S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 539.3:517.95

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC ??X??

О СОПРЯЖЕНИИ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ ТИМОШЕНКО В УПРУГИХ ТЕЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ

Н. А. НИКОЛАЕВА

Abstract. The paper concerns a junction problem for Timoshenko elastic inclusions plased in an elastic body with a crack. It is assumed that the crack crosses the thin inclusion at some point. This point is a mutual contact point. Inequality type boundary conditions are imposed at the point of contact and on the crack faces to prevent a mutual penetration between of the inclusion parts and crack faces, respectively. Theorems of existence and uniqueness are established. We present differential formulation in the form of a boundary value problem, which contains the junction boundary conditions. Passage to the limit is investigated as the rigidity parameter of the elastic inclusion goes to infinity.

Keywords: junction conditions, nonlinear boundary conditions, Timoshenko inclusion, crack, variational inequality.

1. Введение

Изучение задач равновесия упругих тел, содержащих тонкие включения и трещины, является перспективным направлением исследования. Это вызвано широким применением композиционных материалов с тонкими волокнами при создании различных конструкций и изделий. При эксплуатации данных конструкций наличие инородных включений приводит к образованию трещин. При этом существенную роль играет выбор краевых условий на берегах трещины. Существует два подхода для описания задач теории трещин. Первый подход – это классический, который характеризуется линейными краевыми

Nikolaeva, N. A., Junction problem for elastic Timoshenko inclusions in elastic bodies with a crack.

Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (НИР № FSRG-2023-0025).

Поступила 6 июля 2023 г., опубликована 2023 г.

условиями на берегах [1]. В данном подходе допускается взаимное проникание берегов трещины, что является недостатком модели. Второй подход описывается нелинейными краевыми условиями вида системы равенств и неравенств, которые обеспечивают взаимное непроникание берегов трещины (см. библиографию [2–3]). Поскольку отслоение означает существование трещины между включением и материалом матрицы, здесь также имеет место рассматривать описанные выше подходы. На протяжении последних лет с использованием указанных нелинейных краевых условий при описании отслоения тонких включений были проведены многочисленные исследования [4–28]. Широкий класс задач данного направления можно разделять по способу моделирования тонких включений, расположенных в упругих телах. В представленной работе при моделировании упругих тонких включений используются модели типа Тимошенко. Математические модели тонких упругих включений Тимошенко с возможным отслоением в упругом теле впервые были сформулированы в работах [5–6]. Впоследствии по указанному направлению были исследованы различные задачи о тонких упругих включениях Тимошенко [7–13]. Математические модели тонких жестких включений при наличии отслоения в упругих телах рассматривались в работах [13–22], а модели упругих включений Бернулли-Эйлера – в работах [11, 20–27].

В представленной работе рассматривается задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной и с тонким упругим включением. Упругое включение моделируется балкой Тимошенко. На берегах трещины задаются краевые условия взаимного непроникания берегов. Предполагается, что трещина точкой пересечения делит включение на две части. Таким образом, возникает контакт частей включения в одной точке. Указанная точка является точкой сопряжения. В этом случае, исходя из геометрии расположения трещины и включения, условие непроникания учитывается и в точке сопряжения. Наличие данного краевого условия исключает взаимное проникание частей включения друг в друга и является естественным с точки зрения механики. Целью данной работы является отыскание краевых условий в точке сопряжения для дифференциальной постановки, доказательство разрешимости соответствующей краевой задачи и проведение анализа сходимости решений при стремлении параметров жесткости тонких включений к бесконечности.

За последние годы были опубликованы значительное количество работ [10, 11, 13, 19, 22, 23, 25, 27, 28], в которых были исследованы задачи сопряжения тонких упругих, жестких, полужестких включений в упругих телах при наличии отслоения с нелинейными краевыми условиями на берегах. Также отметим работы [29–38], где рассмотрены разнообразные задачи о сопряжении двух линейно-упругих пластин и структур, системы двух балок (стержней), линейных включений и трещин и др.

2. Задача равновесия.

2.1. **Постановка задачи.** В данном разделе мы сформулируем задачу о равновесии двумерного упругого тела, которая содержит трещину и тонкое упругое включение. Предполагается, что трещина пересекает включение в некоторой точке, тем самым разбивает включение на две части. В точке пересечения части включения находятся в контакте. В рассматриваемой модели на берегах трещины и в контактной точке будут заданы граничные условия типа неравенств, которые не допускают взаимного проникания берегов трещины и частей включения.

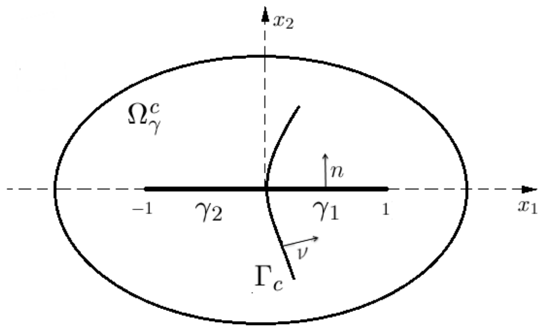

Рис. 1.

Пусть Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ, а $\overline{\gamma} \subset \Omega$, $\overline{\Gamma}_c \subset \Omega$ – гладкие кривые без самопересечений, такие что $\gamma \cap \Gamma_c = \{(0,0)\}$, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$, $\gamma_1 = (0,1) \times \{0\}$, $\gamma_2 = (-1,0) \times \{0\}$. Будем предполагать, что кривые Γ_c и γ можно продолжить до пересечения границы Γ, разбивая при этом область Ω на четыре подобласти D_1, D_2, D_3, D_4 с липшицевыми границами ∂D_i таким образом, чтобы выполнялось условие $meas(\Gamma \cap \partial D_i) > 0$, $i = 1,2,3,4$. Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ единичный вектор нормали к Γ_c, а $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$, через $n = (0,1)$ – единичный вектор нормали к γ, также $s = (1,0)$. Для удобства нормаль в точке $(0,0)$, которая совпадает с направлением нормали ν к Γ_c, обозначим через ν_0. Положим $\Omega_\gamma^c = \Omega \setminus (\overline{\gamma} \cup \overline{\Gamma}_c)$ (см. рис. 1).

В рассматриваемой модели область Ω_γ^c будет соответствовать упругому телу в естественном состоянии, Γ_c – трещине, а γ_1 и γ_2 – тонким упругим включениям с заданными свойствами. В частности, считаем, что поведение упругих включений γ_1 и γ_2 описываются моделью балок Тимошенко (см. например [39]). Пусть $A = \{a_{ejkl}\}, e,j,k,l = 1,2$ – заданный тензор модулей упругости с обычными свойствами симметрии

$$a_{ejkl} = a_{jekl} = a_{klej}, \ a_{ejkl} \in L^\infty(\Omega)$$

и положительной определенности

$$a_{ejkl}\xi_{kl}\xi_{ej} \geqslant c_0|\xi|^2, \quad \forall \ \xi_{ej} = \xi_{je}, \quad c_0 = const > 0.$$

Всюду в работе все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам. По повторяющимся индексам проводится суммирование.

В качестве неизвестных функций выступают поле перемещений $u = (u_1, u_2)$, тензор напряжения $\sigma = \{\sigma_{ej}\}$ упругого тела Ω_γ^c и функции $v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}$, определенные на тонких включениях γ_i, $i = 1,2$. Функции $v^{(i)}, w^{(i)}$ описывают вертикальные и горизонтальные перемещения, а $\varphi^{(i)}$ – углы поворота нормального сечения γ_i, $i = 1,2$ и рассматриваются как функции одной переменной x_1. Также введем некоторые обозначения: $[v] = v^+ - v^-$ – скачок функции v на Γ_c, где $v^\pm$ соответствуют значениям v на положительном и отрицательном берегах кривой Γ_c по отношению к нормали ν. Компоненты тензоров малых деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{ej}\}$ определяются следующим образом: $\varepsilon_{ej}(u) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_e}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_e}\right)$;

$\sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$, $\sigma_\nu = \sigma_{ej}\nu_j\nu_e$, $\sigma_\tau = \sigma_{ej}\nu_j\tau_e$, $u_\nu = u\nu$, $u_\tau = u\tau$, $u_n = un$, $u_s = us$, где $e, j = 1, 2$.

