

ЗАДАЧА О Т-ОБРАЗНОМ СОПРЯЖЕНИИ ТОНКОГО  
ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ  
ТИМОШЕНКО В ДВУМЕРНОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ

Т.С. ПОПОВА 

*Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

**Abstract:** In this paper, we study the problem of equilibrium of a two-dimensional elastic body containing two contacting thin inclusions. One of the inclusions is elastic and is modeled within the Timoshenko beam theory. The other inclusion is rigid and is characterized by a given structure of displacement functions. The inclusions intersect, forming a T-shaped system in an elastic matrix. Two cases of junction are considered: in the absence of a connection between the inclusions and for the case of perfect adhesion between them. It is assumed that the elastic inclusion delaminates from the elastic matrix forming a crack. Due to the presence of a crack, the elastic body occupies a domain with a cut, while on the cut edges, as on a part of the boundary, boundary conditions of the form of inequalities are set. The problem is posed as a variational one, and a complete differential formulation in the form of a boundary value problem is also obtained, including the junction conditions at a common point of inclusions. The equivalence of the variational and differential formulations of the problem is proved under the condition of sufficient smoothness of the solutions.

---

ПОПОВА, Т.С., THE PROBLEM ON T-SHAPE JUNCTION OF THIN INCLUSIONS.

© 2023 ПОПОВА Т.С..

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №23-21-00469), <https://rscf.ru/project/23-21-00469/>.

*Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.*

**Keywords:** variational inequality, Timoshenko inclusion, thin elastic inclusion, thin rigid inclusion, crack, non-penetration conditions, nonlinear boundary conditions, junction problem.

## 1 Введение

Проблема сопряжения тонких включений в упругом теле является актуальной как с точки зрения математической постановки, так и с точки зрения приложений при моделировании деформирования композитов с тонкими хаотично расположенными короткими волокнами. В этом случае концентрации напряжений, возникающие вблизи тонких включений, осложнены проблемой контакта между включениями, а также их возможным отслоением от упругой матрицы. Вследствие этого, задачи сопряжения тонких включений требуют корректной постановки и детального обоснования. Существенное значение при выборе модели также имеет учет физических и геометрических характеристик включений.

В настоящей статье рассматривается задача об ортогональном Т - образном сопряжении двух тонких включений. Одно из включений предполагается упругим и моделируется в рамках теории балок Тимошенко, а другое является тонким жестким. Для описания жесткого включения использован подход, при котором на функции перемещений включения накладываются ограничения структурного характера. Данные ограничения задают вид функций и предписывают наличие перемещений типа поворота и трансляции, указанный подход использован, например, в работах [1]-[5]. Примеры задач для моделей упругих включений типа Тимошенко можно найти в работах [6]-[11], в том числе, в них рассмотрены задачи о концевом сопряжении. В настоящей работе изучены два случая Т-образного сопряжения включений: при отсутствии соединения в общей точке и для случая идеального сцепления между ними. Одной из целей исследования является получение условий сопряжения в точке контакта для каждого из рассматриваемых случаев. Полученные условия сравнивались с известными соотношениями для контактирующих балок и стержней, а также с условиями, характерными для различных дефектов балок, таких, как трещины и разрезы [12]-[17].

Отслоение включения Тимошенко в рассматриваемых задачах моделируется как трещина, на одном из берегов которой прикреплено тонкое включение. Классическая постановка задач о трещине с линейными граничными условиями на ее берегах может приводить к физически противоречивым явлениям, например, взаимному прониканию точек противоположных берегов трещины, один из таких примеров можно найти во введении работы [18]. В настоящей статье используется модель, в которой на берегах трещины задаются краевые условия типа неравенств, исключаяющие подобное взаимное проникание. Нелинейность данного вида

граничных условий приводит к необходимости использования в исследовании поставленных задач методов вариационных неравенств. С помощью этого метода получен полный вид краевых задач для двух рассматриваемых случаев сопряжения и показано, что дифференциальная и вариационная формулировки являются в определенном смысле эквивалентными.

