S(e)MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–144 (2023) УДК 519.218.27
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 60J80

LOWER LARGE DEVIATIONS OF STRONGLY SUPERCRITICAL BRANCHING PROCESS IN RANDOM ENVIRONMENT WITH GEOMETRIC NUMBER OF DESCENDANTS: LOCAL ASYMPTOTICS

K.Y. DENISOV

Представлено П.П. Петровым *(заполняется редактором)*

Abstract: We consider local probabilities of lower deviations for branching process $Z_n = X_{n,1}+\dots+X_{n,Z_{n-1}}$ in random environment $\boldsymbol{\eta}$. We assume that $\boldsymbol{\eta}$ is a sequence of independent identically distributed variables and for fixed $\boldsymbol{\eta}$ the distribution of variables $X_{i,j}$ is geometric. We suppose that the associated random walk $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ has positive mean μ and satisfies left-hand Cramer's condition $\mathbf{E}\exp(h\xi_i) < \infty$ as $h^- < h < 0$ for some $h^- < -1$. Under these assumptions, we find the asymptotic representation for local probabilities $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$, where θ is near the boundary of the first and the second deviations zones.

Keywords: branching processes, random environment, random walk, Cramer's condition, large deviations, local theorems.

1 Введение

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, ...)$ — последовательность независимых одинаково распределённых (н.о.р.) случайных величин (с.в.), а $\{\phi_y\}_{y\in\mathbb{R}}$ — семейство

Denisov K.Y., Local Lower Large Deviations of Strongly Supercritical BPREG.

Работа поддержана РНФ (грант №19-11-00111-П).

Поступила 08 июля 2023 г., опубликована ?? ???бря 2023 г.

производящих функций (п.ф.). При фиксированной среде $\boldsymbol{\eta}$ рассмотрим набор независимых случайных величин $X_{i,j}, j \in \mathbb{N}$, имеющих п.ф. ϕ_{η_i} при каждом $i \in \mathbb{N}$.

Ветвящимся процессом $(Z_n, n \geq 0)$ в случайной среде $\boldsymbol{\eta}$ (ВПСС) назовём последовательность случайных величин, заданную соотношениями:

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = X_{n+1,1} + \cdots + X_{n+1,Z_n}, \ n \geq 0.$$

Положим $\xi_i = \ln \phi'_{\eta_i}(1), \mathbf{E}\xi_i = \mu$. Сопровождающим случайным блужданием ВПСС назовём последовательность случайных величин $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n \geq 1$.

В работе рассматривается случай геометрического семейства п.ф.:

$$\phi_y(s) = 1 - \left(1 + \frac{1}{\phi'_y(1)(1-s)}\right)^{-1}. \tag{1}$$

ВПСС, в котором п.ф. числа потомков одной частицы задаются соотношением (1), будем называть ветвящимся процессом в случайной среде с геометрическим числом потомков (ВПССГ).

Назовём с.в. ζ решётчатой, если существуют такие вещественные числа a и b, $b > 0$, что

$$\mathbf{P}(\zeta \in \{a + bn, n \in \mathbb{Z}\}) = 1,$$

и нерешетчатой в ином случае. В работе рассматриваются ВПСС, шаги ξ сопровождающих блужданий S_n которых имеют нерешетчатые распределения.

Для ВПСС хорошо изучена задача о верхних больших уклонениях размера популяции, то есть исследована асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(Z_n > \exp(\theta n))$, где $\theta > \mu$. В частности, для ВПССГ асимптотика такого рода вероятностей была получена М.В. Козловым ([1], [2]). В общем случае (без предположения о том, что число потомков имеет геометрическое распределение) известны как логарифмическая асимптотика таких вероятностей ([3]), так и точная асимптотика ([4], [5]).

Для вероятностей нижних больших уклонений $\mathbf{P}(1 \leq Z_n < \exp(\theta n))$, где $\theta < \mu$, исследована логарифмическая асимптотика ([6]). Для случая $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (m(-1); \mu)$ для некоторого $m(-1)$, которое будет определено далее — то есть для случая первой зоны нижних больших уклонений — автором получена локальная асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ ([9]). Также локальная асимптотика $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ исследована для случая второй зоны нижних больших уклонений — то есть для $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\mu^-; m(-1))$, где μ^- также будет определена далее ([10]). В данной работе рассматривается задача об асимптотике вероятностей нижних больших уклонений в локальной форме $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ для значений θ, принадлежащих некоторому отрезку $[\theta_1; \theta_2]$, где θ_1 и θ_2 стремятся к $m(-1)$. Иными словами, рассматриваются переходные явления на границе первой и второй зон нижних больших уклонений. Для указанных вероятностей в работе получено асимптотическое представление.

