S. Peck, *Noncommutative rings of order p^4* , Journal of Pure and Applied Algebra, **97** (1994), 109–116.
- [20] E.V. Zhuravlev, *Local rings of order p^6 with 4-nilpotent radical of Jacobson*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **3** (2006), 15–29.
- [21] E.V. Zhuravlev, *On the classification of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 625–638.
- [22] C.J. Chikunji, *On a class of finite rings*, Communication in Algebra, **27**:10 (1999), 5049–5081.
- [23] R. Raghavendran, *Finite associative rings*, Compositio Math., **21** (1969), 195–229.

EVGENIY VLADIMIROVICH ZHURAVLEV
ALTAI STATE UNIVERSITY,
PR. LENINA, 61,
656049, BARNAUL, RUSSIA
E-mail address: evzhuravlev@mail.ru