2.2. **Случай без отслоения.** Далее в этом пункте для поставленной задачи равновесия будет приведена вариационная формулировка, доказано существование решения и будет представлена дифференциальная формулировка.

Приведем вариационную постановку задачи. Введем для этого множество допустимых функций

$$K_1 = \{(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \mid u \in H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2,\ (v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in H^1(\gamma_i)^3,\ v^{(i)} = u_n,$$

$$w^{(i)} = u_s \text{ на } \gamma_i,\ i = 1, 2;\ [u_\nu] \geqslant 0 \text{ на } \Gamma_c;\ ((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0\},$$

где $H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)$ – подпространство пространства Соболева $H^1(\Omega^c_\gamma)$:

$$H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma) = \left\{v \in H^1(\Omega^c_\gamma) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma\right\}.$$

Приведем значение условий, которые входят в определение множества K_1. Условия $v^{(i)} = u_n$, $w^{(i)} = u_s$ на γ_i означают совпадение вертикальных (по оси x_2) и горизонтальных (по оси x_1) перемещений упругого тела с перемещениями включений на γ_i, $i = 1, 2$. Неравенство $[u_\nu] \geqslant 0$ представляет собой условие непроникания берегов трещины Γ_c. Условие $((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0$ обеспечивает непроникание включений γ_1 и γ_2 в точке $(0, 0)$.

Введем функционал энергии

$$\Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega^c_\gamma} fu + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} \left\{(w^{(i)}_x)^2 + (\varphi^{(i)}_x)^2 + (v^{(i)}_x + \varphi^{(i)})^2\right\}.$$

Здесь и далее везде в тексте $i = 1, 2$. Также для краткости мы используем обозначения: $\sigma(u)\varepsilon(u) = \sigma_{ej}(u)\varepsilon_{ej}(u)$, $fu = f_e u_e$; $v_x = \dfrac{dv}{dx}$, $x = x_1, (x_1, x_2) \in \Omega$.

Теорема 1. *Задача минимизации:*

$$\textit{найти } (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_1, \textit{ так что } \Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = \inf_{K_1} \Pi$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_1,\quad \int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega^c_\gamma} f(\bar{u} - u) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} \left\{w^{(i)}_x(\bar{w}^{(i)}_x - w^{(i)}_x) + \varphi^{(i)}_x(\bar{\varphi}^{(i)}_x - \varphi^{(i)}_x)\right\} + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} (v^{(i)}_x + \varphi^{(i)})$$

$$(\bar{v}^{(i)}_x + \bar{\varphi}^{(i)} - v^{(i)}_x - \varphi^{(i)}) \geqslant 0 \quad \textit{для всех } (\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) \in K_1,\ i = 1, 2. \tag{1}$$

Доказательство. Множество K_1 в силу выпуклости и замкнутости является слабо замкнутым в рефлексивном пространстве $H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)$. Функционал Π является слабо полунепрерывным снизу; аналогичные рассуждения доказательства можно найти в [2]. Поэтому для доказательства существования решения нам достаточно установить коэрцитивность функционала Π. Итак, при

$(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_1$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ имеем

$$\Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} fu + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} \left\{(w_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)})^2\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})^2 \pm \alpha \int\limits_{\gamma_1} ((v^{(1)})^2 + (w^{(1)})^2) \pm \beta \int\limits_{\gamma_2} ((v^{(2)})^2 + (w^{(2)})^2).$$

В области Ω_γ^c справедливо неравенство Корна. Следовательно, существует $c_1 > 0$ такая, что справедливо неравенство:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) \geqslant c_1 \left\|u\right\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2}. \tag{2}$$

По неравенству Коши существует константа $c_2 > 0$, такая, что

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} fu \leqslant c_2 \left\|u\right\|_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2}. \tag{3}$$

В силу неравенства Корна, непрерывности вложения пространства $H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)$ в $L^2(\gamma_i)$ и условий $u_n = v^{(i)},\ u_s = w^{(i)}$ на γ_i при малых $\alpha > 0, \beta > 0$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8}\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) - \alpha\int\limits_{\gamma_1} ((v^{(1)})^2 + (w^{(1)})^2) \geqslant 0, \\ &\frac{1}{8}\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) - \beta\int\limits_{\gamma_2} ((v^{(2)})^2 + (w^{(2)})^2) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Кроме того, воспользовавшись леммой, доказанной в [7], получим, что существуют константы $c_3 > 0$, $c_4 > 0$, не зависящие от функций, такие, что

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\gamma_1} \left\{(w_x^{(1)})^2 + (\varphi_x^{(1)})^2 + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})^2\right\} + \alpha\int\limits_{\gamma_1} ((v^{(1)})^2 + (w^{(1)})^2) \geqslant \\ &\qquad\qquad \geqslant c_3 \left\|(v^{(1)}, w^{(1)}, \varphi^{(1)})\right\|_{H^1(\gamma_1)^3}, \\ &\int\limits_{\gamma_2} \left\{(w_x^{(2)})^2 + (\varphi_x^{(2)})^2 + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})^2\right\} + \beta\int\limits_{\gamma_2} ((v^{(2)})^2 + (w^{(2)})^2) \geqslant \\ &\qquad\qquad \geqslant c_4 \left\|(v^{(2)}, w^{(2)}, \varphi^{(2)})\right\|_{H^1(\gamma_2)^3}. \end{aligned} \tag{5}$$

В силу оценок (2)–(5) получаем

$$\Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \to +\infty$$

при

$$\left\|u\right\|_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2} + \left\|(v^{(1)}, w^{(1)}, \varphi^{(1)})\right\|_{H^1(\gamma_1)^3} + \left\|(v^{(2)}, w^{(2)}, \varphi^{(2)})\right\|_{H^1(\gamma_2)^3} \to \infty,$$

$(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_1$. Таким образом, коэрцитивность функционала Π на множестве K_1 доказана. Следовательно, задача минимизации имеет решение, удовлетворяющее вариационному неравенству (1).

Докажем единственность решения методом от противного. Допустим, что задача (1) имеет два решения $(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)})$ и $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$. Поскольку неравенство справедливо для всех $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) \in K_1$, в неравенство для первого решения $(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)})$ в качестве пробного элемента $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)})$ возьмем второе решение $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$. Также в неравенство для второго решения $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$ подставим $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)})$. Далее сложим полученные при этом неравенства. Тогда с одной стороны, верно соотношение:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u-\tilde{u})\varepsilon(u-\tilde{u}) + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \big\{(w_x^{(i)} - \tilde{w}_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)} - \tilde{\varphi}_x^{(i)})^2\big\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)} - \tilde{v}_x^{(i)} - \tilde{\varphi}^{(i)})^2 \leqslant 0.$$

С другой стороны, из рассуждений, аналогичных рассуждениям доказательства коэрцитивности функционала Π, имеем неравенство:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u-\tilde{u})\varepsilon(u-\tilde{u}) + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \big\{(w_x^{(i)} - \tilde{w}_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)} - \tilde{\varphi}_x^{(i)})^2\big\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)} - \tilde{v}_x^{(i)} - \tilde{\varphi}^{(i)})^2 \geqslant 0.$$

