

О распределении числа пересечений полосы траекториями случайного процесса с независимыми приращениями

В. И. Лотов¹, В. Р. Ходжибаев

Аннотация

Изучается распределение числа пересечений траекториями случайного процесса с независимыми приращениями (процесса Леви) полосы с прямолинейными параллельными границами. Для указанного распределения получен ряд неравенств, а также асимптотические представления при неограниченном расширении полосы.

Ключевые слова: однородный случайный процесс с независимыми приращениями (процесс Леви), число пересечений полосы, вероятностные неравенства

Keywords: stationary stochastic process with independent increments (Levy process), number of strip crossings, probabilistic inequalities

1. Введение

Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — однородный случайный процесс с независимыми приращениями (процесс Леви), выборочные функции которого непрерывны справа. В этом случае $\mathbf{E} \exp\{\lambda \xi(t)\} = \exp\{t\psi(\lambda)\}$ при $\operatorname{Re} \lambda = 0$,

$$\psi(\lambda) = \gamma\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\lambda x} - 1 - \frac{\lambda x}{1+x^2} \right) dS(x), \quad (1)$$

где γ и $\sigma > 0$ — вещественные числа, функция $S(x)$ не убывает на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$,

$$\int_{|x| \leq 1} x^2 dS(x) < \infty, \quad S(-\infty) = S(\infty) = 0.$$

Будем предполагать, что сходится один из интегралов

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t} \mathbf{P}(\xi(t) > 0) dt \quad \text{или} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{t} \mathbf{P}(\xi(t) < 0) dt. \quad (2)$$

Известно [1], что для этого достаточно, чтобы существовало $\mathbf{E}\xi(1) \neq 0$. Если, к примеру, сходится первый из интегралов (2), то траектория случайного процесса уходит вниз, с вероятностью единица ее верхняя грань конечна, а нижняя грань процесса равна $-\infty$.

Для рассматриваемого случайного процесса определим последовательность марковских моментов:

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0,$$

¹Работа выполнялась при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2022-0010.

$$\tau_i^- = \inf \{t > \tau_{i-1}^+ : \xi(t) \leq -a\}, \quad \tau_i^+ = \inf \{t > \tau_i^- : \xi(t) \geq b\}, \quad i \geq 1.$$

Полагаем, что $\inf \emptyset = \infty$. Введем случайную величину θ , равную числу пересечений снизу вверх полосы $\{-a < y < b\}$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного процесса $(t, \xi(t))_{t=0}^\infty$, здесь $a > 0$, $b > 0$. Нашей целью является изучение распределения этой случайной величины. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty), \quad k \geq 1.$$

Аналогичным образом определяется случайная величина, равная числу пересечений полосы сверху вниз. Ясно, что количества пересечений полосы снизу вверх и сверху вниз отличаются друг от друга самое большее на единицу. Поэтому мы ограничимся изучением числа пересечений полосы снизу вверх. С другой стороны, изучение пересечений сверху вниз может быть проведено по аналогичной схеме. Известно [1], что условие (2) исключает возможность бесконечного числа пересечений интервала процессом $\xi(t)$.

Изучению распределения числа пересечений полосы посвящены работы многих авторов. Вычисление в точном виде характеристик функционалов в граничных задачах для случайных процессов, связанных с моментом выхода из интервала, в том числе распределения числа пересечений полосы, доступно только в некоторых частных ситуациях. Некоторые сведения о точных формулах для распределения числа пересечений полосы можно найти в [2]. Поэтому основное внимание в изучении этих характеристик уделяется асимптотическим подходам. Для случайных блужданий, порождённых суммами независимых одинаково распределённых случайных величин, в [3] найдены асимптотические представления для распределения числа пересечений расширяющейся полосы за бесконечный промежуток времени в случаях, когда распределение скачка блуждания имеет лёгкий или тяжёлый правый хвост. В [4] получены полные асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы за конечный промежуток времени траекториями целочисленного случайного блуждания с нулевым средним. При этом предполагается, что выполнено условие Крамера на распределение скачков и ширина полосы неограниченно возрастает с различными скоростями вместе с расширением рассматриваемого промежутка времени. Аналогичная задача для однородных случайных процессов с независимыми приращениями рассматривалась в [5], [6].