Работа организована следующим образом: в разделе 2 даются предварительные сведения о сопряженных распределениях и ВПСС, а также необходимые нам теорема 1 и лемма 1, в разделе 3 сформулирована основная теорема 2 об асимптотике локальных вероятностей нижних уклонений ВПССГ, а также важное следствие 1, в разделе 4 приведено доказательство основной теоремы 2, а в разделе 5 — доказательство замечания 1.

2 Предварительные сведения

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные нерешетчатые случайные величины с функцией распределения $F(x)$, удовлетворяющие условию $0 < \mu := \mathbf{E}\xi < \infty$. Здесь и далее мы будем использовать символ ξ для обозначения случайной величины, имеющей такое же распределение, что и ξ_i.

Будем предполагать, что выполнено левостороннее условие Крамера: найдется число $h^- < 0$, такое что $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h^- < h < 0$. Для указанных значений параметра h положим

$$m(h) = (\ln R(h))' = \mathbf{E}\xi e^{h\xi}/R(h), \quad \sigma^2(h) = m'(h),$$
$$F^{(h)}(x) = R^{-1}(h) \int\limits_{-\infty}^{x} e^{hu}\mathbf{P}(\xi \in \mathrm{d}u). \tag{2}$$

Распределение, порожденное функцией $F^{(h)}$, назовем сопряженным к распределению с.в. ξ с параметром h. Независимые одинаково распределённые величины, имеющие сопряженное распределение с параметром h, будем обозначать $\xi_i^{(h)}$. Нам также понадобится обозначение $S_n^{(h)} = \xi_1^{(h)} + \cdots + \xi_n^{(h)}$. Из определения сопряженного распределения следует, что

$$\mathbf{E}\xi_i^{(h)} = m(h), \ \mathbf{D}\xi_i^{(h)} = \sigma^2(h) > 0. \tag{3}$$

Следовательно, функция $m(h)$ монотонно возрастает при $h \in (h^-; 0)$. Обозначим $m^- := \lim_{h \downarrow h^-} m(h)$. Таким образом, при всех $\theta \in (m^-; \mu)$ найдётся единственное число h_θ, принадлежащее $(h^-, 0)$, такое что $m(h_\theta) = \theta$. Положим $\Lambda(\theta) = h_\theta \theta - \ln R(h_\theta)$. Функцию Λ назовем функцией уклонений.

Величины с сопряженным распределением также удовлетворяют условию Крамера. А именно, если $\widetilde{h} \in (h^-, 0)$, то

$$R^{(\widetilde{h})}(h) := \mathbf{E}\exp\left(h\xi^{(\widetilde{h})}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{hx}\mathbf{P}\left(\xi^{(\widetilde{h})} \in \mathrm{d}x\right) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(h+\widetilde{h}\right)x} \frac{\mathbf{P}(\xi \in \mathrm{d}x)}{R\left(\widetilde{h}\right)} = \frac{R\left(\widetilde{h}+h\right)}{R\left(\widetilde{h}\right)} \tag{4}$$

при $h \in \left(h^- - \widetilde{h}; -\widetilde{h}\right)$. Положим

$$m^{(\widetilde{h})}(h) = \left(\ln R^{(\widetilde{h})}(h)\right)'_h = \left(\ln R(h+\widetilde{h}) - \ln R(\widetilde{h})\right)'_h = m\left(h+\widetilde{h}\right).$$

По определению при каждом $\widetilde{h} \in (h^- - h_\theta; -h_\theta)$ величина $h_\theta^{(\widetilde{h})}$ должна удовлетворять уравнению

$$m^{(\widetilde{h})}\left(h_\theta^{(\widetilde{h})}\right) = \theta = m\left(h_\theta^{(\widetilde{h})} + \widetilde{h}\right).$$

Таким образом,

$$h_\theta^{(\widetilde{h})} = h_\theta - \widetilde{h}, \quad m^{(\widetilde{h})}\left(h_\theta^{(\widetilde{h})}\right) = m\left(h_\theta\right), \quad \sigma^{(\widetilde{h})}\left(h_\theta^{(\widetilde{h})}\right) = \sigma\left(h_\theta\right). \tag{5}$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1 ([7])**.** *Пусть ξ — нерешетчатая с.в. с математическим ожиданием $\mathbf{E}\xi = \mu < \infty$, для которой выполнено условие Крамера: $R(h) < \infty$ при $h^- < h < 0$. Пусть $\xi_i^{(h)}$ — н.о.р. с.в., сопряженные к ξ с параметром h, $\mathbf{E}\xi^{(h)} = m(h)$ и $\mathbf{D}\xi^{(h)} = \sigma^2(h) < \infty$. Тогда при любом фиксированном $\triangle > 0$ и $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}\left(S_n^{(h)} \in [x; x+\triangle)\right) = \frac{\triangle}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} \exp\left(\frac{-(x-m(h)n)^2}{2n\sigma^2(h)}\right) + \frac{o(1)}{\sqrt{n}},$$

где $o(1)$ равномерно мало по всем действительным x и $h \in [h_1; h_2] \subset (h^-; 0)$.