Задачи о Т-образных сопряжениях включений Бернулли-Эйлера и тонких жестких включений в двумерном упругом теле рассмотрены в [19], [20]. Формулировки различных задач о трещинах и основные подходы для их изучения подробно изложены в [21] -[22]. Отметим, что указанный подход применим и для задач о равновесии неупругих тел с трещинами [23]-[27], а также позволяет строить алгоритмы для их численного решения, соответствующие результаты для модели одного включения Тимошенко можно найти в [28]. Тонкие жесткие включения, как концентраторы напряжений в упругих телах, изучались также в [29]-[30]. Вопросы взаимовлияния жестких линейных включений и трещин в упругом теле в классической постановке с линейными граничными условиями рассмотрены в монографии [31]. Некоторые примеры задач сопряжения, математические методы их исследования, а также изучение свойств их решений можно найти в [32], [33].

## 2 Сопряжение тонких включений в двумерном упругом теле

Рассмотрим ограниченную область  $\Omega \subset R^2$  с липшицевой границей  $\Gamma$ , при этом будем считать, что граница состоит из двух частей:  $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ , где  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ . Единичный вектор нормали к  $\Gamma$  обозначим через  $n$ . В области  $\Omega$  рассмотрим пересекающиеся линии  $\gamma$  и  $\gamma_r$ , где  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0, 0)\}$ ,  $\gamma_1 = (-1, 0) \times \{0\}$ ,  $\gamma_2 = (0, 1) \times \{0\}$ ;  $\gamma_r$  - гладкая кривая без самопересечений, полностью лежащая в области  $\Omega$ . Будем считать, что точка  $(0, 0)$  является концевой для  $\gamma_r$ , кроме того,  $(\bar{\gamma} \cup \bar{\gamma}_r) \subset \Omega$ . Введем обозначение для области с разрезом:  $\Omega_c = \Omega \setminus (\bar{\gamma} \cup \bar{\gamma}_r)$  (рис.1).

Область  $\Omega_c$  задает форму двумерного тела из упругого материала, линии  $\gamma$  и  $\gamma_r$  соответствуют двум сопрягающимся включениям. Поскольку точка сопряжения является внутренней для включения  $\gamma$ , то постановка задачи включает отдельные части  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  для этого включения, которые мы будем рассматривать как отдельные включения, соединенные между собой. Тело жестко закреплено по краю вдоль кривой  $\Gamma_D$  и испытывает внешние нагрузки на  $\Gamma_N$ .

Считаем также, что область  $\Omega_c$  с помощью кривых  $\Sigma$  и  $S$  может быть разбита на подобласти  $\Omega_I$ ,  $I = 0, 1, 2$  с липшицевыми границами таким образом, чтобы выполнялись условия:  $\gamma \subset \Sigma$ ,  $\gamma_r \subset S$ ,  $(0, 0) \in \partial S$ ,  $\text{meas}(\partial\Omega_I \cap \Gamma_D) > 0$ ,  $I = 0, 1, 2$  (рис.2). Единичные векторы нормали и касательной к  $\Sigma$  и  $S$  обозначим через  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  и  $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$ . Заметим, что  $\nu = (0, 1)$ ,  $\tau = (1, 0)$  на  $\gamma$ .

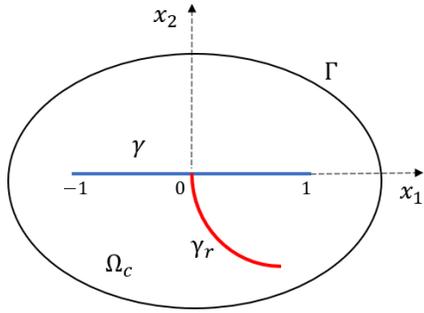


Рис. 1. Т-образное сопряжение тонкого жесткого включения  $\gamma_r$  и включения Тимошенко  $\gamma$

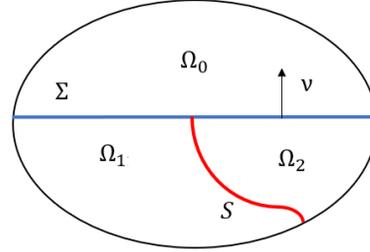


Рис. 2. Разбиение на подобласти  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  с помощью кривых  $\Sigma$  и  $S$

Будем считать, что включение  $\gamma$  отслаивается от упругой матрицы с образованием трещины. Таким образом, форма трещины также задана линией  $\gamma$ . При этом разрез, соответствующий трещине, имеет два берега  $\gamma^+$  и  $\gamma^-$ , где  $\gamma^+ \subset \partial\Omega_0$ ,  $\gamma^- \subset (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)$ . Отслаиваясь от верхнего берега трещины, включение  $\gamma$  остается прикрепленным к нижнему. Тонкое жесткое включение  $\gamma_r$  не имеет отслоений.

