УДК 519.21

Исследование характеристик процедуры кумулятивных сумм в задаче скорейшего обнаружения разладки. [1]

В.И. Лотов, А.С. Тарасенко

Аннотация

Получены оценки в виде неравенств для среднего времени задержки с реагированием на наличие разладки и для среднего времени до ложной тревоги при обнаружении разладки с помощью CUSUM процедуры.

Ключевые слова: случайное блуждание с задержкой в нуле, процедура кумулятивных сумм, задача о разладке, вероятностные неравенства

1 Введение. Постановка задачи и предварительные сведения

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0. \tag{1}$$

Пусть также

$$W_{n+1} = \max\{0,\, W_n + X_{n+1}\}, \qquad n \geq 0, \qquad W_0 = 0. \tag{2}$$

Известно (см., например, [6, §72, Лемма 1]), что этим соотношениям удовлетворяет последовательность $W_n = S_n - \gamma_n$, где $\gamma_n = \min\{0, S_1,\, S_2,\, \ldots,\, S_n\}$.

Для произвольного числа $b > 0$ введём случайную величину T, равную моменту первого достижения последовательностью $\{W_n,\, n \geq 1\}$ уровня b:

$$T = T(b) = \inf\{n \geq 1 : W_n \geq b\}. \tag{3}$$

Полагаем $T = \infty$, если $W_n < b$ при всех n.

Цель работы состоит в получении двусторонних неравенств для $\mathbf{E}T$.

Последовательность случайных величин (2) возникает в ряде приложений. Среди них выделим классический последовательный метод скорейшего обнаружения разладки, известный как процедура кумулятивных сумм (CUSUM procedure). Остановимся на нем более подробно.

Предположим, что последовательно одно за другим производятся независимые наблюдения $Y_1,\, Y_2,\, \ldots$, причем до некоторого момента времени m они имеют общую функцию распределения F_1, а с момента m распределение наблюдений меняется на

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 22-21-00396, https://rscf.ru/project/22-21-00396/

F_2. Предполагается, что обе функции F_1 и F_2 известны. Момент m принято называть моментом разладки, и он неизвестен. Задача состоит в том, чтобы по последовательным наблюдениям максимально быстро обнаружить наличие разладки, если она произошла. Для этих целей строится вспомогательное случайное блуждание $\{S_n,\ n \geq 1\}$, в котором полагается

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad X_i = \log \frac{f_2(Y_i)}{f_1(Y_i)}. \tag{4}$$

Здесь f_1 и f_2 — плотности распределений F_1 и F_2 соответственно относительно некоторой меры μ. Предполагается, что F_1 и F_2 абсолютно непрерывны относительно друг друга. Это обеспечивает, в частности, конечность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$.

До разладки случайное блуждание имеет отрицательный снос, это следует из очевидного неравенства

$$\mathbf{E}_1 X_n = \int \log \frac{f_2}{f_1} f_1 d\mu = \int \log \left(1 + \frac{f_2}{f_1} - 1\right) f_1 d\mu < \int \left(\frac{f_2}{f_1} - 1\right) f_1 d\mu = 0.$$

Аналогично показывается, что снос блуждания становится положительным начиная с момента разладки.

Данный эффект используется для обнаружения разладки. E. Page [1] предложил алгоритм, который получил название процедуры кумулятивных сумм. Он состоит в следующем. Решение о том, что разладка имела место, принимается в тот момент времени T, когда траектория введенного в (4) случайного блуждания $\{S_n\}$ после достижения своего минимума продвинется вверх на значительную величину. Более точно,

$$T = T(b) = \min\{n \geq 1 :\ S_n - \min_{0 \leq k \leq n} S_k \geq b\}$$

при подходящем выборе числа $b > 0$. Поскольку движение траектории вниз нас не должно беспокоить, то каждый раз на n-м шаге S_n сравнивается с уже достигнутым минимумом траектории. Это эквивалентно тому, что каждый раз при достижении минимума траектории начало координат перемещается в эту уже достигнутую точку минимума, и относительно нее отслеживается движение вверх. Как уже отмечалось выше, момент T можно задавать в эквивалентной постановке (2)–(3). Число b следует выбирать таким, чтобы в случае отсутствия разладки величина $\mathbf{E}\,T$ (среднее время до объявления ложной тревоги) была достаточно большой, а при наличии разладки среднее время задержки с объявлением тревоги (по поводу возникшей разладки) должно быть малым. Полезно также рассматривать и другие характеристики этого алгоритма. Тем самым мы приходим к необходимости изучать характеристики распределения момента первого достижения уровня b траекториями случайного блуждания с задержкой в нуле.

Следует отметить, что в целом методы скорейшего обнаружения разладки анализировались в большом количестве работ, отметим среди них статьи [2]–[4], монографии [5], [6], см. также цитированную литературу в этих монографиях.

Далее везде рассматриваем случайное блуждание общего вида, введенное в (1).