Теорема 1 доказана в более общем виде в [7] (теорема 1.5.3, параграф 1.5, страница 48), где также рассмотрен и случай сопряженных величин (теорема 2.2.1, параграф 2.2, страница 56). Также нам понадобится следующий результат, доказанный в [10] как лемма 2.

Лемма 1 ([10])**.** *Пусть $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ — случайное блуждание, причем величина ξ предполагается нерешетчатой, а $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$. Предположим, что распределение с.в. ξ удовлетворяет условию Крамера: $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h^- < h < 0$, где $h^- < -1$. Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$ таково, что $\theta(n) = \theta := \ln k/n$. Для произвольной константы a, а также произвольных последовательностей g_n и d_n таких, что $|g_n| < D\sqrt{n}$ и $G < d_n - g_n < D\sqrt{n}$ для всех n и некоторых положительных констант D и G, верно, что*

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{V}_n < a \,\middle|\, \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\right) \to \mathbf{P}\left(\widetilde{V}_\infty < a\right)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$ при $n \to \infty$, где

$$\widetilde{V}_n := \sum_{i=0}^{n} e^{-S_i^{(h_\theta)}}, \ \widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(h_\theta)}}, \ \widetilde{S}_n = S_n^{(h_\theta)} - \theta n.$$

В дальнейшем нам будет удобно обозначать через $\rho_n = \rho_n(\theta, \theta_1, \theta_2)$ величины, стремящиеся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$. При этом в разных местах ρ_n будет, вообще говоря, обозначать различные функции. Кроме того, в некоторых случаях мы будем использовать это обозначение для величин, стремящихся к нулю при $n \to \infty$ и не зависящих от θ.

3 Основной результат

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение данной работы.

Теорема 2 (локальная теорема о нижних уклонениях ВПССГ)**.** *Пусть* $(Z_n, n \geq 0)$ *— ВПССГ со средой* $\boldsymbol{\eta}$, *порожденной последовательностью н.о.р. величин,* $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ *— его сопровождающее случайное блуждание, где величины* ξ *предполагаются нерешетчатыми,* $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$. *Предположим, что распределение с.в.* ξ *удовлетворяет условию Крамера:* $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ *при* $h^- < h < 0$, *где* $h^- < -1$. *Пусть* $m(-1) > 0$. *Пусть* $k(n) = k \in \mathbb{N}$ *таково, что* $\theta(n) = \theta := \ln k/n$.

Пусть $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$, *где* $\theta_1 = \theta_1(n) \to m(-1)$ *и* $\theta_2 = \theta_2(n) \to m(-1)$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = (1 + \rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} \times \\ \times \exp\left(\frac{\sigma^2(h_\theta)n(1 + h_\theta)^2}{2}\right)\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(h_\theta)}\right)\right) \tag{6}$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, *где*

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(h_\theta)}}.$$

В процессе доказательства теоремы 2 мы также получим следующий важный результат.

Следствие 1. *Пусть верны условия теоремы 2. Пусть* ε_n *— некоторая положительная последовательность, стремящаяся к бесконечности, но являющаяся* $o(\sqrt{n})$ *при* $n \to \infty$. *Положим* $\theta_1 = \theta_1(n) = m(-1) + n^{-1/2}\varepsilon_n$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \frac{(1 + \rho_n)\Gamma(1 + h_\theta)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n}\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1}$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, *где* θ_1 *определено выше, а* $\theta_2 \in (m(-1); \mu)$ *фиксировано.*

Данное следствие обобщает результат, полученный в работе [9]. Также заметим, что результат, полученный в работе [10], совпадает с результатом, полученным в этой работе, на общей области определения.

Теорема 3 ([10])**.** *Пусть* $(Z_n, n \geq 0)$ *— ВПССГ со средой* $\boldsymbol{\eta}$*, представляющей собой последовательность н.о.р. величин,* $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ *— его сопровождающее случайное блуждание, причем величина* ξ *предполагается нерешетчатой,* $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$*. Предположим, что распределение с.в.* ξ *удовлетворяет условию Крамера:* $R\left(h\right) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ *при* $h^- < h < 0$*, где* $h^- < -1$*. Пусть* $k(n) = k \in \mathbb{N}$ *таково, что* $\theta(n) = \theta := \ln k/n$*.*

Пусть $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \theta_2]$*, где* $\theta_2 = \theta_2(n) = m(-1) + cn^{-1/2}$ *для некоторого фиксированного* $c > 0$*. Тогда справедливо следующее соотношение:*

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \left(1 + \rho_n\right) R^n(-1) \mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$*, где*

$$\widehat{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(-1)}}.$$

Отметим, что вместе следствие 1, теорема 2 и теорема 3 полностью описывают переходные явления между первой и второй зоной нижних больших уклонений.