Пусть вектор-функция  $u = (u_1, u_2)$  задает перемещения точек тела  $\Omega_c$ , при этом  $u_i$  соответствует перемещениям вдоль оси  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ . Для компонент тензора деформаций и тензора напряжений тела введем следующие формулы:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, \quad \sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

где  $\xi_{,j} = \frac{\partial \xi}{\partial x_j}$ . Коэффициенты  $a_{ijkl} = a_{ijkl}(x)$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$  - компоненты тензора модулей упругости  $A$ , удовлетворяющие условиям

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},$$

$$a_{ijkl} \xi_{kl} \xi_{ij} \geq c_0 |\xi|^2, \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji},$$

где  $c_0$  - положительная постоянная. Всюду в тексте по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Тонкое упругое включение  $\gamma$ , а также каждая из его частей  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , моделируются в рамках теории тонкой балки Тимошенко. Для описания данной модели включения введем на  $\gamma_I$  вектор-функции  $\psi^{(I)} = (w^{(I)}, v^{(I)}, \varphi^{(I)})$ ,  $I = 1, 2$ , где  $w^{(I)}$  и  $v^{(I)}$  - перемещения точек включения  $\gamma_I$  вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$  соответственно,  $\varphi^{(I)}$  - угол поворота нормального сечения  $\gamma_I$ . В дальнейшем все функции, заданные на  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , будем отождествлять с функциями одной переменной  $x_1$ . Поскольку включение  $\gamma$

отслаивается от упругой матрицы с образованием трещины, то перемещения точек на противоположных берегах разреза  $\gamma$  могут не совпадать. Для значений некоторой функции  $\xi$  на берегах  $\gamma^+$  и  $\gamma^-$  введем обозначения с верхним индексом:  $\xi^+$  и  $\xi^-$ , также введем обозначение для скачка функции на берегах разреза:  $[\xi] = \xi^+ - \xi^-$ . Аналогичное обозначение будет использовано и для скачка на  $\gamma_r$ . Включение Тимошенко отслаивается от берега  $\gamma^+$  и прикреплено к берегу  $\gamma^-$ , поэтому на  $\gamma^-$  задаются условия склейки перемещений точек тела и включения:  $u_1^- = w^{(I)}$ ,  $u_2^- = v^{(I)}$  на  $\gamma_I$ ,  $I = 1, 2$ . Жесткое включение моделируется следующим образом. Предполагается, что на  $\gamma_r$  вектор-функция перемещений  $u$  совпадает с некоторым элементом  $\rho^0$  пространства жестких инфинитезимальных перемещений, имеющего вид

$$R(\gamma_r) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = b(-x_2, x_1) + (c^1, c^2), (x_1, x_2) \in \gamma_r, \\ b, c^1, c^2 \in \mathbb{R}\}.$$

Таким образом, предполагается, что для точек  $\gamma_r$  возможны только перемещения типа переноса и поворота.

### 3 Задача с изломом между включениями

В этом разделе будем предполагать, что упругое и жесткое включения контактируют в точке  $(0, 0)$  в отсутствии соединения. Это означает, что угол между включениями  $\gamma$  и  $\gamma_r$  не является фиксированным. При этом фиксируется угол между частями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , поскольку они составляют единое включение  $\gamma$ .