Известно, что нахождение явных выражений для распределений разного сорта граничных функционалов для случайных блужданий доступно только в некоторых частных ситуациях. То же самое относится и к изучению распределения T и $\mathbf{E}\,T$. По этой причине акцент в исследованиях обычно перемещается на построение аппроксимационных формул, и, в частности, на изучение асимптотики изучаемых величин в тех случаях, когда асимптотический анализ возможен. В [7] приведены асимптотические разложения для $\mathbf{E}T$ при $b \to \infty$, справедливые при выполнении условия Крамéра на распределение X. Ряд асимптотических результатов для $\mathbf{E}T$ при рассмотрении процедуры кумулятивных сумм в задаче о разладке получен в [8]. Весьма детальный анализ асимптотических свойств этой процедуры содержит монография [6]. Ясно, что любые асимптотические результаты неизбежно содержат остаточные члены. Обычно указывается порядок убывания этих остаточных членов, однако оценка их реальной величины требует дополнительных рассмотрений.

В связи с этим естественным дополнением к имеющимся асимптотическим результатам является нахождение неравенств для $\mathbf{E}T$ в самом общем случае при различных ограничениях на $\mathbf{E}X$. Полученные результаты позволят характеризовать свойства процедуры кумулятивных сумм в задаче о разладке.

Основные результаты о неравенствах для $\mathbf{E}T$ содержатся в теоремах 1, 4, 5 и 7. Утверждения теорем 2, 3 и 6 взяты из [9] и [10], их формулировки приводятся здесь для облегчения чтения.

Для введенной в (1) последовательности случайных величин $\{S_n\}$ положим

$$N = N(b) = \inf\{n \geq 1 :\ S_n \notin [0, b)\}.$$

Известно (см. [1, формула (9)]), что

$$\mathbf{E}T = \frac{\mathbf{E}N}{\mathbf{P}(S_N \geq b)}. \tag{5}$$

Таким образом, для оценивания $\mathbf{E}T$ отдельно нужно получить неравенства для $\mathbf{E}N$ и $\mathbf{P}(S_N \geq b)$.

Далее воспользуемся следующим соображением. Если траектория блуждания впервые выходит из полосы скачком, превышающим по размеру ширину полосы, то уже не важно, насколько велико это превышение. Приведенная ниже лемма является формализацией этого соображения: она показывает, что величина $\mathbf{E}T$ не изменится, если вместо $\{S_n\}$ рассматривать случайное блуждание, построенное по срезкам $S'_n = X'_1 + \cdots + X'_n$, где

$$X'_i = X_i I_{\{-c_1 < X_i < c_2\}} - c_1 I_{\{X_i \leq -c_1\}} + c_2 I_{\{X_i \geq c_2\}}$$

при произвольных $c_i \geq b,\ i = 1, 2$. В дальнейшем значения этих констант будут выбираться такими, чтобы при переходе от $\{S_n\}$ к $\{S'_n\}$ не менялся знак математического ожидания скачков блуждания.

Положим

$$S'_0 = 0,\ N' = \inf\{n \geq 1 :\ S'_n \notin [0, b)\},$$
$$T' = T'(b) = \min\{n \geq 1 :\ S'_n - \min_{0 \leq k \leq n} S'_k \geq b\}.$$

Лемма 1 (см. также лемму 1 в [10]). *С вероятностью единица $N = N'$, а также $\mathbf{P}(S_N \geq b) = \mathbf{P}(S'_{N'} \geq b)$.*

Разумеется, совпадают также вероятности

$$\mathbf{P}(S_N < 0) = 1 - \mathbf{P}(S_N \geq b) = 1 - \mathbf{P}(S'_{N'} \geq b) = \mathbf{P}(S'_{N'} < 0).$$

Доказательство леммы. До момента N размеры скачков случайного блуждания $\{S_n\}$ не выходят за пределы интервала $[0, b)$, значит траектории $\{S_n\}$ и $\{S'_n\}$ совпадают до момента N. Пусть $N = m$ и $S_m \geq b$. Тогда, очевидно, $X_m > 0$. Если при этом $X_m < c_2$, то $X'_m = X_m$, значит $S_m = S'_m \geq b$ и $N' = N$. Если оказалось, что $S_m \geq b$ и $X_m \geq c_2$, то и $S'_m \geq b$, то есть и в этом случае $N' = N$. Предположим теперь, что $N = m$ и $S_m < 0$. Если оказалось при этом, что $X_m > -c_1$, то в этом случае опять $X'_m = X_m$ и траектории $\{S'_n\}$ и $\{S_n\}$ совпадают до момента N включительно. Если же $X_m \leq -c_1$, то, очевидно, $S'_m < 0$ и $N' = m = N$. Лемма доказана.