4 Доказательство основного результата

Оценим $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ при $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$, где $\theta_1 = \theta_1(n) \to m(-1)$ и $\theta_2 = \theta_2(n) \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Для этого воспользуемся теоремой 3:

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \left(1 + \rho_n\right) R^n(-1) \mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \times \\ \times \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right) := P_{1,n}(k) \tag{7}$$

равномерно по $\theta \in [\theta_3; \theta_4] \subset (\max(m^-, 0); \theta_4]$, где θ_3 — фиксировано, а $\theta_4 = \theta_4(n, c) = m(-1) + cn^{-1/2}$ для некоторого фиксированного $c > 0$. Заметим, что утверждение (7) верно для любого фиксированного $c > 0$. Следовательно, для любой положительной величины ε и последовательности $\widehat{c}(i) = 2^i$ при $i \in \mathbb{N}$ существует такая величина n_i, что

$$\left|\frac{\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)}{P_{1,n}(k)} - 1\right| < \varepsilon$$

при всех $\theta \in [\theta_3; \theta_4(n, \widehat{c}(i))]$, $n > n_i$. Для каждого $\varepsilon = 1/2^j$ и $\widehat{c}(i)$ обозначим соответствующее n_i как $n_i(j)$. Составим последовательность $c(n)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} c(1) = c(2) = \cdots = c(n_1(1)) &= 1, \\ c(n_1(1) + 1) = \cdots = c(n_2(2)) &= \widehat{c}(1), \\ c(n_2(2) + 1) = \cdots = c(n_3(3)) &= \widehat{c}(2), \\ c(n_3(3) + 1) = \cdots = c(n_4(4)) &= \widehat{c}(3) \cdots \end{aligned}$$

Из построения выше получим, что утверждение (7) выполнено равномерно по $\theta \in [\theta_3; \theta_4(n, c(n))]$, где $c(n)$ — некоторая положительная последовательность, стремящаяся к бесконечности, пусть и с неизвестной скоростью. Положим

$$\theta_1 = \theta_1(n) = m(-1) + \frac{c(n)n^{-1/2}}{2}. \tag{8}$$

Вначале будет доказано, что утверждение (6) равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, где θ_1 определяется соотношением (8), а $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Далее будет показано, что выражение для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$, полученное в теореме 2, совпадает с выражением для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$, полученным в (7) для отрезка $[\theta_1; m(-1) + cn^{-1/2}]$, где c — произвольная положительная константа, а $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Отсюда, аналогично рассуждениям (7)-(8), получим, что эта эквивалентность будет верна при $\theta \in [\theta_1; m(-1) + c(n)n^{-1/2}]$. Таким образом, теорема 2 будет верна для θ из двух пересекающихся отрезков, откуда получим, что эта теорема верна для всех $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$, где $\theta_1 \to m(-1)$ и $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть верны условия теоремы 2, θ_1 определяется соотношением (8), а $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{1 + \rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1}}{1 + h_\theta} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n}$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, где

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(h_\theta)}}.$$

Доказательство. Разобьём вероятность $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$ на две части:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \le \theta n - 1\right) + \\ + \mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n > \theta n - 1\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство того, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \le \theta n - 1\right) < \frac{2}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)(-h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n} e^{h_\theta + 1} \tag{10}$$

полностью аналогично пункту 2 доказательства теоремы 3 из [9]. В работе Агрести [8] для ВПССГ получены следующие соотношения:

$$\mathbf{P}\left(\, Z_n > k | \, \boldsymbol{\eta}\right) = \frac{1}{U_n + V_n} \left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k},$$

$$\mathbf{P}\left(\, Z_n = k | \, \boldsymbol{\eta}\right) = \frac{1}{U_n + V_n} \left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k} \frac{U_n}{V_n}, \tag{11}$$

при всех натуральных k, где $U_n = e^{-S_n},\ V_n = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i}$. При $S_n > \theta n - 1$ справедливы следующие неравенства:

$$k\frac{U_n^2}{V_n^2} < kU_n^2 \leq e^{\theta n - 2S_n} \leq e^{\theta n - 2\theta n + 2}.$$