В первой части настоящей работы (п. 2) будут установлены асимптотические представления для распределения числа пересечений снизу вверх расширяющейся полосы траекториями случайного процесса $\xi(t)$ в том случае, когда это число пересечений конечно с вероятностью единица. Тем самым результаты работы [3], полученные для случайных блужданий, порождённых суммами независимых одинаково распределённых случайных величин, распространяются на процессы с непрерывным временем. Во второй части (п. 3) рассматривается задача получения неравенств для вероятности $\mathbf{P}(\theta \geq k)$. Эти оценки являются естественным дополнением к имеющимся асимптотическим результатам. Аналогичные неравенства для случайных блужданий, порождённых суммами независимых одинаково распределённых случайных величин, получены ранее в [2]. В настоящей работе рассматриваются различные ограничения на распределение процесса и используются некоторые приёмы и методы из [2], [3].

2. Асимптотика распределения числа пересечений полосы

Здесь мы будем предполагать, что $\mathbf{E}\xi(1) < 0$.

Как правило, те или иные характеристики функционалов в задачах с двумя границами первоначально выражаются через распределения функционалов от траекторий случайных процессов, возникающих в задачах с одной границей. Следуя этой схеме, мы будем использовать в дальнейшем распределение супремума траектории процесса и предельное распределение величины перескока через бесконечно удалённый отрицательный уровень.

Пусть для $\operatorname{Re} \lambda = 0$, $x \geq 0$, $y \leq 0$,

$$\psi(\lambda) = \log \mathbf{E} e^{\lambda \xi(1)}, \quad \zeta = \sup_{t \geq 0} \xi(t), \quad Q(x) = \mathbf{P}(\zeta \geq x),$$

$$\eta_-(y) = \inf\{t \geq 0 : \xi(t) \leq y\}, \quad \chi_-(y) = \xi(\eta_-(y)) - y.$$

Имеет место следующее соотношение: для $k \geq 2$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \int_b^\infty \int_{-\infty}^{+0} Q(a + b - x) \mathbf{P}(\chi_-(-a - y) \in dx) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy). \quad (3)$$

Эту формулу нетрудно понять: если траектория процесса $k - 1$ раз пересекла полосу снизу вверх и в момент τ_{k-1}^+ значение процесса оказалось равным $y \geq b$, то для того, чтобы произошло еще одно пересечение полосы, стартующая из точки y оставшаяся часть траектории должна пересечь нижнюю границу полосы с неизбежным перескоком, принимающим значение $x \in (-\infty, 0]$. Это обстоятельство отражает множитель $\mathbf{P}(\chi_-(-a - y) \in dx)$ под интегралом. Множитель $Q(a + b - x)$ под интегралом обеспечивает достижение верхней границы полосы для последующей части траектории.

Далее будем исследовать асимптотическое поведение подынтегрального выражения в (3) при $b \rightarrow \infty$. Приведем необходимые сведения.

Из результатов [7] следует, что если $-\infty < \mathbf{E}\xi(1) < 0$, то существует предельное при $y \rightarrow -\infty$ собственное распределение

$$\mathbf{P}(\chi_- < x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \mathbf{P}(\chi_-(y) < x)$$

величины первого перескока через бесконечно удалённый отрицательный барьер, и имеет место представление

$$\mathbf{E} e^{\lambda \chi_-} = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda |\mathbf{E}\xi(1)|} \mathbf{E} e^{\lambda \zeta}.$$

Из теоремы 2.1 [8, стр. 230] также следует, что

$$\mathbf{P}(\chi_- < x) = |\mathbf{E}\xi(1)|^{-1} \int_{-\infty}^{+0} \int_0^\infty S(z + x - y) d\mathbf{P}(\zeta \geq y) dz,$$

где $S(x)$ — спектральная функция процесса в представлении (1).