Таким образом, для вычисления $\mathbf{E}T$ наряду с формулой (5) можно пользоваться формулой

$$\mathbf{E}T = \frac{\mathbf{E}N}{\mathbf{P}(S_N \geq b)} = \frac{\mathbf{E}N'}{\mathbf{P}(S'_{N'} \geq b)}$$

и далее работать со случайным блужданием, построенным по введенным в лемме 1 срезкам при подходящих значениях c_1 и c_2.

Чтобы избежать дополнительных обозначений, везде в дальнейшем будем сразу предполагать, что уже произошел переход к срезкам и для введенного в (1) случайного блуждания $\{S_n\}$ выполняется требование

$$S_0 = 0, \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \qquad \mathbf{P}(X_i \in [-c_1, c_2]) = 1. \tag{6}$$

Заметим, что бесконечные значения для c_i не исключаются.

2 Двусторонние оценки для $\mathbf{E}T$ при положительном сносе

В этом разделе мы будем предполагать, что $\mathbf{E}X > 0$.

Применительно к процедуре кумулятивных сумм в задаче о разладке величина $\mathbf{E}T$ имеет смысл среднего значения задержки с объявлением о наличии разладки, коль скоро она произошла. Чем меньше задержка, тем лучше. С момента разладки скачки случайного блуждания имеют положительное математическое ожидание, в связи с этим сначала будем искать оценку сверху для $\mathbf{E}T$, предполагая, что $\mathbf{E}X > 0$.

Ниже приведены несколько версий таких оценок. Простейшая из них выглядит следующим образом. Обозначим

$$\eta_+ = \min\{n \geq 1 : \ S_n \geq b\}, \qquad \chi_+ = S_{\eta_+} - b.$$

Теорема 1 *Пусть $a = \mathbf{E}X > 0$, тогда*

$$\mathbf{E}T \leq \frac{b}{a} + \frac{\mathbf{E}\chi_+}{a}. \tag{7}$$

Доказательство. В силу того, что $W_n \geq S_n$ при каждом $n \geq 1$, имеет место неравенство $T \leq \eta_+$, и в силу тождества Вальда

$$a\mathbf{E}T \leq a\mathbf{E}\eta_+ = \mathbf{E}S_{\eta_+} = b + \mathbf{E}\chi_+.$$

Для оценки $\mathbf{E}\chi_+$ далее можно применить неравенство Лордена [11]

$$\mathbf{E}\chi_+ \leq \frac{\mathbf{E}(X^+)^2}{a}.$$

Оценка (7) проста, однако ее точность не всегда удовлетворительна. Поясним, что имеется в виду.

Известно, что в задачах с двумя границами для случайных блужданий особую трудность представляет учет влияния на результат перескоков через границы. Для случайного блуждания $\{S_n\}$ их два: перескок через верхнюю границу и через нижнюю. Задачи существенно упрощаются, если перескоки отсутствуют или имеют экспоненциальное распределение. Пренебрежение эффектом перескока обычно ведет к потере точности в тех или иных задачах.

При больших значениях сноса блуждания траектория $\{S_n\}$ быстро уходит вверх, расхождение между T и η_+ невелико и оценка (7) является поэтому достаточно точной в этом случае. В то же время соотношение (5) показывает, что значение $\mathbf{E}T$ зависит от обоих перескоков случайного блуждания $\{S_n\}$ при выходе из интервала $[0, b)$. При построении оценки (7) не принимаются во внимание многократные уходы траектории $\{S_n\}$ вниз после достижения своего минимума, а перескок траектории $\{W_n\}$ через уровень b мажорируется перескоком $\{S_n\}$ в однограничной задаче, который интегрируется по всем вообще траекториям, а не только по тем, которые соответствуют выходу из полосы через верхнюю границу. Если же значение сноса блуждания невелико, то следует ожидать, что эффект возможного выхода траектории $\{S_n\}$ через нижнюю границу также имеет существенное влияние на результат. В связи с этим появление в данной работе последующих теорем 4–5 продиктовано желанием учесть влияние обоих перескоков.

В силу формулы (5) для оценивания $\mathbf{E}T$ сверху достаточно оценить снизу $\mathbf{P}(S_N \geq b)$ и оценить сверху $\mathbf{E}N$.

Начнем с $\mathbf{P}(S_N \geq b)$. Нам будет удобно перейти к дополнительной вероятности

$$\mathbf{P}(S_N < 0) = 1 - \mathbf{P}(S_N \geq b),$$

которую будем оценивать сверху. Кроме того, в дальнейшем будут использоваться известные из [9] оценки сверху и снизу для аналогичной вероятности, полученные для блужданий с отрицательным сносом. В связи с этим введем последовательности

$$\widetilde{X} = -X, \quad \widetilde{X}_i = -X_i,\ i \geq 1, \quad \widetilde{S}_n = -S_n.$$

Теперь выполняется $\mathbf{E}\widetilde{X}_i = -\mathbf{E}X_i < 0$, и пусть, как и ранее,

$$\widetilde{N} = \inf\{n \geq 1 :\ \widetilde{S}_n \notin (-b, 0]\}.$$

Ясно, что $N = \widetilde{N}$ и $\mathbf{P}(S_N < 0) = \mathbf{P}(\widetilde{S}_{\widetilde{N}} > 0)$. Обозначим

$$\widetilde{S} = \sup_{n\geq 0} \widetilde{S}_n = -\inf_{n\geq 0} S_n, \qquad \mathbf{P}(\widetilde{S} > x) = \mathbf{P}(\inf_{n\geq 0} S_n < -x) = Q(x), \quad x \geq 0.$$

Здесь $p := Q(0) = 1 - \mathbf{P}(\inf_{n\ge 0} S_n = 0) < 1$.