Следовательно, при $S_n > \theta n - 1$ верно, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k | \,\boldsymbol{\eta}\right) = \frac{1}{U_n + V_n}\left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}\frac{U_n}{V_n} =$$
$$= \frac{1}{U_n + V_n} e^{-k\ln\left(1+\frac{U_n}{V_n}\right)}\frac{U_n}{V_n} = \frac{U_n}{V_n^2} e^{-k\frac{U_n}{V_n}}\left(1 + o\left(1\right)\right) \tag{12}$$

при $n \to \infty$, где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым $\boldsymbol{\eta}$. Используя (12), а также определение сопряженного распределения, получим, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n > \theta n - 1\right) =$$
$$= R^n(h_\theta)\int\limits_{1}^{+\infty}\int\limits_{\theta n - 1}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y}\frac{1}{x\left(x + e^{-y}\right)}\exp\left(-\frac{\exp(-y)k}{x}\right)\times$$
$$\times \mathbf{P}\left(S_n^{(h_\theta)} \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) = \left(1 + \rho_n\right)e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n}\times$$
$$\times\int\limits_{1}^{+\infty}\int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y}\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right), \tag{13}$$

где $\widetilde{S}_n := S_n^{(h_\theta)} - \theta n$, а $\widetilde{V}_n = \sum_{i=0}^{n-1}\exp(-S_i^{(h_\theta)})$. Обозначим интеграл в правой части (13) через I_1 и положим $a_n := \sqrt{1/(\theta_2(n) - m(-1))}$. Разобьем интеграл I_1 на четыре интеграла I_2, I_3, I_4 и I_5 по промежуткам $(-1; 0]$, $(0; a_n]$, $(a_n; \sqrt{n})$ и $[\sqrt{n}; +\infty)$ соответственно. Отметим, что при достаточно больших n выполнены неравенства $0 < a_n < \sqrt{n}$, поскольку $\theta_2 - m(-1) > c(n)/\sqrt{n}$ при всех n, где $c(n)$ — положительная последовательность. Оценим интеграл I_2, используя то, что $1 + h_\theta \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$:

$$I_2 := \int\limits_{1}^{+\infty}\int\limits_{-1}^{0} e^{-(1+h_\theta)y}\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \leq$$
$$\leq 2e^e\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in (-1, 0],\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) \leq 4e^e\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in (-1, 0]\right)$$

при всех достаточно больших n, где в последнем переходе мы воспользовались леммой 1. Далее, применив теорему 1, получаем, что

$$I_2 \leq \frac{8}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}e^e \tag{14}$$

при всех достаточно больших n. Оценим интеграл I_3, также используя лемму 1 и теорему 1:

$$I_3 = \int\limits_1^{+\infty}\int\limits_0^{a_n} e^{-(1+h_\theta)y}\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right)\le$$
$$\le 2\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in(0,a_n],\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right)\le 4\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in(0,a_n]\right)\le$$
$$\le \frac{8a_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} = \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}. \quad (15)$$

при всех достаточно больших n, где в последнем переходе мы воспользовались тем, что $a_n(1+h_\theta)\to 0$ при $n\to\infty$. Далее оценим интеграл I_5:

$$I_5 = \int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y}\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right)\le$$
$$\le 2\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-(1+h_\theta)y}\frac{1}{x^2}\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right) \quad (16)$$

при всех достаточно больших n. Заметим, что так как $m(h_\theta)=\theta$, то $h_\theta' = 1/\sigma^2(h_\theta)$, откуда, согласно формуле Тейлора, получаем, что при $\theta\in[\theta_1;\theta_2]$

$$h_\theta + 1 = (1+\rho_n)\frac{\theta - m(-1)}{\sigma^2(h_\theta)}. \quad (17)$$

Используя (8), получаем, что

$$(1+h_\theta)\sqrt{n}\to+\infty \quad (18)$$

при $n\to\infty$. В свою очередь из (18) получаем, что

$$I_5\le 2e^{-(1+h_\theta)\sqrt{n}} \quad (19)$$

при всех достаточно больших n.

Теперь оценим I_4:

$$I_4 = \int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{a_n}^{\sqrt{n}} e^{-(1+h_\theta)y}\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{\exp(-y)}{x}\right)\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right) =$$
$$= (1+\rho_n)\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{a_n}^{\sqrt{n}} e^{-(1+h_\theta)y}\frac{1}{x^2}\mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n\in \mathrm{d}y,\ \widetilde{V}_n\in \mathrm{d}x\right). \quad (20)$$

Оценим I_4 сверху:

$$I_4 \leq (1+\rho_n) \sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)i} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [i, i+1),\ \widetilde{V}_n \in \mathrm{d}x\right) =$$

$$= (1+\rho_n) \mathbf{E} \widetilde{V}_\infty^{-2} \sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)i} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n \in [i, i+1)\right), \tag{21}$$