Функция $\mathbf{E} \exp\{\lambda \chi_-\}$ будет в дальнейшем нами использоваться, поэтому приведем для нее также другое представление, известное из ([8, Сл. 3.1, стр.131]). Пусть

$$\bar{\eta}_-(y) = \inf\{t \geq 0 : \xi(t) \leq y\}, \quad \bar{\chi}_-(y) = \xi(\bar{\eta}_-(y)) - y, \quad y \leq 0.$$

Тогда

$$\mathbf{E} \exp\{\lambda \chi_-\} = \frac{1 - \mathbf{E} \exp\{\lambda \bar{\chi}_-(0)\}}{\lambda |\mathbf{E} \bar{\chi}_-(0)|},$$

если $-\infty < \mathbf{E}\xi(1) \leq 0$ и $\mathbf{P}(\bar{\eta}_-(0) > 0) = 1$.

Известно [1], что для выполнения условия $\mathbf{P}(\bar{\eta}_-(0) > 0) = 1$ достаточно потребовать, чтобы

$$\int_0^1 \frac{1}{t} \mathbf{P}(\xi(t) < 0) dt < \infty. \quad (4)$$

Достаточные условия сходимости интеграла (4) также приведены в [1].

Нахождение распределения супремума траектории процесса $\xi(t)$ в явном виде доступно лишь в немногих частных ситуациях. Поэтому здесь также приходится использовать асимптотические представления для $Q(x)$, которые известны при различных ограничениях на распределение $\xi(1)$. Рассмотрим эти ситуации более подробно.

В [9] установлено, что

$$Q(x) = \mathbf{P}(\zeta \geq x) \leq e^{-\rho x}, \quad (5)$$

где

$$\rho = \sup\{\lambda \geq 0 : \mathbf{E} \exp\{\lambda \xi(1)\} \leq 1\} = \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) \leq 0\}.$$

Если $\mathbf{E}\xi(1) < 0$ и $\mathbf{E} \exp\{\lambda \xi(1)\} < \infty$ при некотором $\lambda > 0$, то и $\rho > 0$. Пусть

$$\mu := \sup\{\lambda \geq 0 : \mathbf{E} \exp\{\lambda \xi(1)\} < \infty\},$$

тогда $\mu \geq \rho$. Если $\rho > 0$ и $\psi(\rho - 0) < 0$, то $\rho = \mu$.

Сначала рассмотрим случай, когда

$$\rho > 0, \quad \psi(\rho) = 0, \quad \psi'(\rho) = \mathbf{E} \xi(1) e^{\rho \xi(1)} < \infty. \quad (6)$$

Следующая лемма доказана в [8, стр. 214].

Лемма 1 Пусть выполнено (6). Тогда

$$Q(x) = c e^{-\rho x} (1 + \varphi(x)), \quad (7)$$

где $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$,

$$c^{-1} = \rho \psi'(\rho) \int_{-\infty}^0 e^{\rho y} dF_-(y),$$

$$F_-(y) = - \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\inf_{0 \leq s \leq t} \xi(s) \geq y) dt = - \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\bar{\eta}_-(y) > t) dt = -\mathbf{E} \bar{\eta}_-(y), \quad y \leq 0.$$

Соотношение (7) и другое выражение для константы c при некоторых дополнительных ограничениях на процесс известны также из [10].

Таким образом, в силу (7) равенство (3) приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\theta \geq k) &= c e^{-\rho(a+b)} \int_b^{\infty} \int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) \\ &+ c e^{-\rho(a+b)} \int_b^{\infty} \int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} \varphi(a+b-x) \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy). \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, при $y \geq b$ и $b \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} \mathbf{P}(\chi_{-}(-a-y) \in dx) \rightarrow h := \int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} \mathbf{P}(\chi_{-} \in dx), \quad (9)$$

поэтому первое слагаемое в правой части (8) равно

$$hce^{-\rho(a+b)} \int_b^{\infty} \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)(1 + o(1)), \quad b \rightarrow \infty.$$

Обратимся ко второму слагаемому в правой части (8). Пусть

$$\varphi_1(z) = \sup_{v \geq z} \varphi(v).$$

Тогда

$$\varphi(a+b-x) \leq \varphi_1(a+b-x) \leq \varphi_1(a+b)$$

в силу того, что $x \leq 0$, а $\varphi_1(z)$ — невозрастающая функция. При этом $\varphi_1(z) \rightarrow 0$, если $z \rightarrow \infty$. Поэтому $\varphi_1(a+b) = o(1)$ при $b \rightarrow \infty$ и

$$\int_b^{\infty} \int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} \varphi(a+b-x) \mathbf{P}(\chi_{-}(-a-y) \in dx) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) = o(1) \int_b^{\infty} \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy).$$