В результате получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u-\tilde{u})\varepsilon(u-\tilde{u}) + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \big\{(w_x^{(i)} - \tilde{w}_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)} - \tilde{\varphi}_x^{(i)})^2\big\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)} - \tilde{v}_x^{(i)} - \tilde{\varphi}^{(i)})^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$. Таким образом, решение задачи (1) единственно. Теорема 1 полностью доказана. □

Существует дифференциальная постановка задачи. Данная постановка состоит в следующем. Для заданных внешних сил $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ требуется найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$, тензор напряжения σ, определенные в Ω_γ^c, и функции $v^{(i)}, w^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, определенные на γ_i, $i = 1, 2$, такие, что

$$-\mathrm{div}\, \sigma = f, \qquad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \tag{6}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{7}$$

$$[u_\nu] \geqslant 0, \quad \sigma_\nu \leqslant 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^{\pm} = 0, \quad \sigma_\nu [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{8}$$

$$-v_{xx}^{(i)} - \varphi_x^{(i)} = [\sigma_n], \quad -w_{xx}^{(i)} = [\sigma_s], \quad -\varphi_{xx}^{(i)} + v_x^{(i)} + \varphi^{(i)} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i,\ i = 1, 2, \tag{9}$$

$$v^{(i)} = u_n, \qquad w^{(i)} = u_s \quad \text{на} \quad \gamma_i,\ i = 1, 2, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\varphi^{(1)} + v_x^{(1)} = w_x^{(1)} = \varphi_x^{(1)} = 0 \text{ при } \ x = 1, \\ &\varphi^{(2)} + v_x^{(2)} = w_x^{(2)} = \varphi_x^{(2)} = 0 \text{ при } \ x = -1, \end{aligned} \tag{11}$$

$$((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \varphi_x^{(1)}(0+) = \varphi_x^{(2)}(0-) = 0, \quad w_x^{(1)}(0+) = w_x^{(2)}(0-), \\ (\varphi^{(1)} + v_x^{(1)})(0+) = (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)})(0-), \end{aligned} \tag{13}$$

$$(w_x^{(1)}, \varphi^{(1)} + v_x^{(1)})\tau_0 = 0, \quad (w_x^{(1)}, \varphi^{(1)} + v_x^{(1)})\nu_0 \leqslant 0 \quad \text{при} \ \ x = 0+, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} (w_x^{(2)} w^{(2)})(0-) + (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)}) v^{(2)}(0-) - (w_x^{(1)} w^{(1)})(0+) - \\ -(\varphi^{(1)} + v_x^{(1)}) v^{(1)}(0+) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь (6) – суть уравнения равновесия упругого тела и линейный закон Гука, (9) – уравнения равновесия тонких включений γ_1 и γ_2, которые в точности соответствуют моделям упругих балок Тимошенко. При этом в уравнениях (9) правые части $[\sigma_n], [\sigma_s]$ описывают силы, действующие на включения со стороны упругого тела. Краевые условия (8) являются типичными для данного класса задач (см. [3]). Соотношения (10) прокомментированы выше при определении множества K_1. Первая группа краевых условий (11) соответствуют нулевой перерезывающей силе, нулевой деформации растяжения (сжатия) и нулевому моменту тонкого включения γ_1 в точке $x = 1$; вторая группа краевых условий (11) определяет аналогичное в точке $x = -1$. Оставшиеся условия (12)–(15) представляют собой условия сопряжения тонких включений γ_i в точке $(0, 0)$. А именно, если в заданной точке $(0, 0)$ отсутствует контакт тонких включений γ_1 и γ_2, то есть выполняется

$$((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 > 0,$$

получаем условие свободных концов включений γ_i:

$$w_x^{(1)}(0+) = w_x^{(2)}(0-) = 0, \quad (\varphi^{(1)} + v_x^{(1)})(0+) = (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)})(0-) = 0. \tag{16}$$

Покажем это. В силу второго, третьего равенства из (13) и первого равенства из (14) равенство (15) можем записать в виде

$$w_x^{(1)}(0+)\Big((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0\Big) = 0.$$

Отсюда, ввиду условия отсутствия контакта, получаем равенство нулю деформации растяжения (сжатия) включения γ_1: $w_x^{(1)}(0+) = 0$. Также из последнего равенства в силу равенств (13), (14) следует равенство нулю деформации растяжения (сжатия) включения γ_2 и перерезывающих сил γ_i. Итак, получили справедливость равенств (16).

С другой стороны, если выполнено

$$(w_x^{(1)}, \varphi^{(1)} + v_x^{(1)})\nu_0 < 0 \quad \text{при} \ \ x = 0+,$$

то имеем условие контакта тонких включений γ_i в точке $(0, 0)$:

$$((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 = 0.$$

Это следует из равенства

$$\Big((w_x^{(1)}, \varphi^{(1)} + v_x^{(1)})(0+)\nu_0\Big)\Big((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0\Big) = 0,$$

которое можем получить из (15) применяя второе, третье равенство из (13) и первое равенство из (14).

Теорема 2. *Дифференциальная постановка* (6)–(15) *эквивалентна вариационной задаче на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим получение полной системы краевых условий (6)–(15) из вариационного неравенства. Пусть выполнено (1). Возьмем в (1) элементы $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \pm (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$ в качестве пробных функций, где $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) \in K_1$ такие, что

$$[\tilde{u}_\nu] = 0 \text{ на } \Gamma_c,$$

$$((\tilde{w}^{(1)}, \tilde{v}^{(1)})(0+) - (\tilde{w}^{(2)}, \tilde{v}^{(2)})(0-))\nu_0 = 0. \tag{17}$$

Получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\tilde{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f\tilde{u} + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)}\tilde{w}_x^{(i)} + \varphi_x^{(i)}\tilde{\varphi}_x^{(i)} + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\tilde{v}_x^{(i)} + \tilde{\varphi}^{(i)}) \right\} = 0. \tag{18}$$

Подставляя в равенство (18) функции $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) = (\theta, 0, 0, 0)$, где $\theta \in C_0^\infty(\Omega_\gamma^c)^2$, получим уравнения равновесия (6) для точек упругого тела Ω_γ^c, выполненные в смысле обобщенных функций. Вывод краевых условий (8) на кривой Γ_c мы опустим. Аналогичную схему доказательства можно найти, например, в [22]. Далее, интегрируя тождество (18) по частям с учетом уравнения равновесия (6) и условий (8), запишем

$$-\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} [\sigma n]\tilde{u} - \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \left\{ w_{xx}^{(i)}\tilde{w}^{(i)} + (\varphi_{xx}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)})\tilde{\varphi}^{(i)} + (v_{xx}^{(i)} + \varphi_x^{(i)})\tilde{v}^{(i)} \right\} +$$

$$+ w_x^{(1)}\tilde{w}^{(1)} \,|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)}\tilde{\varphi}^{(1)} \,|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})\tilde{v}^{(1)} \,|_{x=0+}^{x=1} + w_x^{(2)}\tilde{w}^{(2)} \,|_{x=-1}^{x=0-} +$$

$$+ \varphi_x^{(2)}\tilde{\varphi}^{(2)} \,|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})\tilde{v}^{(2)} \,|_{x=-1}^{x=0-} = 0. \tag{19}$$

Выбирая в получившееся тождество (19) тестовые функции, обладающие свойствами

$$\tilde{v}^{(i)} = \tilde{w}^{(i)} = \tilde{\varphi}^{(i)} = 0 \quad \text{при} \;\; x = 0+, 0-, 1, -1,$$

найдем

$$-\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} ([\sigma_n]\tilde{u}_n + [\sigma_s]\tilde{u}_s) - \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \left\{ w_{xx}^{(i)}\tilde{w}^{(i)} + (\varphi_{xx}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)})\tilde{\varphi}^{(i)} + (v_{xx}^{(i)} + \varphi_x^{(i)})\tilde{v}^{(i)} \right\} = 0.$$

Отсюда в силу условий $\tilde{v}^{(i)} = \tilde{u}_n$, $\tilde{w}^{(i)} = \tilde{u}_s$ на γ_i получим справедливость уравнений (9).