где в последнем переходе мы вновь воспользовались леммой 1. Применим к правой части (21) теорему 1:

$$I_4 \leq (1+\rho_n) \mathbf{E} \widetilde{V}_\infty^{-2} \sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)i} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \exp\left(-\frac{i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) + \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} \right). \tag{22}$$

Заметим, что

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(h_\theta)}\right) \leq \exp\left(-\frac{i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \leq 1,$$

$$e^{1+h_\theta} \exp\left(\frac{(i+1)^2 - i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) = 1 + \rho_n, \tag{23}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $i/n \to 0$ и $1 + h_\theta \to 0$ при $n \to \infty$. Используя (23), из (22) получим, что

$$I_4 \leq (1+\rho_n) \mathbf{E} \widetilde{V}_\infty^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)i} \exp\left(-\frac{i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \leq$$

$$\leq (1+\rho_n) \mathbf{E} \widetilde{V}_\infty^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \sum_{\lfloor a_n \rfloor}^{\lceil \sqrt{n} \rceil} e^{-(1+h_\theta)(i+1)} \exp\left(-\frac{(i+1)^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \times$$

$$\times e^{1+h_\theta} \exp\left(\frac{(i+1)^2 - i^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \leq$$

$$\leq (1+\rho_n) \mathbf{E} \widetilde{V}_\infty^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \int_{a_n - 1}^{\sqrt{n}+2} e^{-(1+h_\theta)y} \exp\left(\frac{-y^2}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) \mathrm{d}y. \tag{24}$$

Сделаем замену $u = (1+h_\theta)y$ в правой части (24):

$$I_4 \leq (1+\rho_n) \frac{\mathbf{E} \widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \times$$

$$\times \int_{(a_n-1)(1+h_\theta)}^{(\sqrt{n}+2)(1+h_\theta)} e^{-u} \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) \mathrm{d}u. \tag{25}$$

Обозначим отрезок $[(a_n-1)(1+h_\theta); (\sqrt{n}+2)(1+h_\theta)]$ через D_n. Рассмотрим интеграл в правой части (25):

$$\int\limits_{(a_n-1)(1+h_\theta)}^{(\sqrt{n}+2)(1+h_\theta)} e^{-u} \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) \mathrm{d}u =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-u} \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) \mathrm{I}\left(u \in D_n\right) \mathrm{d}u = \mathbf{E} f_n(T), \tag{26}$$

где T — стандартная экспоненциальная с.в. Согласно (18) отметим, что

$$a_n(1+h_\theta) = (1+\rho_n)\sqrt{\frac{1}{\theta_2(n)-m(-1)}}\frac{\theta-m(-1)}{\sigma^2(h_\theta)} \to 0$$

при $n \to \infty$. Также заметим, что $\sqrt{n}(1+h_\theta) \to \infty$ по условию леммы 2. Следовательно,

$$f_n(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) \mathrm{I}\left(u \in D_n\right)$$

ограничена и поточечно сходится к 1 при всех $u \in (0;\infty)$ и $n \to \infty$. Откуда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости из (26) получаем, что

$$\mathbf{E} f_n(T) = 1 + \rho_n. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (25), получаем, что:

$$I_4 \le (1+\rho_n)\frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}. \tag{28}$$

Оценка снизу для I_4 получается с помощью рассуждений, аналогичных (21)-(28). Таким образом, получаем, что

$$I_4 = (1+\rho_n)\frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}. \tag{29}$$

Из (19), (15) и (14) получим, что

$$\begin{aligned} I_2 \le \frac{8}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}e^e = \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}, \\ I_3 \le \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}, \\ I_5 \le 4e^{-\sqrt{n}(1+h_\theta)} = \rho_n\frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)}, \end{aligned} \tag{30}$$

где во втором выражении мы воспользовались тем, что $a_n(1+h_\theta) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, из (30) и (29) следует, что

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = (1+\rho_n)I_4. \tag{31}$$

Используя (31), (29) и (12), имеем

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n > \theta n - 1\right) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta} e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n}. \tag{32}$$

Из (10) получаем, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n \le \theta n - 1\right) < \frac{2}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)(-h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n} e^{h_\theta+1} =$$

$$= \rho_n \frac{1}{\sqrt{n}(1+h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n} = \rho_n \mathbf{P}\left(Z_n = k,\ S_n > \theta n - 1\right). \tag{33}$$

Следовательно, подставляя (33) и (32) в (9), имеем, что

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta} e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n}. \tag{34}$$