Таким образом, для $k \geq 2$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = hce^{-\rho(a+b)} \int_b^{\infty} \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)(1 + o(1)) = hce^{-\rho(a+b)} \mathbf{P}(\theta \geq k-1)(1 + o(1)).$$

Пользуясь этим рекуррентным соотношением, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1 Пусть $\mathbf{E} \xi(1) < 0$ и выполнены условия леммы 1. Тогда для любого целого $k \geq 2$ и произвольного $a > 0$ при $b \rightarrow \infty$ имеет место

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \mathbf{P}(\theta \geq 1)(hc)^{k-1} e^{-\rho(k-1)(a+b)}(1 + o(1)),$$

число c определено в лемме 1, h задается формулой (9).

Рассмотрим далее вероятность $\mathbf{P}(\theta \geq 1)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\theta \geq 1) &= \int_{-\infty}^{+0} Q(a+b-x) \mathbf{P}(\chi_{-}(-a) \in dx) \\ &= ce^{-\rho(a+b)} \int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} \mathbf{P}(\chi_{-}(-a) \in dx)(1 + o(1)), \quad b \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Если дополнительно потребовать, чтобы $a \rightarrow \infty$, то

$$\int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} \mathbf{P}(\chi_{-}(-a) \in dx) \rightarrow h.$$

Таким образом, получаем

Следствие 1 Если в условиях теоремы 1 предположить, что $a \rightarrow \infty$ наряду с $b \rightarrow \infty$, то для любого целого $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = (hc)^k e^{-\rho k(a+b)}(1 + o(1)). \quad (11)$$

Асимптотическое представление (11) с экспоненциальной оценкой величины $o(1)$ ранее установлено в [5] при более ограничительных требованиях на распределение процесса.

Замечание. Если число a не растёт, то для вычисления интеграла в (10) можно воспользоваться следующим соотношением из [5]. При $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$

$$\mathbf{E} \exp\{u\eta_-(-a) + \lambda\xi(\eta_-(-a))\} = r_-^{-1}(u, \lambda) [r_-(u, \lambda)]^{(-\infty, -a]}. \quad (12)$$

Здесь $r_-(u, \lambda)$ — отрицательная компонента безгранично делимой факторизации

$$\frac{u}{u - \psi(\lambda)} = r_-(u, \lambda) r_+(u, \lambda),$$

введённой и изученной Б.А. Рогозиным в [1]. В (12) использовано обозначение

$$[g(\lambda)]^D = \int_D e^{\lambda x} dG(x), \quad \text{если} \quad g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dG(x), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0.$$

Левая часть (12) непрерывна в точке $u = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} \mathbf{P}(\chi_-(-a) \in dx) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \mathbf{E} \exp\{u\eta_-(-a) + \rho\chi_-(-a)\} = \lim_{u \rightarrow 0} e^{\rho a} r_-^{-1}(u, \rho) [r_-(u, \rho)]^{(-\infty, -a]}. \end{aligned}$$

Для случая, когда

$$\rho > 0, \quad \psi(\rho) = 0, \quad \psi'(\rho) = \mathbf{E} \xi(1) e^{\rho\xi(1)} = \infty,$$

соотношение (7) также имеет место ([8, стр.217]) с другой константой c при некоторых достаточно сложных дополнительных ограничениях. В этих условиях аналоги теоремы 1 и следствия 1 также могут быть получены описанным выше способом.

3. Неравенства для распределения числа пересечений

В этом разделе нашей целью является получение двусторонних оценок для вероятности $\mathbf{P}(\theta \geq k)$ при $\mathbf{E} \xi(1) < 0$.

Как отмечалось выше, эта задача для случайных блужданий, порожденных суммами независимых одинаково распределенных случайных величин, при различных ограничениях на распределение скачка блуждания решалась в [2]. Здесь мы будем действовать, в основном, по схеме работы [2].