В [9, Теоремы 1, 2] получены оценки снизу и сверху для вероятности выхода случайного блуждания с отрицательным сносом из интервала $(-a, b)$ через его верхнюю границу, где $a > 0$, $b > 0$. Анализируя доказательства, нетрудно обнаружить, что утверждения этих теорем остаются справедливыми, если вместо интервала $(-a, b)$ рассматривать $(-b, 0]$, $b > 0$, и использовать знак строгого неравенства в определении функции $Q(x)$. Подправленные таким образом теоремы 1 и 2 из [9] дают в нашем случае следующие результаты.

Так как $\mathbf{E}\widetilde{X} < 0$, то

$$\mathbf{P}(\widetilde{S}_{\widetilde{N}} > 0) \ge \frac{p - Q(b)}{1 - Q(b)}.$$

Если при $c_2 = \infty$ дополнительно потребовать, чтобы $\mathbf{E}(X^+)^2 < \infty$ и функция $Q(x)$ являлась выпуклой вниз при $x > 0$, то

$$\mathbf{P}(\widetilde{S}_{\widetilde{N}} > 0) \le \frac{p - Q(b+d)}{1 - Q(b+d)}, \qquad d := \frac{\mathbf{E}(X^+)^2}{\mathbf{E}X},$$

где $X^+ = \max\{X, 0\}$.

Переформулируем эти результаты применительно к последовательности $\{S_n\}$.

Теорема 2 *Пусть выполнено условие* (6) *при некоторых* $c_1 \ge b$, $c_2 \ge b$, *и* $\mathbf{E}X > 0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_N \ge b) = 1 - \mathbf{P}(\widetilde{S}_{\widetilde{N}} > 0) \le \beta(b) := \frac{1 - p}{1 - Q(b)}. \tag{8}$$

Если дополнительно $\mathbf{E}(X^+)^2 < \infty$ *и функция* $Q(x)$ *является выпуклой вниз при* $x > 0$, *то*

$$\mathbf{P}(S_N \ge b) \ge \alpha(b) := \frac{1 - p}{1 - Q(b+d)}. \tag{9}$$

Итак, оценки для $\mathbf{P}(S_N \ge b)$, полученные в (8) и (9), выражаются в терминах функции $Q(x) = \mathbf{P}(\sup_{n\ge 0}(-S_n) > x)$. Как известно, явные формулы для распределения супремума траектории доступны далеко не всегда. В то же время, если дополнительно предположить, что при $c_1 = \infty$ левый хвост распределения случайной величины X удовлетворяет условию Краме́ра, то функция $Q(x)$ оказывается зажатой между двумя экспонентами известного вида. Действительно, обозначим $\psi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda(-X)}$ и предположим, что

$$\psi(\lambda_+) < \infty \text{ для некоторого } \lambda_+ > 0, \qquad \psi(\lambda_+) \ge 1. \tag{10}$$

Функция ψ выпукла вниз, $\psi'(0) < 0$ и $\psi(\mu) = 1$ для некоторого $\mu > 0$. Очевидно, условие (10) также выполнено, если в условиях теоремы 2 имеет место $c_1 < \infty$. Положим

$$s^{-1} = \sup_{0<t<c} \mathbf{E}(e^{-\mu(X+t)} | X < -t),$$

где $c = \inf\{t > 0 : \mathbf{P}(-X \le t) = 1\}$. Нетрудно показать, что $s \le 1$. Тогда (см. [13, Теорема 15.3.5])

$$se^{-\mu x} \le Q(x) \le e^{-\mu x}, \quad x > 0. \tag{11}$$

Таким образом, мы можем заменить значения функции Q в формулах (8)–(9) на соответствующие экспоненциальные оценки из (11), получив при этом более наглядные, но несколько менее точные оценки для $\mathbf{P}(S_N \geq b)$. В этом случае условие выпуклости функции Q в теореме 2 уже не потребуется. Действительно, утверждение (9) основано на теореме 2 из [9], доказательство которой можно переписать, заменив в формулах (2) и (3) этого доказательства значения функции Q на предложенные экспоненциальные оценки (11). Экспоненты уже обладают свойствами выпуклости и допускают дальнейшее использование неравенства Йенсена, что и происходило при доказательстве теоремы 2 в [9].

Тем самым приходим к следующему утверждению.