Лемма 2 доказана. □

Для доказательства теоремы нам необходимо показать, что соотношение

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \left(1+\rho_n\right) \mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n} \exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right) \times$$

$$\times \left(1 - \Phi\left(\sqrt{n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)\right)\right) \tag{35}$$

выполнено равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ и $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Покажем, что выражения для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$, полученные в лемме 2 и соотношении (35), совпадают на общей области определения — то есть для $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, где θ_1 определяется соотношением (8), а $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Для этого достаточно доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{1}{1+h_\theta} = \left(1+\rho_n\right) \exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right) \times$$

$$\times \left(1 - \Phi\left(\sqrt{n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)\right)\right) \tag{36}$$

при $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$. Заметим, что при таких θ верно, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-u} \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) \mathrm{d}u = 1 + \rho_n. \tag{37}$$

Преобразуем подынтегральную функцию в левой части (37):

$$e^{-u} \exp\left(-\frac{u^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) = \exp\left(-\frac{(u+n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta))^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right) \times$$

$$\times \exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right). \tag{38}$$

Подставляя (38) в (37), а (37) в (36), получаем, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}\frac{1}{1+h_\theta} = (1+\rho_n)\exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right)\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{(u+n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta))^2}{2n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)}\right)\mathrm{d}u =$$
$$= (1+\rho_n)\exp\left(n(1+h_\theta)^2\sigma^2(h_\theta)/2\right)\times$$
$$\times\left(1-\Phi\left(\sqrt{n}(1+h_\theta)\sigma(h_\theta)\right)\right) \qquad (39)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1;\theta_2]$. Таким образом, мы показали, что представление $\mathbf{P}(Z_n = k)$ из (35) верно для $\theta \in [\theta_1;\theta_2]$, где θ_1 определяется соотношением (8), а $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$.

Для доказательства теоремы 2 осталось показать, что выражение для $\mathbf{P}(Z_n = k)$ из (35) совпадает с выражением $\mathbf{P}(Z_n = k)$, полученным в (7), на отрезке $[\theta_1; m(-1)+cn^{-1/2}]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ при $n\to\infty$. Покажем, что из (39) следует, что

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = (1+\rho_n)\,R^n(-1)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta-m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right), \qquad (40)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; m(-1)+cn^{-1/2}]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Напомним, что

$$\widehat{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(-1)}}.$$

Заметим, что при рассматриваемых в (40) $\theta \in [\theta_1;\theta_2]$ верно, что

$$\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} = (1+\rho_n)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2},\ \sigma(h_\theta) = (1+\rho_n)\sigma(-1). \qquad (41)$$

Используя (41), (17) и (39), получаем, что при $\theta \in [\theta_1;\theta_2]$

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = (1+\rho_n)\,\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n}\exp\left(\frac{n(\theta-m(-1))^2}{2\sigma^2(-1)}\right)\times$$
$$\times\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta-m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right) =$$
$$= (1+\rho_n)\,R^n(h_\theta)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta-m(-1))}{\sigma(-1)}\right)\right)\times$$
$$\times e^{-(1+h_\theta)\theta n}\exp\left(\frac{n\sigma^2(-1)(1+h_\theta)^2}{2}\right). \qquad (42)$$

Из (2) и формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем, что

$$\ln R(-1) = \ln R(h_\theta) + (-1-h_\theta)\left(\ln R(h_\theta)\right)' + \frac{(-1-h_\theta)^2}{2}\left(\ln R(h_\zeta)\right)'' =$$
$$= \ln R(h_\theta) + (-1-h_\theta)\theta + \frac{(-1-h_\theta)^2}{2}\sigma^2(h_\zeta) =$$
$$= \ln R(h_\theta) - (1+h_\theta)\theta + (1+\rho_n)\frac{(1+h_\theta)^2}{2}\sigma^2(-1), \quad (43)$$

где ζ лежит между θ и -1, а значит, $\zeta \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Таким образом, из (43) получаем, что

$$R^n(-1) = R^n(h_\theta)\exp\left(-(1+h_\theta)\theta n\right)\exp\left((1+\rho_n)\frac{n(1+h_\theta)^2\sigma^2(-1)}{2}\right) =$$
$$= (1+\rho_n)R^n(h_\theta)\exp\left(-(1+h_\theta)\theta n\right)\exp\left(\frac{n(1+h_\theta)^2\sigma^2(-1)}{2}\right), \quad (44)$$

где в последнем переходе мы воспользовались тем, что

$$1 + h_\theta = (1+\rho_n)\frac{\theta - m(-1)}{\sigma^2(h_\theta)} \leq \frac{2c}{\sqrt{n}\sigma^2(h_\theta)},$$

то есть $n(1+h_\theta)^2 \leq C_2$ для всех n и некоторой константы $C_2 > 0$. Подставляя (44) в (42), получаем (40).