Сначала приведем вариационную формулировку рассматриваемой задачи. Введем обозначения

$$\chi = (u, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}), \quad H_{\Gamma_D}^1(\Omega_c)^2 = \{u \in H^1(\Omega_c)^2 \mid u = 0 \text{ на } \Gamma_D\},$$

и рассмотрим пространство:

$$H = \{\chi \mid u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_c)^2, \psi^{(I)} \in H^1(\gamma_I)^3, \\ u_1^- = w^{(I)}, u_2^- = v^{(I)} \text{ на } \gamma_I, I = 1, 2; u|_{\gamma_r} \in R(\gamma_r)\}.$$

Множество допустимых функций определим следующим образом

$$K = \{\chi \in H \mid [u]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma, \varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0)\}.$$

Неравенство  $[u]\nu \geq 0$  задано на части границы области  $\Omega_c$ , а именно на берегах разреза  $\gamma$ . Данное ограничение исключает взаимное проникание точек противоположных берегов трещины друг в друга и носит название условия непроникания. Второе условие в определении множества  $K$  задает равенство углов поворота для  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в точке сопряжения, поскольку  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соединены в единое целое включение  $\gamma$ . Задачу равновесия двумерного упругого тела с двумя включениями, одно из которых имеет отслоение, можно сформулировать как задачу минимизации

функционала энергии

$$\begin{aligned} \Pi(\chi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \sigma(u)\varepsilon(u) dx - \int_{\Gamma_N} f u ds + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} ((w_{,1}^{(I)})^2 + (\varphi_{,1}^{(I)})^2 + (v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)})^2) ds \end{aligned}$$

на множестве  $K$ . Здесь принято обозначение  $\sigma(u)\varepsilon(u) = \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)$ ,  $i, j = 1, 2$ ;  $f = (f_1, f_2)$  - функция внешних нагрузок, действующих на  $\Gamma_N$ . Поскольку наличие условий непроникания приводит к нелинейности рассматриваемой задачи, то классические подходы к ее исследованию не применимы. Изучение задач о трещинах с аналогичными граничными условиями предполагает применение метода вариационных неравенств, который подробно изложен в монографиях [21], [23]. Применение данных методов к задачам об отслоившихся включениях изучались во многих работах, некоторые примеры можно найти в статьях [1]-[7].

Для произвольных вектор-функций  $\psi = (w, v, \varphi)$ ,  $\bar{\psi} = (\bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi})$  введем в рассмотрение билинейную форму

$$\Phi(\psi, \bar{\psi}) = w_{,1}\bar{w}_{,1} + \varphi_{,1}\bar{\varphi}_{,1} + (v_{,1} + \varphi)(\bar{v}_{,1} + \bar{\varphi}).$$

В принятых обозначениях функционал энергии можно выписать в следующем виде:

$$\Pi(\chi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \sigma(u)\varepsilon(u) dx - \int_{\Gamma_N} f u ds + \frac{1}{2} \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)}) ds.$$

Таким образом, вариационная формулировка состоит в следующем: найти элемент  $\chi \in K$ , доставляющий минимум функционалу  $\Pi$  на множестве  $K$ :

$$\Pi(\chi) = \inf_{\bar{\chi} \in K} \Pi(\bar{\chi}). \quad (1)$$

Следуя [1], [6], можно доказать, что для заданных  $f \in L^2(\Omega_c)^2$ ,  $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$ , задача (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\begin{aligned} \chi \in K, \quad & \int_{\Omega_c} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi^{(I)}) ds \geq \\ & \geq \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - u) ds, \quad \forall \bar{\chi} = (\bar{u}, \bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(2)}) \in K. \quad (2) \end{aligned}$$

Целью дальнейших рассуждений является получение дифференциальной формулировки рассматриваемой задачи равновесия и доказательство ее эквивалентности вариационному неравенству. Для этого будем предполагать достаточную гладкость решений задачи.

Пусть имеет место вариационное неравенство (2). Перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \chi \in K, \quad & \int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} (w_{,1}^{(I)} (\bar{w}_{,1}^{(I)} - w_{,1}^{(I)}) + \\ & + \varphi_{,1}^{(I)} (\bar{\varphi}_{,1}^{(I)} - \varphi_{,1}^{(I)}) + (v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)}) (\bar{v}_{,1}^{(I)} + \bar{\varphi}^{(I)} - v_{,1}^{(I)} - \varphi^{(I)})) ds \geq \\ & \geq \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - u) ds, \quad \forall \bar{\chi} = (\bar{u}, \bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(2)}) \in K. \quad (3) \end{aligned}$$