Теорема 3 *Пусть выполнено условие* (6) *и дополнительно выполнено условие* (10) *при* $c_1 = \infty$, *либо условие* $c_1 < \infty$. *Предположим также, что* $\mathbf{E}(X^+)^2 < \infty$ *и* $\mathbf{E}X > 0$. *Тогда*

$$\alpha(b) \geq \frac{1-p}{1-se^{-\mu(b+d)}}, \qquad \beta(b) \leq \frac{1-p}{1-e^{-\mu b}}, \qquad d = \frac{\mathbf{E}(X^+)^2}{\mathbf{E}X}. \tag{12}$$

Займемся теперь оцениванием сверху величины $\mathbf{E}N$. Пусть τ — величина перескока траектории случайного блуждания $\{S_n\}$ через границу полосы, то есть

$$\tau = \begin{cases} S_N, & \text{если } S_N < 0, \\ S_N - b, & \text{если } S_N \geq b. \end{cases}$$

Обозначим $a = \mathbf{E}X$ и воспользуемся тождеством Вальда:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\, S_N = a\mathbf{E}\, N &= \mathbf{E}\,(\tau;\, S_N < 0) + \mathbf{E}\,(b+\tau;\, S_N \geq b) \\ &= -\mathbf{E}\,(|\tau|;\, S_N < 0) + b\mathbf{P}(S_N \geq b) + \mathbf{E}\,(\tau;\, S_N \geq b), \end{aligned}$$

то есть

$$a\mathbf{E}T = \frac{a\mathbf{E}N}{\mathbf{P}(S_N \geq b)} = b + \frac{\mathbf{E}\,(\tau;\, S_N \geq b)}{\mathbf{P}(S_N \geq b)} - \frac{\mathbf{E}\,(|\tau|;\, S_N < 0)}{\mathbf{P}(S_N \geq b)}. \tag{13}$$

Для того, чтобы оценить сверху $\mathbf{E}\,(\tau;\, S_N \geq b)$, воспользуемся введенными выше обозначениями

$$\eta_+ = \min\{n \geq 1 :\ S_n \geq b\}, \qquad \chi_+ = S_{\eta_+} - b,$$

и запишем

$$\mathbf{E}\,(\tau;\, S_N \geq b) = \mathbf{E}\,(\chi_+;\, S_N \geq b) = \mathbf{E}\chi_+ I_{\{S_N \geq b\}}.$$

Далее применим неравенство Гельдера: при любом $\delta > 0$

$$\mathbf{E}\,(\tau;\, S_N \geq b) \leq \big(\mathbf{E}\chi_+^{1+\delta}\big)^{1/(1+\delta)} \big(\mathbf{P}(S_N \geq b)\big)^{\delta/(1+\delta)}.$$

Выбором малого числа δ можно приблизить к единице показатель степени у χ_+, а также приблизить к единице множитель $\big(\mathbf{P}(S_N \geq b)\big)^{\delta/(1+\delta)}$. Для оценки $\mathbf{E}\chi_+^{1+\delta}$ применим неравенство Лордена [11], которое в нашем случае утверждает следующее. Если $\mathbf{E}(X^+)^{2+\delta} < \infty$, то равномерно по $b > 0$

$$\mathbf{E}\chi_+^{1+\delta} \leq l := \frac{3+\delta}{2+\delta} \cdot \frac{\mathbf{E}(X^+)^{2+\delta}}{\mathbf{E}X}.$$

Таким образом,

$$\frac{\mathbf{E}\,(\tau;\,S_N \ge b)}{\mathbf{P}(S_N \ge b)} \le \left(\frac{l}{\mathbf{P}(S_N \ge b)}\right)^{1/(1+\delta)}. \tag{14}$$

Нужные нам оценки снизу для $\mathbf{P}(S_N \ge b)$ содержатся в (9) и (12) при соответствующих условиях.

Заметим, что если $c_2 < \infty$ в условии (6), то перескок через верхнюю границу ограничен числом c_2, что дает простую, но менее точную оценку

$$\frac{\mathbf{E}\,(\tau;\,S_N \ge b)}{\mathbf{P}(S_N \ge b)} \le c_2. \tag{15}$$

Для оценивания последнего слагаемого в (13) достаточно получить оценку снизу для $\mathbf{E}\,(|\tau|;\,S_N < 0)$ и воспользоваться уже полученными в (8) и (12) оценками сверху для $\mathbf{P}(S_N \ge b)$.