Из утверждения (40) следует, что выражения (35) и (7) совпадают на отрезке $[\theta_1; m(-1) + cn^{-1/2}]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Следовательно, они совпадают и на отрезке $[\theta_1; m(-1) + c(n)n^{-1/2}]$ для некоторой положительной последовательности $c(n)$, стремящейся к бесконечности, и $\theta_1 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Таким образом, соотношение (35) верно для всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, где $\theta_1 \to m(-1)$ и $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

5 Доказательство замечания 1

Для доказательства воспользуемся теоремой 3 из [9]:

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma\left(h_\theta\right)} e^{-\Lambda(\theta)n - \theta n}\Gamma\left(1+h_\theta\right)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1} \quad (45)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_3; \theta_4] \subset (m(-1); \mu)$, где θ_3 и θ_4 фиксированы. Откуда, аналогично рассуждениям (7)-(8), получим, что утверждение (45) верно равномерно по $\theta \in [\widetilde{\theta}(n); \theta_4]$, где $\widetilde{\theta}(n)$ — некоторая последовательность, стремящаяся к $m(-1)$, пусть и с неизвестной скоростью.

Заметим, что результат, полученный в лемме 2, верен для всех $\theta_1 = m(-1) + c(n)/(2\sqrt{n})$ при любом $c(n)$, таком что $c(n) = o(\sqrt{n})$ и $c(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким образом, взяв $c(n) = 2\varepsilon_n$, из леммы 2 получим, что в условиях теоремы 2

$$\mathbf{P}\left(Z_n = k\right) = \frac{1+\rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \frac{\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2}}{1+h_\theta} e^{-\Lambda(\theta)n-\theta n} \tag{46}$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, где $\theta_1 = m(-1) + n^{-1/2}\varepsilon_n$ для некоторой фиксированной положительной последовательности $\varepsilon_n = o(\sqrt{n})$, такой, что $\varepsilon_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а $\theta_2 \to m(-1)$ при $n \to \infty$. Пусть

$$\theta_2 = \theta_2(n) = m(-1) + 2\left(\widetilde{\theta}(n) - m(-1)\right).$$

Отметим, что $\Gamma(x) = (1 + o(1))/x$ при $x \to 0$. Кроме того, при $\theta \in [\widetilde{\theta}(n); \theta_2]$ выполнено соотношение $\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{-2} = (1+\rho_n)\mathbf{E}\widetilde{V}_\infty^{h_\theta - 1}$. Используя эти тождества, получим, что выражения для $\mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$, полученные в (45) и (46), совпадают на общей области определения $[\widetilde{\theta}(n); \theta_2]$. Таким образом, их можно объединить в один результат.

Следствие 1 доказано.

Автор выражает признательность А. В. Шкляеву за постоянное внимание и полезные обсуждения.

References

[1] M.V. Kozlov, *On large deviations of branching processes in a random environment: geometric distribution of descendants*, Discrete Mathematics and Applications, **18**:2 (2006), 29–47.

[2] M.V. Kozlov, *On large deviations of strictly subcritical branching processes in a random environment with geometric distribution of progeny*, Theory of Probability And Its Applications, **54**:3 (2010), 424–446.

[3] V. Bansaye, J.Berestycki, *Large deviations for branching processes in random environment*, Markov Process. Related Fields, **15**:3 (2004), 493–524.

[4] D. Buraczewski, P. Dyszewski, *Precise large deviation estimates for branching process in random environment*, arXiv: 1706.03874, (2017).

[5] A.V. Shklyaev, *Large deviations of branching process in a random environment. II*, Diskretnaya Matematika, **32**:1 (2020), 135–156.

[6] V. Bansaye, C. Böinghoff, *Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **282**:1 (2013), 15–34.

[7] A.A. Borovkov, *Asymptotic Analysis of Random Walks. Light-Tailed Distributions*, Physmathlit ISBN: 978-5-94052-231-7, Moscow, 2013.

[8] A. Agresti, *On the extinction times of varying and random environment branching processes*, J. Appl. Prob., **12**:1 (1975), 39–46.

[9] K. Yu. Denisov, *Asymptotical local probabilities of lower deviations for branching process in random environment with geometric distributions of descendants*, Diskretnaya Matematika, **32**:3 (2020), 24–37.

[10] K. Yu. Denisov, *Local lower deviations of strictly supercritical branching process in random environment with geometric number of descendants*, Diskretnaya Matematika, **34**:4 (2022), 14–27.

Konstantin Yuryvich Denisov
Steklov Mathematical Institute of RAS,
Gubkin St., 8,
119991, Moscow, Russia
E-mail address: denisovkonstan@yandex.ru