Вернемся к равенству (19), которое справедливо для всех указанных выше функций $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$. Применяя доказанные уравнения (9) получим

$$w_x^{(1)}\tilde{w}^{(1)} \,|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)}\tilde{\varphi}^{(1)} \,|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})\tilde{v}^{(1)} \,|_{x=0+}^{x=1} +$$

$$+ w_x^{(2)}\tilde{w}^{(2)} \,|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)}\tilde{\varphi}^{(2)} \,|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})\tilde{v}^{(2)} \,|_{x=-1}^{x=0-} = 0. \tag{20}$$

Из этого равенства в силу отсутствия ограничений на функции $\tilde{v}^{(1)}, \tilde{w}^{(1)}$ при $x = 1$, $\tilde{v}^{(2)}, \tilde{w}^{(2)}$ при $x = -1$ и $\tilde{\varphi}^{(i)}$ при $x = 0+, 0-, 1, -1$ получим справедливость краевых условий (11) и равенства $\varphi_x^{(1)}(0+) = \varphi_x^{(2)}(0-) = 0$ из (13). Тогда (20) примет вид

(21)
$$-w_x^{(1)}\tilde{w}^{(1)}(0+) - (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})\tilde{v}^{(1)}(0+) + w_x^{(2)}\tilde{w}^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})\tilde{v}^{(2)}(0-) = 0.$$

Если сделать предположение, что $\tilde{v}^{(1)}(0+) = \tilde{v}^{(2)}(0-) = 0$, из условия (17) вытекает равенство: $\tilde{w}^{(1)}(0+) = \tilde{w}^{(2)}(0-)$. В таком случае из (21) следует

$$\tilde{w}^{(1)}(0+)(-w_x^{(1)}(0+) + w_x^{(2)}(0-)) = 0.$$

Так как функция $\tilde{w}^{(1)}(0+)$ произвольно по определению, то получим справедливость второго равенства из (13):

$$w_x^{(1)}(0+) = w_x^{(2)}(0-).$$

Предполагая теперь, что $\tilde{w}^{(1)}(0+) = \tilde{w}^{(2)}(0-) = 0$, аналогично из (21) можно получить третье равенство из (13):

$$(\varphi^{(1)} + v_x^{(1)})(0+) = (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)})(0-).$$

Далее допустим, что $\tilde{w}^{(2)}(0-) = \tilde{v}^{(2)}(0-) = 0$. Тогда из (17) и (21) при $x = 0+$ следуют равенства

$$\tilde{w}^{(1)}\nu_0^{(1)} + \tilde{v}^{(1)}\nu_0^{(2)} = 0, \tag{22}$$

$$-w_x^{(1)}\tilde{w}^{(1)} - (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})\tilde{v}^{(1)} = 0. \tag{23}$$

В случае, когда $\nu_0 = (\nu_0^{(1)}, \nu_0^{(2)}) = (1, 0)$ из (22) и (23) получим $(v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})(0+) = 0$. Тогда в силу доказанного выше третье равенство из (13) при $\nu_0 = (1, 0)$ имеем

$$(\varphi^{(1)} + v_x^{(1)})(0+) = (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)})(0-) = 0. \tag{24}$$

В других случаях умножим равенство (23) на $\nu_0^{(1)}\nu_0^{(2)}$ и в силу (22) будем иметь

$$w_x^{(1)}(0+)\nu_0^{(2)} - (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})(0+)\nu_0^{(1)} = 0.$$

Последнее равенство означает справедливость первого условия из (14).

Рассмотрим теперь функции $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) \in K_1$ такие, что $[\tilde{u}] = 0$ на Γ_c,

$$((\tilde{w}^{(1)}, \tilde{v}^{(1)})(0+) - (\tilde{w}^{(2)}, \tilde{v}^{(2)})(0-))\nu_0 > 0. \tag{25}$$

Подставим $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) + (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$ в вариационное неравенство (1). Получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\tilde{u}) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f\tilde{u} + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} \left\{w_x^{(i)}\tilde{w}_x^{(i)} + \varphi_x^{(i)}\tilde{\varphi}_x^{(i)} + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\tilde{v}_x^{(i)} + \tilde{\varphi}^{(i)})\right\} \geqslant 0.$$

С помощью формул интегрирования по частям, а также с учетом доказанных краевых условий (6), (9)–(11), получаем

(26)
$$-w_x^{(1)}\tilde{w}^{(1)}(0+) - (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})\tilde{v}^{(1)}(0+) + w_x^{(2)}\tilde{w}^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})\tilde{v}^{(2)}(0-) \geqslant 0.$$

Положим $\tilde{v}^{(1)}(0+) = \tilde{v}^{(2)}(0-) = 0$. Тогда (25) примет вид

$$\tilde{w}^{(1)}(0+) > \tilde{w}^{(2)}(0-), \tag{27}$$

а неравенство (26) с учетом второго условия (13) вид:

$$w_x^{(1)}(0+)(\tilde{w}^{(2)}(0-) - \tilde{w}^{(1)}(0+)) \geqslant 0.$$

Из последнего неравенства в соответствии с (27) получим

$$w_x^{(1)}(0+) \leqslant 0. \tag{28}$$

Вернемся к неравенству (26). Предположим, что $\tilde{w}^{(1)}(0+) = \tilde{w}^{(2)}(0-) = 0$. Тогда из (25) и (26) следуют соотношения:

$$\tilde{v}^{(1)}(0+)\nu_0^{(2)} > \tilde{v}^{(2)}(0-)\nu_0^{(2)}, \quad (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})(0+)(\tilde{v}^{(2)}(0-) - \tilde{v}^{(1)}(0+)) \geqslant 0. \tag{29}$$

Здесь заметим, что в частном случае при $\nu_0 = (1,0)$ мы выше доказали справедливость равенств (24), поэтому дальнейшие рассуждения имеют место для общего случая $\nu_0 = (\nu_0^{(1)}, \nu_0^{(2)}) \neq (1,0)$. Итак, умножим второе неравенство из (29) на $(\nu_0^{(2)})^2$. Принимая во внимание первое неравенство из (29), можно сделать вывод, что

$$(\varphi^{(1)} + v_x^{(1)})(0+)\nu_0^{(2)} \leqslant 0. \tag{30}$$

Из неравенств (28) и (30) следует второе неравенство из (14).

Докажем справедливость равенства (15). Для этого в вариационное неравенство (1) последовательно выберем в роли пробных элементов функции: $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (0,0,0,0)$ и $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = 2(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)})$. Будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} fu + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)} w_x^{(i)} + \varphi_x^{(i)} \varphi_x^{(i)} + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(v_x^{(i)} + \varphi^{(i)}) \right\} = 0.$$

Отсюда, интегрируя по частям и применяя полученные выше условия (6), (8)–(11) и (13), получим (15). Таким образом, теорема в одну сторону доказана.