Заметим, что при $\mathbf{E} \xi(1) \neq 0$ вероятности $\mathbf{P}(\theta \geq k)$ могут быть оценены сверху соответствующими вероятностями геометрического распределения. Если $\mathbf{E} \xi(1) < 0$, то

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \leq [\mathbf{P}(\zeta \geq a + b)]^k = Q^k(a + b). \quad (13)$$

Действительно, имеем из (3) при $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\theta \geq k) &= \int_b^\infty \int_{-\infty}^{+0} Q(a+b-x) \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) \\ &\leq Q(a+b) \int_b^\infty \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \leq 0) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) = Q(a+b) \mathbf{P}(\theta \geq k-1) = Q^k(a+b). \end{aligned}$$

При $k = 1$ оценка (13) легко получается из первого равенства в (10).

Экспоненциальная оценка сверху для $Q(x)$ содержится в (5) при дополнительном предположении, что $\rho > 0$.

Далее будем заниматься нахождением оценок снизу для $\mathbf{P}(\theta \geq k)$.

Теорема 2 Пусть $\mathbf{E} \xi(1) < 0$ и для некоторого $c > 0$ в представлении (1) выполняется $\int_{-\infty}^{-c} dS(x) = 0$. Тогда для $k \geq 1$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \geq Q^k(a+b+c).$$

Доказательство. Распределение положения процесса в момент выхода из полосы во многом определяется распределением скачков процесса, т. е. поведением спектральной функции $S(x)$ в представлении (1). Например, если отрицательные скачки процесса $\xi(t)$ (т. е. скачки вниз) по абсолютной величине не превышают числа c (в условиях теоремы это имеет место), то при всех $y \leq 0$ значение случайной величины $\chi_-(y)$ с вероятностью единица будет не меньше числа $-c$. Поэтому имеют место следующие соотношения: при $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\theta \geq k) &= \int_b^\infty \int_{-c}^{+0} Q(a+b-x) \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) \\ &\geq Q(a+b+c) \int_b^\infty \int_{-c}^{+0} \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) \\ &\geq Q(a+b+c) \int_b^\infty \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) = Q(a+b+c) \mathbf{P}(\theta \geq k-1). \end{aligned}$$

Применяя аналогичные рассуждения для величины $\mathbf{P}(\theta \geq 1)$, получаем требуемое утверждение. Из доказательства теоремы 2 сразу следует

Следствие 2 Для спектрально положительного процесса $\xi(t)$ с $\mathbf{E} \xi(1) < 0$ имеет место равенство $\mathbf{P}(\theta \geq k) = Q^k(a+b)$.

Далее предположим, что функция $Q(x)$ является выпуклой вниз при $x > 0$. Перепишем (3) в виде

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) = \int_b^\infty \mathbf{E} Q(a+b - \chi_-(-a-y)) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy)$$

и воспользуемся неравенством Йенсена для функции Q . Тогда

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \geq \int_b^{\infty} Q(a + b - \mathbf{E}\chi_-(-a - y)) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy).$$

Из [7, теорема 5] выводим следующее неравенство. Если $\mathbf{E}\xi(1) \leq 0$, $\mathbf{E}|\xi^3(1)| < \infty$, то равномерно по $y \geq 0$ выполняется

$$|\mathbf{E}\chi_-(-y)| \leq l := \frac{3a_3}{a_2}, \quad (14)$$

где принято обозначение $a_i = \int_{-\infty}^{\infty} |x^i| dS(x)$, $i = 2, 3$. Эти величины конечны, если $\mathbf{E}|\xi^3(1)| < \infty$. Имеем далее

$$Q(a + b - \mathbf{E}\chi_-(-a - y)) = Q(a + b + \mathbf{E}|\chi_-(-a - y)|) \geq Q(a + b + l).$$

В итоге получаем при $k \geq 2$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \geq Q(a + b + l) \int_b^{\infty} \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) = Q(a + b + l) \mathbf{P}(\theta \geq k - 1).$$

Для $\mathbf{P}(\theta \geq 1)$ имеем

$$\mathbf{P}(\theta \geq 1) = \int_{-\infty}^{+0} Q(a + b - x) \mathbf{P}(\chi_-(-a) \in dx) = \mathbf{E}Q(a + b - \chi_-(-a)) \geq Q(a + b + l).$$

В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 3 Пусть $\mathbf{E}\xi(1) < 0$, $\mathbf{E}|\xi^3(1)| < \infty$ и функция $Q(x)$ выпукла вниз при $x > 0$. Тогда при всех $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \geq Q^k(a + b + l),$$

где $l = 3a_3/a_2$, $a_i = \int_{-\infty}^{\infty} |x^i| dS(x)$, $i = 2, 3$.