Выбирая произвольную функцию  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in C_0^\infty(\Omega_c)^2$  и подставляя в (3) пробную функцию вида  $\bar{\chi} = (u \pm \theta, \psi^{(1)}, \psi^{(2)})$ , можно получить следующее уравнение равновесия и граничное условие:

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \quad \text{в } \Omega_c, \quad \sigma(u)n = f \quad \text{на } \Gamma_N,$$

где  $\sigma n = (\sigma_{1j} n_j, \sigma_{2j} n_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Подставим теперь в (3) пробную функцию вида  $\bar{\chi} = \chi \pm \tilde{\chi}$ , где элемент  $\tilde{\chi} = (\tilde{u}, \tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{\psi}^{(2)}) \in K$  удовлетворяет условию  $[\tilde{u}] = 0$  на  $\gamma$ .

Будем иметь

$$\int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \tilde{\psi}^{(I)}) ds = \int_{\Gamma_N} f \tilde{u} ds.$$

Интегрируя данное равенство по частям с учетом полученного выше уравнения равновесия и краевых условий на  $\Gamma_D, \Gamma_N$ , запишем

$$\begin{aligned} & - \sum_{I=1}^2 \left( \int_{\gamma_I} [\sigma_\tau(u)] \tilde{u}_1 ds + \int_{\gamma_I} [\sigma_\nu(u)] \tilde{u}_2 ds + \int_{\gamma_r} [\sigma(u) \nu] \tilde{\rho} ds \right) - \\ & - \sum_{I=1}^2 \left( \int_{\gamma_I} w_{,11}^{(I)} \tilde{w}^{(I)} ds + \int_{\gamma_I} (v_{,11}^{(I)} + \varphi_{,1}^{(I)}) \tilde{v}^{(I)} ds + \int_{\gamma_I} (\varphi_{,11}^{(I)} - v_{,1}^{(I)} - \varphi^{(I)}) \tilde{\varphi}^{(I)} ds \right) + \\ & + (w_{,1}^{(1)} \tilde{w}^{(1)} + \varphi_{,1}^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)} + (v_{,1}^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)})|_{-1}^0 + \\ & + (w_{,1}^{(2)} \tilde{w}^{(2)} + \varphi_{,1}^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)} + (v_{,1}^{(2)} + \varphi^{(2)}) \tilde{v}^{(2)})|_0^1 = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\sigma \nu = (\sigma_{1j} \nu_j, \sigma_{2j} \nu_j)$ ,  $\sigma_\nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i$ ,  $\sigma_\tau = (\sigma \nu) \tau$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Пусть  $\tilde{u} = 0$  на  $\gamma_2^\pm \cup \gamma_r$ , а также  $\tilde{\varphi}^{(2)} = 0$  на  $\gamma_2$ . Тогда (4) переписется в виде

$$\begin{aligned} & - \int_{\gamma_1} [\sigma_\tau(u)] \tilde{u}_1 ds - \int_{\gamma_1} [\sigma_\nu(u)] \tilde{u}_2 ds - \int_{\gamma_1} w_{,11}^{(1)} \tilde{w}^{(1)} ds - \\ & - \int_{\gamma_1} (v_{,11}^{(1)} + \varphi_{,1}^{(1)}) \tilde{v}^{(1)} ds - \int_{\gamma_1} (\varphi_{,11}^{(1)} - v_{,1}^{(1)} - \varphi^{(1)}) \tilde{\varphi}^{(1)} ds - \\ & - (w_{,1}^{(1)} \tilde{w}^{(1)})(-1) - (\varphi_{,1}^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)})(-1) - ((v_{,1}^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)})(-1) = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Отсюда, предполагая  $\tilde{u}_2 = 0$  на  $\gamma_1^+$ ;  $\tilde{v}^{(1)} = \tilde{\varphi}^{(1)} = 0$  на  $\gamma_1$ , получим уравнение