Для оценивания снизу $\mathbf{E}\,(|\tau|;\,S_N < 0)$, как и в [9], введем события

$$A_1 = \{X_1 < 0\}, \quad A_2 = \{0 \le X_1 < b,\, X_1 + X_2 < 0\},\ \ldots.$$

Легко видеть, что

$$\{S_N < 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Таким образом, при любых $n \ge 1$,

$$\mathbf{E}\big(|\tau|; S_N < 0\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}\big(|\tau|; A_i\big) \ge m(n) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\big(|\tau|; A_i\big). \tag{16}$$

В частности,

$$m(1) = \int\limits_{(-\infty,0)} |y|\mathbf{P}(X_1 \in dy),$$

$$m(2) = m(1) + \int\limits_{[0,b)} \int\limits_{(-\infty,0)} |y|\mathbf{P}(z + X_2 \in dy)\mathbf{P}(X_1 \in dz),$$

и так далее. Чем больше число n, тем точнее будет оценка снизу (16). Компьютерные эксперименты показывают, что в ряде случаев значения $m(n)$ при $n > 1$ незначительно улучшают оценку $m(1)$, но при этом их вычисление требует заметно бо́льших усилий.

Заметим, что для выполнения соотношения (16) не требуется никаких дополнительных условий.

Используя полученные оценки (14) и (16) в представлении (13), для любого $n \ge 1$ приходим к следующему предварительному неравенству: если $\mathbf{E}(X^+)^{2+\delta} < \infty$, то

$$a\mathbf{E}T \le b + \left(\frac{l}{\mathbf{P}(S_N \ge b)}\right)^{1/(1+\delta)} - \frac{m(n)}{\mathbf{P}(S_N \ge b)}. \tag{17}$$

Принимая во внимание (8) и (9), получаем из (17) оценку сверху для $\mathbf{E}T$. Сформулируем этот результат.

Теорема 4 *Пусть выполнено условие* (6), $a = \mathbf{E}X > 0$ *и* $\mathbf{E}(X^+)^{2+\delta} < \infty$. *Тогда для любого* $n \ge 1$ *имеет место оценка*

$$a\mathbf{E}T \le b + \left(\frac{l}{\alpha(b)}\right)^{1/(1+\delta)} - \frac{m(n)}{\beta(b)}. \qquad (18)$$

Величины $\alpha(b)$ *и* $\beta(b)$ *определены соответственно в* (8) *и* (9), *значения* $m(n)$ *определены в* (16). *Неравенство* (18) *сохранится, если заменить* $\alpha(b)$ *и* $\beta(b)$ *их оценками в соответствии с* (12) *при выполнении условий теоремы 3.*

Замечание 1. Компьютерное моделирование подтверждает, что оценка (18) оказывается более точной по сравнению с (7) при малых значениях сноса.

Замечание 2. Использование неравенств Лордена для оценивания моментов величины перескока χ_+ может приводить к завышенным оценкам для $\mathbf{E}T$, если случайная величина X^+ с большой вероятностью принимает значения в удаленном множестве, что неизбежно влечет большие значения и для моментов X^+. В лемме 1 показано, что скачки случайного блуждания, размер которых превышает ширину полосы, не должны влиять на $\mathbf{E}T$. Введение срезки на уровне $c_2 < \infty$ позволяет отсечь большие значения X^+ (разумеется, при сохранении условия $\mathbf{E}X > 0$). Заметим попутно, что при этом перескок через верхнюю границу будет ограничен числом c_2, что дает простую оценку (15).

Для оценивания $\mathbf{E}T$ снизу обратимся опять к формуле (13), из которой следует, что нам потребуется оценить снизу $\mathbf{E}\,(\tau;\, S_N \ge b)$, оценить сверху $\mathbf{P}(S_N \ge b)$ и $\mathbf{E}\,(|\tau|;\, S_N < 0)$.

Оценка сверху $\mathbf{P}(S_N \ge b) \le \beta(b)$ уже получена в (8). Для оценивания снизу $\mathbf{E}\,(\tau;\, S_N \ge b)$, как и выше, введем события

$$B_1 = \{X_1 \ge b\}, \quad B_2 = \{0 \le X_1 < b,\, X_1 + X_2 \ge b\},\ \ldots,$$

так что $\{S_N \ge b\} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. Таким образом, при любых $n \ge 1$,

$$\mathbf{E}\big(\tau; S_N \ge b\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}\big(\tau; B_i\big) \ge M(n) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\big(\tau; B_i\big). \qquad (19)$$

Здесь

$$M(1) = \int\limits_{[b,\infty)} (y-b)\mathbf{P}(X_1 \in dy),$$

$$M(2) = M(1) + \int\limits_{[0,b)} \int\limits_{[b,\infty)} (y-b)\mathbf{P}(z + X_2 \in dy)\mathbf{P}(X_1 \in dz),$$

и так далее.

Осталось оценить $\mathbf{E}\,(|\tau|;\, S_N < 0)$ сверху.