Далее предложим другие версии оценок снизу для $\mathbf{P}(\theta \geq k)$.

Обозначим $\varphi(\lambda) = \mathbf{E} \exp\{\lambda\xi(1)\}$ и предположим, что для $\xi(1)$ выполняется правостороннее условие Крамера:

$$\varphi(\lambda_+) < \infty \quad \text{для некоторого} \quad \lambda_+ > 0. \quad (15)$$

Если же $\varphi(\lambda_+) \geq 1$, то уравнение $\varphi(\lambda) = 1$ имеет единственное решение $\rho > 0$ (см. [9]). В [11] установлено, что если $\mathbf{E}\xi(1) < 0$, то при выполнении (15) имеет место неравенство

$$Q(x) \geq s^{-1} e^{-\rho x}, \quad (16)$$

где

$$s = \sup_{0 < x < M} \mathbf{E}(e^{\rho(\xi(1)-x)} | \xi(1) \geq x), \quad M = \inf\{x > 0 : \mathbf{P}(\xi(1) \leq x) = 1\};$$

здесь $M = \infty$, если $\mathbf{P}(\xi(1) < x) < 1$ при всех $x > 0$.

В соответствии с неравенством (16) оценим снизу функцию $Q(a+b-x)$ в (3), после чего воспользуемся неравенством Йенсена по отношению к выпуклой функции $e^{-\rho x}$, а затем применим неравенство (14), предположив дополнительно, что $\mathbf{E}|\xi^3(1)| < \infty$. Получаем для $k \geq 2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\theta \geq k) &\geq \int_b^\infty \int_{-\infty}^{+0} s^{-1} e^{-\rho(a+b-x)} \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) \\
&= s^{-1} e^{-\rho(a+b)} \int_b^\infty \int_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} \mathbf{P}(\chi_-(-a-y) \in dx) \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) \\
&= s^{-1} e^{-\rho(a+b)} \int_b^\infty \mathbf{E} e^{\rho \chi_-(-a-y)} \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) \geq s^{-1} e^{-\rho(a+b)} \int_b^\infty e^{\rho \mathbf{E} \chi_-(-a-y)} \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) \\
&\geq s^{-1} e^{-\rho(a+b)} \int_b^\infty e^{\rho l} \mathbf{P}(\xi(\tau_{k-1}^+) \in dy) = s^{-1} e^{-\rho(a+b+l)} \mathbf{P}(\theta \geq k-1).
\end{aligned}$$

Проводя аналогичные рассуждения для $\mathbf{P}(\theta \geq 1)$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4 Пусть $\mathbf{E} \xi(1) < 0$, $\mathbf{E}|\xi^3(1)| < \infty$, выполняется правостороннее условие Крамэра (15) и $\varphi(\lambda_+) \geq 1$. Тогда для $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \geq s^{-1} e^{-\rho k(a+b+l)}.$$

Предположим теперь, что для рассматриваемого случайного процесса $\xi(t)$ условие (15) не выполняется, то есть распределение случайной величины $\xi(1)$ имеет тяжёлый правый хвост: $\mathbf{E} \exp\{\lambda \xi(1)\} = \infty$ при всех $\lambda > 0$. Рассмотрим случайный процесс $\xi_1(t)$, который получается простой заменой скачков процесса $\xi(t)$, превышающих некоторое положительное число C , на скачки размера C . Спектральная функция процесса $\xi_1(t)$ в представлении (1) будет равна

$$S_1(x) = \begin{cases} S(x), & \text{если } x \leq C, \\ S(C), & \text{если } x > C. \end{cases}$$

Ясно, что для процесса $\xi_1(t)$ выполнено условие (15), так как

$$\varphi_1(\lambda) \equiv \mathbf{E} \exp\{\lambda \xi_1(1)\} < \infty$$

при любом $\lambda > 0$ и, кроме того, $\varphi_1(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Отметим также, что $\mathbf{E} \xi_1(1) \leq \mathbf{E} \xi(1) < 0$, с вероятностью единица $\zeta \geq \zeta_1 := \sup_{t \geq 0} \xi_1(t)$ и

$$Q(x) = \mathbf{P}(\zeta \geq x) \geq Q_1(x) := \mathbf{P}(\zeta_1 \geq x).$$

Ясно, что чем больше число C , тем меньше будет потеря точности в последнем неравенстве.