$$-w_{,11}^{(1)} = [\sigma_\tau] \quad \text{на } \gamma_1$$

и условие в одной из концевых точек включения  $\gamma_1$  вида

$$w_{,1}^{(1)} = 0 \quad \text{при } x_1 = -1.$$

Вернемся к (5). Выберем пробную функцию так, что  $\tilde{\varphi}^{(1)} = 0$  на  $\gamma_1$ . С учетом уже полученных уравнения и граничного условия, можно сделать вывод, что на  $\gamma_1$  выполнено уравнение

$$-v_{,11}^{(1)} - \varphi_{,1}^{(1)} = [\sigma_\nu] \quad \text{на } \gamma_1$$

и граничное условие

$$v_{,1}^{(1)} + \varphi^{(1)} = 0 \quad \text{при } x_1 = -1.$$

Тогда из (5) можно получить также уравнение

$$-\varphi_{,11}^{(1)} + v_{,1}^{(1)} + \varphi^{(1)} = 0 \quad \text{на } \gamma_1$$

и краевое условие

$$\varphi_{,1}^{(1)} = 0 \quad \text{при } x_1 = -1.$$

Полученные на  $\gamma_1$  соотношения соответствуют уравнениям равновесия модели балки Тимошенко. Рассмотрим снова (4). Аналогично рассуждая, можно показать, что на  $\gamma_2$  также выполнены аналогичные уравнения равновесия, а также условия в граничной точке  $x_1 = 1$ .

Следовательно, уравнение (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & - \int_{\gamma_r} [\sigma(u)\nu] \tilde{\rho} ds + (w_{,1}^{(1)} \tilde{w}^{(1)})(0) + (\varphi_{,1}^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)})(0) + ((v_{,1}^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)})(0) - \\ & - (w_{,1}^{(2)} \tilde{w}^{(2)})(0) - (\varphi_{,1}^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)})(0) - ((v_{,1}^{(2)} + \varphi^{(2)}) \tilde{v}^{(2)})(0) = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

При  $\tilde{\rho} = 0$  на всем  $\gamma_r$  отсюда получим условие

$$\varphi_{,1}^{(1)}(0) = \varphi_{,1}^{(2)}(0).$$

С учетом этого условия из (6) получим следующее интегральное условие:

$$\int_{\gamma_r} [\sigma(u)\nu] \tilde{\rho} ds = (w_{,1}^{(1)} \tilde{w}^{(1)})(0) - (w_{,1}^{(2)} \tilde{w}^{(2)})(0) + \\ + ((v_{,1}^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)})(0) - ((v_{,1}^{(2)} + \varphi^{(2)}) \tilde{v}^{(2)})(0), \quad \forall \tilde{\rho} \in R(\gamma_r). \quad (7)$$

Кроме того, на  $\gamma$  выполнен стандартный набор краевых условий

$$[u]\nu \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u]\nu = 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Данные условия описывают возможный контакт берегов трещины, включая условие их взаимного непроникания (первое из представленных соотношений). Эти условия могут быть получены стандартным путем, изложенным при доказательстве аналогичных теорем для задач об отслоившемся включении Тимошенко [6].

Таким образом, дифференциальная формулировка задачи равновесия состоит в следующем. Для заданной на  $\Gamma_N$  функции внешних нагрузок  $f = (f_1, f_2)$  найти в  $\Omega_c$  поле перемещений  $u = (u_1, u_2)$  точек тела и тензор напряжений  $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , кроме того на  $\gamma_I$  найти функции  $\psi^{(I)} = (w^{(I)}, v^{(I)}, \varphi^{(I)})$ ,  $I = 1, 2$ , а также на  $\gamma_r$  найти элемент  $\rho^0 \in R(\gamma_r)$ , такие, что выполнена следующая система уравнений и граничных условий:

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \quad \text{в } \Omega_c, \quad (8)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D, \quad \sigma(u)n = f \quad \text{на } \Gamma_N, \quad (9)$$

$$-w_{,11}^{(I)} = [\sigma_\tau], \quad -v_{,11}^{(I)} - \varphi_{,1}^{(I)} = [\sigma_\nu], \quad -\varphi_{,11}^{(I)} + v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)} = 0 \quad \text{на } \gamma_I, \quad (10)$$

$$w_{,1}^{(I)} = v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)} = \varphi_{,1}^{(I)} = 0 \quad \text{при } x_1 = (-1)^I, \quad (11)$$

$$u_1^- = w^{(I)}, \quad u_2^- = v^{(I)} \quad \text{на } \gamma_I, \quad (12)$$

$$u = \rho^0 \quad \text{на } \gamma_r, \quad \rho^0 \in R(\gamma_r), \quad (13)$$

$$w^{(1)}(0) = w^{(2)}(0) = \rho_1^0(0); \quad v^{(1)}(0) = v^{(2)}(0) = \rho_2^0(0); \quad (14)$$