Достаточность. Пусть теперь справедлива (6)–(15). Возьмем тестовые функции $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) \in K_1$. Умножим (6) на $(\bar{u} - u)$, первое равенство в (9) на $(\bar{v}^{(i)} - v^{(i)})$, второе – на $(\bar{w}^{(i)} - w^{(i)})$, третье – на $(\bar{\varphi}^{(i)} - \varphi^{(i)})$, проинтегрируем по Ω_γ^c и γ_i соответственно. Интегралы сложим:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} (-\mathrm{div}\ \sigma - f)(\bar{u} - u) + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} (-v_{xx}^{(i)} - \varphi_x^{(i)} - [\sigma_n])(\bar{v}^{(i)} - v^{(i)}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} (-w_{xx}^{(i)} - [\sigma_s])(\bar{w}^{(i)} - w^{(i)}) + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} (-\varphi_{xx}^{(i)} + v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar{\varphi}^{(i)} - \varphi^{(i)}) = 0.$$

Интегрируя по частям тождество выше, находим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)}(\bar{w}_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar{\varphi}_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar{v}_x^{(i)} + \bar{\varphi}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \right\} =$$

$$- \int\limits_{\Gamma_c} [\sigma\nu(\bar{u} - u)] - \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} [\sigma n(\bar{u} - u)] + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} [\sigma_n](\bar{v}^{(i)} - v^{(i)}) + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} [\sigma_s](\bar{w}^{(i)} - w^{(i)}) +$$

$$+ w_x^{(1)}(\bar{w}^{(1)} - w^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)}(\bar{\varphi}^{(1)} - \varphi^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})(\bar{v}^{(1)} - v^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} +$$

$$+ w_x^{(2)}(\bar{w}^{(2)} - w^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)}(\bar{\varphi}^{(2)} - \varphi^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})(\bar{v}^{(2)} - v^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-}.$$

Для получения вариационного неравенства (1) нам достаточно показать, что правая часть последнего равенства неотрицательна. Действительно, в силу (10), (11), (15), первого равенства из (13) и последних трех условий из (8) последнее равенство можем переписать:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u}-u) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)}(\bar{w}_x^{(i)}-w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar{\varphi}_x^{(i)}-\varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)}+\varphi^{(i)})(\bar{v}_x^{(i)}+\bar{\varphi}^{(i)}-v_x^{(i)}-\varphi^{(i)}) \right\} =$$

$$-\int\limits_{\Gamma_c} \sigma_\nu[\bar{u}_\nu] - w_x^{(1)}\bar{w}^{(1)}(0+) - (v_x^{(1)}+\varphi^{(1)})\bar{v}^{(1)}(0+) +$$

$$+w_x^{(2)}\bar{w}^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)}+\varphi^{(2)})\bar{v}^{(2)}(0-). \tag{31}$$

Первое слагаемое правой части (31) неотрицательно в силу второго неравенства (13) и условия $[\bar{u}_\nu] \geqslant 0$. Рассмотрим сумму оставшихся слагаемых правой части (31). Учитывая второе и третье равенства из (13), можно записать

$$-w_x^{(1)}\bar{w}^{(1)}(0+) - (v_x^{(1)}+\varphi^{(1)})\bar{v}^{(1)}(0+) + w_x^{(2)}\bar{w}^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)}+\varphi^{(2)})\bar{v}^{(2)}(0-) =$$

$$= -w_x^{(1)}(0+)(\bar{w}^{(1)}(0+) - \bar{w}^{(2)}(0-)) - (v_x^{(1)}+\varphi^{(1)})(0+)(\bar{v}^{(1)}(0+) - \bar{v}^{(2)}(0-)).$$

Таким образом, нам нужно доказать, что

$$-w_x^{(1)}(0+)(\bar{w}^{(1)}(0+) - \bar{w}^{(2)}(0-)) - (v_x^{(1)}+\varphi^{(1)})(0+)(\bar{v}^{(1)}(0+) - \bar{v}^{(2)}(0-)) \geqslant 0. \tag{32}$$

Сначала докажем для частного случая $\nu_0 = (1,0)$. Используя равенства (24), которые доказаны выше при $\nu_0 = (1,0)$, получим

$$-w_x^{(1)}(0+)(\bar{w}^{(1)}(0+) - \bar{w}^{(2)}(0-)) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство справедливо в силу (28) и условия непроникания:

$$((\bar{w}^{(1)},\bar{v}^{(1)})(0+) - (\bar{w}^{(2)},\bar{v}^{(2)})(0-))\nu_0 =$$

$$= ((\bar{w}^{(1)},\bar{v}^{(1)})(0+) - (\bar{w}^{(2)},\bar{v}^{(2)})(0-))(1,0) = \bar{w}^{(1)}(0+) - \bar{w}^{(2)}(0-) \geqslant 0.$$

Теперь докажем выполнимость неравенства (32) для общего случая. Пусть выполнено $\nu_0 = (\nu_0^{(1)}, \nu_0^{(2)}) \neq (1,0)$. В этом случае, умножая (32) на $(\nu_0^{(1)}\nu_0^{(2)})^2$ и применяя последнее равенство из (13), получим

$$-w_x^{(1)}(0+)\nu_0^{(1)}((\bar{w}^{(1)},\bar{v}^{(1)})(0+) - (\bar{w}^{(2)},\bar{v}^{(2)})(0-))\nu_0(\nu_0^{(2)})^2 \geqslant 0.$$

Справедливость последнего неравенства следует из второго неравенства (14) и условия непроникания $((\bar{w}^{(1)},\bar{v}^{(1)})(0+) - (\bar{w}^{(2)},\bar{v}^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0$. Следовательно, (32) верно. Поэтому правая часть (31) неотрицательна. Отсюда следует вариационное неравенство (1).

Теорема 2 полностью доказана. □

2.3. **Случай с отслоением.** В данном разделе для поставленной выше задачи будет исследован случай, когда на положительном берегу γ_1 имеется отслоение. Наличие отслоения означает наличие трещины между включением γ_1 и упругим телом. Обозначения останутся прежними.

Приведем вариационную постановку задачи. Введем для этого множество допустимых функций

$$K_2 = \{(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \mid u \in H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2,\ (v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in H^1(\gamma_i)^3,\ v^{(2)} = u_n,$$
$$w^{(2)} = u_s \text{ на } \gamma_2;\ v^{(1)} = u^-_n,\quad w^{(1)} = u^-_s \text{ на } \gamma_1;\quad [u_n] \geqslant 0 \text{ на } \gamma_1;\quad [u_\nu] \geqslant 0 \text{ на } \Gamma_c;$$
$$((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0,\quad i = 1, 2\},$$

и запишем функционал энергии:

$$\Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega^c_\gamma} fu + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} \big\{(w^{(i)}_x)^2 + (\varphi^{(i)}_x)^2 + (v^{(i)}_x + \varphi^{(i)})^2\big\}.$$

Теорема 3. *Задача минимизации:*

$$\text{найти } (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_2, \text{ так что } \Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = \inf_{K_2} \Pi$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_2,\quad \int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega^c_\gamma} f(\bar{u} - u) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} \big\{w^{(i)}_x(\bar{w}^{(i)}_x - w^{(i)}_x) + \varphi^{(i)}_x(\bar{\varphi}^{(i)}_x - \varphi^{(i)}_x)\big\} + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} (v^{(i)}_x + \varphi^{(i)})$$

$$(33)\quad (\bar{v}^{(i)}_x + \bar{\varphi}^{(i)} - v^{(i)}_x - \varphi^{(i)}) \geqslant 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) \in K_2,\ i = 1, 2.$$

Теорема 3 доказывается тем же путем, что и теорема 1 из предыдущего раздела, поэтому мы здесь выкладки приводить не будем.