Поскольку для $\xi_1(t)$ выполняется правостороннее условие Крамэра, для получения необходимой оценки снизу для вероятности $\mathbf{P}(\zeta_1 \geq x)$ мы вновь можем пользоваться неравенством (16). При этом участвующие в нём величины ρ и s определяются

уже по распределению случайной величины $\xi_1(1)$ и зависят от C ; их обозначим через $\rho(C)$ и $s(C)$.

Таким образом,

$$Q_1(x) \geq (s(C))^{-1} e^{-\rho(C)x}. \quad (17)$$

Для получения оценки снизу для вероятности $\mathbf{P}(\theta \geq k)$ нужно теперь под интегралом в формуле (3) воспользоваться оценкой снизу $Q(a+b-x) \geq Q_1(a+b-x)$, применить к полученному выражению оценку (17) и дальше действовать по схеме доказательства теоремы 4. В итоге получаем следующий результат.

Теорема 5 Пусть $\mathbf{E} \xi(1) < 0$ и $\mathbf{E} |\xi^3(1)| < \infty$. Тогда для $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\theta \geq k) \geq (s(C))^{-1} e^{-\rho(C)k(a+b+l)},$$

где величины $\rho(C)$ и $s(C)$ определяются по процессу $\xi_1(t)$.

Отметим, что в последнем неравенстве число $l = 3a_3/a_2$ определяется по процессу $\xi(t)$.

Список литературы

- [1] В. А. Rogozin, *On distributions of functionals related to boundary problems for processes with independent increments*, Theory Probab. Appl., **11**:4 (1966), 580–591.
- [2] V. I. Lotov, A. P. L'vov, *Bounds for the number of crossings of a strip by random walk paths*, Journal of Math. Sciences, 2018, V. **230**:1 (2018), 112–117.
- [3] V. I. Lotov, *On the limit behavior of the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., **54**:2 (2013), 265–270.
- [4] V. I. Lotov, N. G. Orlova, *Asymptotic expansions for the distribution of the crossing number of a strip by sample paths of a random walk*, Siberian Math. J., **45**:4 (2004), 680–698.
- [5] V. I. Lotov, V. R. Khodjibaev, *On the number of crossings of a strip for stochastic processes with independent increments*, Siberian Adv. Math., 1993, **3**:2 (1993), 145–152.
- [6] В. Р. Ходжибаев, А. А. Атаходжаев, *Распределение числа пересечений полосы для случайных процессов с независимыми приращениями*, Уз. мат. журнал, **1** (2010), 150–169.
- [7] А. А. Mogul'skii, *On the distribution of the first jump for a process with independent increments*, Theory Probab. Appl., **21**:3 (1977), 470–481.
- [8] Н. С. Братийчук, Д. В. Гусак, *Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями*, Наукова думка, Киев, 1990.
- [9] В. А. Rogozin, *Local behavior of processes with independent increments*, Theory Probab. Appl., **13**:3 (1968), 482–486.
- [10] В. А. Rogozin, *Distribution of the maximum of a process with independent increments*, Sib. Math. J., **10**:6 (1969), 989–1010.

- [11] V. I. Lotov and V. R. Khodjibayev, *Inequalities in a two-sided boundary crossing problem for stochastic processes*, Siberian Math. J., **62**:3 (2021), 455–461.

Владимир Иванович Лотов,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
lotov@math.nsc.ru

Вали Рахимджанович Ходжибаев,
Наманганский инженерно-строительный институт,
ул. Ислама Каримова, 12, Наманган,
160103 Узбекистан;
Институт математики,
Академия наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, 46, Ташкент,
100174 Узбекистан
vkhodjibayev@mail.ru