Введем

$$\eta_- = \min\{n \ge 1:\ S_n < 0\},\ \chi_- = S_{\eta_-},$$

полагая $\eta_- = \infty$, если $S_n \ge 0$ при всех n. В этом случае величина χ_- остается не определенной. Обозначим

$$U(y) = \mathbf{P}(|\chi_-| \geq y \,|\, \eta_- < \infty), \qquad p = \mathbf{P}(\eta_- < \infty),$$

тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,(|\tau|;\, S_N < 0) &= \mathbf{E}\,(|\chi_-|;\, S_N < 0) \leq \mathbf{E}\,(|\chi_-|;\, \eta_- < \infty) \\ &= p \int\limits_{(0,\infty)} y\mathbf{P}(|\chi_-| \in dy \mid \eta_- < \infty) = p \int\limits_{(0,\infty)} U(y)dy.\end{aligned}$$

Положим

$$g(y) = \mathbf{P}(-X \geq y), \qquad G(y) = \int\limits_{(y,\infty)} g(t)\,dt, \qquad y > 0,$$

и пусть

$$\int\limits_{(0,\infty)} G(y)\,dy < \infty. \tag{20}$$

В [12, Гл. 4, Теорема 10] указаны положительные постоянные α и β такие, что

$$p\,U(y) \leq \alpha\, g(y) + \beta\, G(y),\;\; y > 0.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\,(|\tau|;\, S_N < 0) \leq \gamma := \alpha \int\limits_{(0,\infty)} g(y)dy + \beta \int\limits_{(0,\infty)} G(y)dy. \tag{21}$$

Итак, оценивая слагаемые в правой части (13) с помощью неравенств (8), (9),(19) и (21), приходим к следующему утверждению.

Теорема 5 *Пусть в условиях теоремы 2 выполнено* (20)*. Тогда для любого* $n \geq 1$ *имеет место оценка*

$$a\mathbf{E}T \geq b + \frac{M(n)}{\beta(b)} - \frac{\gamma}{\alpha(b)}, \tag{22}$$

величины $\beta(b)$ *и* $\alpha(b)$ *определены в* (8) *и* (9)*, число* γ *определено в* (21)*, значения* $M(n)$ *определены в* (19)*. Неравенство* (22) *сохраняется в силе, если заменить величины* $\beta(b)$ *и* $\alpha(b)$ *на их оценки в соответствии с* (12) *при дополнительном выполнении условий теоремы 3.*

Замечание 3. Если в условиях теоремы 2 выполняется $c_1 < \infty$, то вместо оценки (21) можно использовать более простую, но менее точную оценку

$$\mathbf{E}\,(|S_N|;\, S_N < 0) \leq c_1\mathbf{P}(S_N < 0) = c_1(1 - \mathbf{P}(S_N \geq b)) \leq c_1(1 - \alpha(b)),$$

и далее воспользоваться оценкой снизу для $\alpha(b)$ из (12), если выполнены условия теоремы 3.

3 Оценка снизу для $\mathbf{E}T$ при отрицательном сносе

В этом разделе предполагаем, что $a = \mathbf{E}X < 0$ и выполнено условие (6), в котором полагаем $c_2 = b$. В силу соотношения (5) достаточно оценить сверху $\mathbf{P}(S_N \geq b)$ и оценить снизу $\mathbf{E}N$.

Начнем с $\mathbf{P}(S_N \geq b)$. Ясно, что для X выполнено правостороннее условие Краме́ра:

$$\varphi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda X} < \infty \quad \text{при любом} \quad \lambda > 0.$$

Кроме того, $\varphi(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому существует единственное число $\nu > 0$, удовлетворяющее равенству $\varphi(\nu) = 1$.

Далее воспользуемся теоремой 5 из [10], которая для вероятности $\mathbf{P}(S_N \geq b)$ дает следующий результат.

Теорема 6 *Пусть* $\mathbf{E}X < 0$, $\mathbf{E}(X^-)^2 < \infty$ *и правый хвост распределения случайной величины* X *удовлетворяет условию Краме́ра (в частности, это выполнено при* $c_2 = b$ *в условии* (6)*). Тогда*

$$\mathbf{P}(S_N \geq b) \leq \frac{e^{-\nu b}(1 - re^{-\nu h})}{1 - re^{-\nu(b+h)}}, \qquad h := \frac{\mathbf{E}(X^-)^2}{|\mathbf{E}X|}, \tag{23}$$

где

$$r^{-1} = \sup_{0<t<b} \mathbf{E}(e^{\nu(X-t)}|X > t) \geq 1.$$

Перейдем к нахождению оценки снизу для $\mathbf{E}N$. В силу тождества Вальда имеем

$$-\mathbf{E}S_N = |a|\mathbf{E}N = \mathbf{E}(|S_N|; S_N < 0) - \mathbf{E}(S_N; S_N \geq b). \tag{24}$$

Таким образом, нам достаточно оценить снизу $\mathbf{E}(|S_N|; S_N < 0)$, найти подходящую оценку сверху для $\mathbf{E}(S_N; S_N \geq b)$ и воспользоваться содержащейся в теореме 5 оценкой для $\mathbf{P}(S_N \geq b)$.