Дифференциальная постановка для данного случая состоит в следующем. Найти u, σ, определенные в Ω^c_γ, и $v^{(i)}, w^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, определенные на γ_i, $i = 1, 2$, такие, что

$$(34)\qquad -\mathrm{div}\,\sigma = f,\qquad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega^c_\gamma,$$

$$(35)\qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$(36)\qquad [u_\nu] \geqslant 0,\quad \sigma_\nu \leqslant 0,\quad [\sigma_\nu] = 0,\quad \sigma^\pm_\tau = 0,\quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c,$$

$$(37)\quad -v^{(i)}_{xx} - \varphi^{(i)}_x = [\sigma_n],\quad -w^{(i)}_{xx} = [\sigma_s],\quad -\varphi^{(i)}_{xx} + v^{(i)}_x + \varphi^{(i)} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i,\ i = 1, 2,$$

$$(38)\qquad v^{(1)} = u^-_n,\quad w^{(1)} = u^-_s \ \text{ на } \gamma_1,\quad v^{(2)} = u_n,\quad w^{(2)} = u_s \quad \text{на} \quad \gamma_2,$$

$$(39)\qquad \begin{gathered} \varphi^{(1)} + v^{(1)}_x = w^{(1)}_x = \varphi^{(1)}_x = 0 \text{ при } x = 1, \\ \varphi^{(2)} + v^{(2)}_x = w^{(2)}_x = \varphi^{(2)}_x = 0 \text{ при } x = -1, \end{gathered}$$

$$(40)\qquad [u_n] \geqslant 0,\quad \sigma^+_n \leqslant 0,\quad \sigma^+_s = 0,\quad \sigma^+_n[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1,$$

$$(41)\qquad ((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0,$$

$$\begin{aligned} &\varphi_x^{(1)}(0+) = \varphi_x^{(2)}(0-) = 0, \quad w_x^{(1)}(0+) = w_x^{(2)}(0-), \\ &\qquad (\varphi^{(1)} + v_x^{(1)})(0+) = (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)})(0-), \end{aligned} \tag{42}$$

$$(w_x^{(1)}, \varphi^{(1)} + v_x^{(1)})\tau_0 = 0, \quad (w_x^{(1)}, \varphi^{(1)} + v_x^{(1)})\nu_0 \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x = 0+, \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &(w_x^{(2)} w^{(2)})(0-) + (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)}) v^{(2)}(0-) - (w_x^{(1)} w^{(1)})(0+) - \\ &\qquad -(\varphi^{(1)} + v_x^{(1)}) v^{(1)}(0+) = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Теорема 4. *Формулировки* (33) *и* (34)–(44) *эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено (33). Прежде всего, обычным образом докажем выполнение в обобщенном смысле уравнений равновесия из (34). Также отметим, что краевые условия (40) являются типичными для данного класса задач; их справедливость можно установить стандартными рассуждениями (см., например, [3–4]). Далее поставим в (33) функции $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \pm (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$, где $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) \in K_2$, $((\tilde{w}^{(1)}, \tilde{v}^{(1)})(0+) - (\tilde{w}^{(2)}, \tilde{v}^{(2)})(0-))\nu_0 = 0$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c, $[\tilde{u}_n] = 0$ на γ_1. Будем иметь

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma^c} f\tilde{u} + \sum_{i=1}^{2} \int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)} \tilde{w}_x^{(i)} + \varphi_x^{(i)} \tilde{\varphi}_x^{(i)} + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\tilde{v}_x^{(i)} + \tilde{\varphi}^{(i)}) \right\} = 0.$$

Интегрирование по частям, а также применение условий (34), (36), здесь дает

$$\begin{aligned} &-\int_{\gamma_1} [(\sigma n)\tilde{u}] - \int_{\gamma_2} [\sigma n]\tilde{u} - \sum_{i=1}^{2} \int_{\gamma_i} \left\{ w_{xx}^{(i)} \tilde{w}^{(i)} + (\varphi_{xx}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)})\tilde{\varphi}^{(i)} + (v_{xx}^{(i)} + \varphi_x^{(i)})\tilde{v}^{(i)} \right\} + \\ &\qquad w_x^{(1)} \tilde{w}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})\tilde{v}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + \\ &\qquad + w_x^{(2)} \tilde{w}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})\tilde{v}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Заметим, что для первого слагаемого соотношения (45) в силу (40) справедливо

$$-\int_{\gamma_1} [(\sigma n)\tilde{u}] = -\int_{\gamma_1} [\sigma_n \tilde{u}_n] - \int_{\gamma_1} [\sigma_s \tilde{u}_s] \pm \int_{\gamma_1} \sigma_n^+ \tilde{u}_n^- - \int_{\gamma_1} \sigma_s^+ \tilde{u}_s^- = -\int_{\gamma_1} [\sigma_n]\tilde{u}_n^- - \int_{\gamma_1} [\sigma_s]\tilde{u}_s^-.$$

Учитывая это и равенства $\tilde{v}^{(1)} = \tilde{u}_n^-$, $\tilde{w}^{(1)} = \tilde{u}_s^-$ на γ_1, $\tilde{v}^{(2)} = \tilde{u}_n$, $\tilde{w}^{(2)} = \tilde{u}_s$ на γ_2, также предполагая, что $\tilde{v}^{(i)} = \tilde{w}^{(i)} = \tilde{\varphi}^{(i)} = 0$ при $x = 0, 1, -1$, из равенства (45) получим

$$-\sum_{i=1}^{2} \int_{\gamma_i} ([\sigma_s] + w_{xx}^{(i)})\tilde{w}^{(i)} - \sum_{i=1}^{2} \int_{\gamma_i} ([\sigma_n] + v_{xx}^{(i)} + \varphi_x^{(i)})\tilde{v}^{(i)} - \sum_{i=1}^{2} \int_{\gamma_i} (\varphi_{xx}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)})\tilde{\varphi}^{(i)} = 0.$$

Отсюда следуют все уравнения (37). Таким образом, из равенства (45) получим справедливость соотношений (39) и (42). Остальные краевые условия получаются аналогично предыдущей модели. Итак, теорема в одну сторону доказана.

Достаточность. Докажем теперь, что из (34)–(44) следует (33). Выберем произвольную функцию для $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) \in K_1$. Из (34), (37) после интегрирования и сложения интегралов получим

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u}-u) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)}(\bar{w}_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar{\varphi}_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar{v}_x^{(i)} + \bar{\varphi}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \right\} =$$

$$= -\int_{\Gamma_c} [\sigma\nu(\bar{u}-u)] - \int_{\gamma_1} [\sigma n(\bar{u}-u)] \pm \int_{\gamma_1} \sigma_n^+(\bar{u}_n^- - u^-) \pm \int_{\gamma_1} \sigma_s^+(\bar{u}_s^- - u_s^-) -$$

$$- \int_{\gamma_2} [\sigma n(\bar{u}-u)] + \sum_{i=1}^{2}\int_{\gamma_i} [\sigma_n](\bar{v}^{(i)} - v^{(i)}) + \sum_{i=1}^{2}\int_{\gamma_i} [\sigma_s](\bar{w}^{(i)} - w^{(i)}) +$$

$$+ w_x^{(1)}(\bar{w}^{(1)} - w^{(1)}) \big|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)}(\bar{\varphi}^{(1)} - \varphi^{(1)}) \big|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})(\bar{v}^{(1)} - v^{(1)}) \big|_{x=0+}^{x=1} +$$

$$+ w_x^{(2)}(\bar{w}^{(2)} - w^{(2)}) \big|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)}(\bar{\varphi}^{(2)} - \varphi^{(2)}) \big|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})(\bar{v}^{(2)} - v^{(2)}) \big|_{x=-1}^{x=0-}.$$

Очевидно, что для доказательства справедливости вариационного неравенства (33) достаточно показать неотрицательность правой части равенства выше. Действительно, применяя краевые условия (36), (38)–(40), (42) и (44) получим

$$\int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u}-u) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)}(\bar{w}_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar{\varphi}_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar{v}_x^{(i)} + \bar{\varphi}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \right\} =$$

$$= -\int_{\gamma_1} \sigma_n^+[\bar{u}_n] - \int_{\Gamma_c} \sigma_\nu[\bar{u}_\nu] - w_x^{(1)}\bar{w}^{(1)}(0+) -$$

$$-(v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})\bar{v}^{(1)}(0+) + w_x^{(2)}\bar{w}^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})\bar{v}^{(2)}(0-). \tag{46}$$

Первое и второе слагаемые правой части (46) неотрицательны в силу (36), (40) и условий: $[\bar{u}_n] \geqslant 0$ на γ_1, $[\bar{u}_\nu] \geqslant 0$ на Γ_c. Неотрицательность суммы оставшихся слагаемых правой части (46) получим согласно условиям (42), (43); схема доказательства аналогична доказательству теоремы 2. Таким образом, из (34)–(44) получаем (33).

Теорема 4 полностью доказана. □

3. Предельный переход к бесконечности.

Целью этого раздела является исследование предельного перехода по параметру жесткости в задаче (1). Введем в модель положительный параметр $\lambda > 0$, который будет характеризовать жесткость тонких включений γ_1 и γ_2. Для каждого фиксированного λ существует единственное решение задачи

$$(u, v^{(i\lambda)}, w^{(i\lambda)}, \varphi^{(i\lambda)}) \in K_1, \quad \int_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(\bar{u}-u^\lambda) - \int_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u}-u^\lambda) +$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\big\{w_x^{(i\lambda)}(\bar w_x^{(i)}-w_x^{(i\lambda)})+\varphi_x^{(i\lambda)}(\bar\varphi_x^{(i)}-\varphi_x^{(i\lambda)})\big\}+\lambda\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}(v_x^{(i\lambda)}+\varphi^{(i\lambda)})$$

$$(\bar v_x^{(i)}+\bar\varphi^{(i)}-v_x^{(i\lambda)}-\varphi^{(i\lambda)})\geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar u,\bar v^{(i)},\bar w^{(i)},\bar\varphi^{(i)})\in K_1,\quad i=1,2, \tag{47}$$

где множество K_1 определено в первом разделе. Как видно, параметр жесткости равен λ для включений γ_i.

Сначала получим априорные оценки в задаче (47). Подставим пробные функции вида $(\bar u,\bar v^{(i)},\bar w^{(i)},\bar\varphi^{(i)})=2(u^\lambda,v^{(i\lambda)},w^{(i\lambda)},\varphi^{(i\lambda)})$, $(\bar u,\bar v^{(i)},\bar w^{(i)},\bar\varphi^{(i)})=(0,0,0,0)$ в (47), при $\alpha>0$ найдем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u^\lambda)\varepsilon(u^\lambda)-\int\limits_{\Omega_\gamma^c}fu^\lambda+\lambda\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\big\{(w_x^{(i\lambda)})^2+(\varphi_x^{(i\lambda)})^2+(v_x^{(i\lambda)}+\varphi^{(i\lambda)})^2\big\}\pm$$

$$\pm\alpha\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}((v^{(i\lambda)})^2+(w^{(i\lambda)})^2)=0. \tag{48}$$

В силу неравенства Корна (2), непрерывности вложения пространства $H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)$ в $L^2(\gamma_i)$ и условий $u_n=v^{(i)},\ u_s=w^{(i)}$ на γ_i при малых α имеем неравенство:

$$\frac12\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u^\lambda)\varepsilon(u^\lambda)-\alpha\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}((v^{(i\lambda)})^2+(w^{(i\lambda)})^2)\geqslant 0.$$

Учитывая последнее неравенство из (48) получаем равномерно по λ оценку:

$$\|u^\lambda\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2}\leqslant c_5. \tag{49}$$

Применяя рассуждения, использованные при доказательстве коэрцитивности функционала из первого раздела, при $\lambda\geqslant\lambda_0$ будем иметь оценки:

$$\Big\|(v^{(1\lambda)},w^{(1\lambda)},\varphi^{(1\lambda)})\Big\|_{H^1(\gamma_1)^3}\leqslant c_6,\qquad \Big\|(v^{(2\lambda)},w^{(2\lambda)},\varphi^{(2\lambda)})\Big\|_{H^1(\gamma_2)^3}\leqslant c_7. \tag{50}$$

Из полученных оценок (49), (50) при $\lambda\to\infty$ следует, что

$$u^\lambda\to u \quad \text{слабо в} \quad H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2, \tag{51}$$

$$(v^{(i\lambda)},w^{(i\lambda)},\varphi^{(i\lambda)})\to(v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)}) \quad \text{слабо в} \quad H^1(\gamma_i)^3. \tag{52}$$

Также из (48) получим равномерные по λ оценки:

$$\lambda\int\limits_{\gamma_i}\big\{(w_x^{(i\lambda)})^2+(\varphi_x^{(i\lambda)})^2+(v_x^{(i\lambda)}+\varphi^{(i\lambda)})^2\big\}\leqslant c_8.$$

Из последнего неравенства получим равенства:

$$w_x^{(i)}=0,\quad \varphi_x^{(i)}=0,\quad v_x^{(i)}+\varphi^{(i)}=0. \tag{53}$$

Следовательно, существуют постоянные $b_{i1},b_{i2},b_{i3}\in\mathbb{R}$ такие, что

$$w^{(i)}(x_1)=b_{i1},\quad \varphi^{(i)}(x_1)=b_{i2},\quad v^{(i)}(x_1)=-b_{i2}x_1+b_{i3}\quad \text{на}\quad \gamma_i.$$

Это означает, что $u|_{\gamma_i}=\rho_i,\ \rho_i\in R(\gamma_i)$, где $R(\gamma_i)$ пространства инфинитезимальных жестких перемещений:

$$R(\gamma_i)=\{\rho_i=(\rho_{i1},\rho_{i2})|\ \rho_i(x_1,x_2)=b_i(-x_2,x_1)+(c_{i1},c_{i2});$$

$$b_i,\ c_{i1},\ c_{i2} = const,\ (x_1, x_2) \in \gamma_i\}.$$

Введем множество допустимых перемещений для предельной задачи

$$K_3 = \{u \in H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2 \ |\ u|_{\gamma_i} \in R(\gamma_i);\ [u_\nu] \geqslant 0 \text{ на } \Gamma_c;\ \ (\rho_1(0+) - \rho_2(0-))\nu_0 \geqslant 0\}.$$

На основе (51)–(53) можем перейти к пределу в (47). Для этого возьмем произвольную тестовую функцию $\bar{u} \in K_3$. Тогда $\bar{u}|_{\gamma_i} = \bar{\rho}_i = (\bar{c}_{i1}, \bar{b}_i x_1 + \bar{c}_{i2})$. Положим $\bar{v}^{(i)} = \bar{b}_i x_1 + \bar{c}_{i2}$, $\bar{w}^{(i)} = \bar{c}_{i1}$, $\bar{\varphi}^{(i)} = -\bar{b}_i$. В этом случае $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)})$ принадлежит множеству K_1. Подставим элемент $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)})$ в неравенство (47). Получим

$$\int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(\bar{u}) - \int\limits_{\Omega^c_\gamma} f(\bar{u} - u^\lambda) \geqslant \int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(u^\lambda) -$$

$$-\lambda \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \{w^{(i\lambda)}_x(\bar{w}^{(i)}_x - w^{(i\lambda)}_x) + \varphi^{(i\lambda)}_x(\bar{\varphi}^{(i)}_x - \varphi^{(i\lambda)}_x)\} -$$

$$-\lambda \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} (v^{(i\lambda)}_x + \varphi^{(i\lambda)})(\bar{v}^{(i)}_x + \bar{\varphi}^{(i)} - v^{(i\lambda)}_x - \varphi^{(i\lambda)}).$$

Далее, переходя к нижнему пределу в обеих частях последнего неравенства в силу (51)–(53) при $\lambda \to \infty$ получим неравенство:

$$u \in K_3,\ \int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) \geqslant \int\limits_{\Omega^c_\gamma} f(\bar{u} - u) \quad \forall\ \bar{u} \in K_3. \tag{54}$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 5. *Решения задачи* (47) *сходятся при* $\lambda \to \infty$ *в смысле* (51), (52) *к решению задачи* (54).