Для случайного блуждания S_n скачки вверх ограничены числом b, поэтому величина перескока через верхнюю границу не превосходит b и

$$\mathbf{E}(S_N; S_N \geq b) = \mathbf{E}(b + \tau; S_N \geq b) \leq 2b\mathbf{P}(S_N \geq b). \tag{25}$$

Оценка $\mathbf{E}(|S_N|; S_N < 0) \geq m(n)$ найдена в (16) безотносительно к знаку числа a. Таким образом, при каждом $n \geq 1$

$$|a|\mathbf{E}N \geq m(n) - 2b\mathbf{P}(S_N \geq b). \tag{26}$$

Применяя теперь (5), (24)–(26) и сформулированную в теореме 6 оценку сверху для $\mathbf{P}(S_N \geq b)$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 7 *Пусть* $\mathbf{E}X < 0$*, и пусть выполнено условие* (6)*, в котором* $c_2 = b$*, и* $\mathbf{E}(X^-)^2 < \infty$*. Тогда для любого* $n \geq 1$

$$|a|\mathbf{E}T \geq \frac{m(n)}{\mathbf{P}(S_N \geq b)} - 2b \geq \frac{m(n)e^{\nu b}(1 - re^{-\nu(b+h)})}{1 - re^{-\nu h}} - 2b, \tag{27}$$

числа ν, r *и* h *определены в теореме 6.*

Вернемся к методу скорейшего обнаружения разладки с помощью процедуры кумулятивных сумм. Приведенные выше теоремы 1, 4 и 5 позволяют оценить сверху и снизу среднюю величину задержки с обнаружением разладки, а теорема 7 дает возможность оценить снизу среднее время до ложной тревоги.

Отметим, что участвующие в (23) и (27) величины ν и r по определению зависят от b, $\nu = \nu(b)$, $r = r(b)$. В [10] изучалось их асимптотическое поведение при больших значениях b в ситуации, когда $X = \min(Y, b)$, где случайная величина Y имеет тяжелый правый хвост, т.е. $\mathbf{E}\, e^{\lambda Y} = \infty$ для любого $\lambda > 0$. Выяснилось, что в этом случае при $b \to \infty$

$$\nu(b) \to 0, \quad e^{b\nu(b)}\mathbf{P}(Y \ge b) \to 0, \quad r(b) = 1 + \nu(b)\frac{\mathbf{E}(Y;\, Y \le 0)}{\mathbf{P}(Y > 0)} + o(\nu(b)).$$

Если же для Y выполнено правостороннее условие Крамéра, то есть при некотором $\lambda_+ > 0$

$$\mathbf{E}e^{\lambda Y} < \infty, \qquad \lambda \le \lambda_+,$$

и $\mathbf{E}e^{\lambda_+ Y} \ge 1$, то для случайной величины $X = \min(Y, b)$ в теореме 6 число ν отделено от нуля, и в этом случае нижняя оценка в (27) растет экспоненциально быстро по мере увеличения барьера b.

Авторы благодарны В.И. Вахтелю за полезное замечание.

Список литературы

[1] E. S. Page, "Continuous inspection schemes", *Biometrika*, **41** (1954), 100–115.

[2] А. Н. Ширяев, "Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения", *Теория вероятностей и ее применения*, **8**:1 (1963), 26–51; англ. пер.: A. N. Shiryaev, "On optimum methods in quickest detection problems", *Theor. Probab. Appl.*, **8** (1963), 22—46.

[3] G. Lorden, "Procedures for reacting to a change in distribution", *Ann. Statist.*, **42** (1971), 1897–1908.

[4] M. Pollak, "Average run lengh of an optimal method of detecting a change in distribution", *Ann. Statist.*, **15**:2 (1987), 749–779.

[5] D. Siegmund, *Sequential Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[6] А. А. Боровков, *Математическая статистика*, Лань, Санкт-Петербург, 2010.

[7] В. И. Лотов, "О случайных блужданиях в полосе", *Теория вероятностей и ее применения*, **36**:1 (1991), 160–165; англ. пер.: V. I. Lotov, "On the random walks in a strip", *Theory Probab. Appl.*, **36** (1991), 165–170.

[8] V. I. Lotov, "Asymptotic expansions for the CUSUM procedure in a change point problem", *Siberian Advances in Mathematics*, **2**:3 (1992), 158–172.

[9] V. I. Lotov, "Bounds for the probability to leave the interval", *Statistics and Probability Letters*, **145** (2019), 141–146.

[10] V. I. Lotov, "On some inequalities in boundary crossing problems for random walks", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **17** (2020), 661–671.

[11] G. Lorden, "On the excess over the boundary", *Ann. Math. Stat.*, **41** (1970), 520–527.

[12] А. А. Боровков, *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*, Наука, М., 1972; англ. пер.: A. A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Springer, New York, 1976.

[13] А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, URSS, М., 2021; англ. пер.: A. A. Borovkov, *Probability Theory*, Springer, London, 2013.

Владимир Иванович Лотов,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
lotov@math.nsc.ru

Антон Сергеевич Тарасенко,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
tarasenko@math.nsc.ru