Полученная предельная задача (54) описывает равновесие упругого тела с трещиной Γ_c, пересекающей тонкое жесткое включение $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$. В работе [22] можно найти исследование задачи (54): доказательство существования и единственности решения, эквивалентную дифференциальную постановку. С другой стороны, обоснование предельного перехода в задаче (47) обеспечивает доказательство разрешимости задачи (54).

Заключение

В настоящей работе изучена задача о сопряжении тонких упругих включений, которые помещены в двумерное упругое тело с трещиной. Мы рассмотрели два случая: случай без отслоения, где включения не имеют отслоения, а также случай с отслоением, где одно из сопрягающихся включений отслаивается на одном из берегов.

Получены следующие результаты:

1. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи равновесия для каждого случая.

2. Для каждого случая получены эквивалентные дифференциальные постановки задач, включающие в себя условия сопряжения в точке контакта.

3. Обоснован предельный переход по параметру жесткости упругого включения в случае включений без отслоения.

References

[1] N. F. Morozov, *Mathematical Problems of the Theory of Cracks*, Nauka, Moscow, 1984.

[2] A.M. Khludnev, V.A.Kovtunenko, *Analysis of Cracks in Solids*, WIT Press, Southampton-Boston, 2000.

[3] A. M. Khludnev, *Elasticity Problems in Nonsmooth Domains*, Fizmatlit, Moscow, 2010.

[4] V.A. Kovtunenko, G. Leugering, *A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: the anti-plane variational model*, SIAM J. Control Optim., **54**:3 (2016), 1329–1351.

[5] H. Itou, A.M. Khludnev, G. Leugering, *Timoshenko thin inclusions in an elastic body with possible delamination*, Doklady Physics, **59**:9 (2014), 401–404.

[6] A.M. Khludnev, G. Leugering, *On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies*, Mathematics and Mechanics of Solids, **20** (2015), 495–511.

[7] H. Itou, A.M. Khludnev, *On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies*, Math. Meth. Appl. Sciences, **39**:17 (2016), 4980–4993.

[8] V.V. Shcherbakov, *The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions*, ZAMM-Z. Angew. Math. Mech., **96**:11 (2016), 1306–1317.

[9] A.M. Khludnev, T.S. Popova, *Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle*, Acta Mechanica Solida Sinica, **30** (2017), 327–333.

[10] A.M. Khludnev, L. Faella, T.S. Popova, *Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies*, Mathematics and Mechanics of Solids, **22**:4 (2017), 1–14.

[11] A.M. Khludnev, T.S. Popova, *Junction problem for Euler-Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies*, Quart. Appl. Math., **74** (2016), 705–718.

[12] E.M. Rudoy, N.P. Lazarev, *Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **334** (2018), 18–26.

[13] A. M. Khludnev, T. S. Popova, *On junction problem for elastic Timoshenko inclusion and semi-rigid inclusion*, Mathematical notes of NEFU, **25**:1 (2018), 73–89.

[14] A. M. Khludnev, G. Leugering, *On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks*, Math. Meth. Appl. Sci., **33**:16 (2010), 1955–1967.

[15] N. P. Lazarev, *The equilibrium problem for a Timoshenko plate containing a crack along a thin rigid inclusion*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp. Nauki, **1** (2014), 32–45.

[16] E. M. Rudoy, *Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a delaminated thin rigid inclusion*, J. Appl. Industr. Math., **10**:2 (2016), 264–276.

[17] N.A. Nikolaeva, *Kirchhoff – Love plate with a flat rigid inclusion*, Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal, **8**:1 (2023), 29–46.

[18] I. V. Fankina, *A contact problem for an elastic plate with a thin rigid inclusion*, J. Appl. Industr. Math., **10**:3 (2016), 333–340.

[19] V. V. Shcherbakov, *On an optimal control problem for the shape of thin inclusions in elastic bodies*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **7**:3 (2013), 435–443.

[20] A. I. Furtsev, *On contact of thin obstacle and plate, containing thin inclusion*, Sib. J. Pure and Applied Math., **17**:4 (2017), 94–111.

[21] T. S. Popova, *Problems on thin inclusions in a two-dimensional viscoelastic body*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **12**:2 (2018), 313–324.

[22] N. A. Nikolaeva, *On equilibrium of the elastic bodies with cracks crossing thin inclusions*, J. Appl. Ind. Math., **22**:4 (2019), 68–80.

[23] A. M. Khludnev, *Equilibrium of an elastic body with closely spaced thin inclusions*, Comp. Math. Math. Phys., **58** (2018), 1660–1672.

[24] A. M. Khludnev, G. Leugering, *Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies*, Math. Mech. Complex Systems, **2**:1 (2014), 1–21.

[25] L. Faella, A. M. Khludnev, *Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **39**:12 (2016), 3381–3390.

[26] A. M. Khludnev, *On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter*, Math. Mech. Solids., **24**:9 (2018), 2742–2753.

[27] A. M. Khludnev, T. S. Popova, *On Hierarchy of Thin Inclusions in Elastic Bodies*, Mat. Zametki Severo-Vostochn. Federal. Univ., **23**:1 (2016), 87–105.

[28] A. M.Khludnev, T. S.Popova, *Semirigid inclusions in elastic bodies: Mechanical interplay and optimal control*, Comp. Math. Appl., **77** (2019), 253–262.

[29] A. A. Samarskii, V. B. Andreev, *Difference methods for elliptic equations*, Nauka, Moscow, 1976.

[30] F. Boerquin, P.G. Ciarlet, *Modeling and justification of eigenvalue problems for junctions between elastic structures*, J. Functional Analysis, **87** (1989), 392–427.

[31] A. Gaudiello, R. Monneau, J. Mossino et. al., *Junctions of elastic plates and beams*, J. Control Optimisation and Calculus of Variations, **13**:3 (2007), 419–457.

[32] H. Le Dret, *Modeling of the junction between two rods*, J. Math. Pures Appl, **68**:3 (1989), 365–397.

[33] Yu. A. Bogan, *Junction conditions A. Samarsky and V. Andreev in the theory of elastic beams*, Mathematical notes, **39**:5 (2012), 662–669.

[34] L. T. Berezhnitsky, V. V.Panasyuk, N. G. Stashchuk, *Interaction of rigid linear inclusions and cracks in a deformable body*, Science Dumka, Kiev, 1983.

[35] E. V. Mochalov, V. V. Silvestrov, *Problem of interaction of thin rigid needle-shaped inclusions located between different elastic materials* Mech. Solids, **46** (2011), 739–754.

[36] S. M. Mkhitaryan, *On the Stressed State of an Elastic Infinite Plate with a Finite Crack Interacting with an Absolutely Rigid Thin Inclusion*, Doklady Akademii Nauk Armenii, **118**:1, 39–48.

[37] Yu. A. Bogan, *Homogenization of a nonhomogeneous elastic beam with elements joined by a hinge of finite stiffness.*, Sib. Zh. Ind. Mat., **1**:2 (1998), 67–72.

[38] T. Durante, G. Cardone, S. A. Nasarov, *Modeling junction of plates and beams by means of self-adjoint extensions*, J. Control, Vestnik St. Peterburg University. Mathematics, **42**:2 (2009), 67–75.

[39] E. I. Grigolyuk, I. T. Selezov, *Non-classical oscillation theory of rods, plates andshells*, VINITI, Moscow, 1973.

Nikolaeva Natalia Afanasevna
North-Eastern Federal University,
ul. Kulakovskogo, 48,
677000, Yakutsk, Russia
E-mail address: niknataf@mail.ru