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0), \quad \varphi_{,1}^{(1)}(0) = \varphi_{,1}^{(2)}(0), \quad (15)$$

$$\int_{\gamma_r} [\sigma^1(u)] ds = w_{,1}^{(1)}(0) - w_{,1}^{(2)}(0); \quad \int_{\gamma_r} [\sigma^2(u)] ds = v_{,1}^{(1)}(0) - v_{,1}^{(2)}(0); \quad (16)$$

$$\int_{\gamma_r} ([\sigma^1(u)]x_2 - [\sigma^2(u)]x_1) ds = 0, \quad (17)$$

$$[u]\nu \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u]\nu = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (18)$$

где  $I = 1, 2$ , через  $\sigma^1, \sigma^2$  обозначены первая и вторая компоненты вектора  $\{\sigma_{ij}\nu_j\}$  соответственно. Отметим, что ввиду криволинейности  $\gamma_r$ , компоненты  $\sigma^1$  и  $\sigma^2$  могут не совпадать с касательной и нормальной составляющими данного вектора на  $\gamma_r$ .

Приведенная система содержит уравнения равновесия тела (8) и краевые условия на внешней границе (9), описывающие закрепление на  $\Gamma_D$  и воздействие внешних нагрузок на  $\Gamma_N$ . На  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  выполняются уравнения равновесия (10), соответствующие модели упругой балки Тимошенко, при этом скачки  $[\sigma_\nu]$  и  $[\sigma_\tau]$  нормальных и касательных напряжений в правых частях уравнений выражают воздействие на включение окружающей упругой среды. В концевых точках включений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  кроме точки  $(0, 0)$ , выполняются граничные условия (11), соответствующие условиям свободных концов балки. Кроме того, на  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  задаются условия склейки перемещений точек упругого тела и включений (12). Согласно условию (13), на  $\gamma_r$  функция  $u$  совпадает с некоторым элементом  $\rho^0$  пространства  $R(\gamma_r)$ , то есть этот элемент является одним из неизвестных задачи. В точке  $(0, 0)$  выполнены кинематические условия сопряжения и условия на изгибающие моменты упругих включений (14) - (15). Условия (14) означают совпадение в точке сопряжения перемещений всех включений. Условие (15) характеризует равенство углов поворота, а также совпадение изгибающих моментов включений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Угол поворота  $\gamma_r$  не участвует в условиях сопряжения (15), поскольку в точке сопряжения  $\gamma$  и  $\gamma_r$  нет соединения между этими включениями. Случай идеального сцепления между включениями  $\gamma$  и  $\gamma_r$  рассмотрен в следующем разделе. С учетом структуры функций из  $R(\gamma_r)$ , условие (7) переписано в виде (16)-(17). Соотношения (16) и (17) являются условиями равновесия тонкого жесткого включения, они выражают равенство нулю главного вектора сил и главного вектора моментов для  $\gamma_r$ .

Обратно, получим вариационное неравенство (3) из краевой задачи (8)-(18). Возьмем  $\bar{\chi} \in K$  и умножим уравнение (8) на  $\bar{u} - u$ , а уравнения (10) - на элементы  $\bar{w}^{(I)} - w^{(I)}$ ,  $\bar{v}^{(I)} - v^{(I)}$ ,  $\bar{\varphi}^{(I)} - \varphi^{(I)}$ ,  $I = 1, 2$ , соответственно. Проинтегрируем первое из полученных равенств по  $\Omega_c$ , а остальные - по  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , просуммируем их и получим

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_c} \operatorname{div} \sigma(u) (\bar{u} - u) dx - \sum_{I=1}^2 \left( \int_{\gamma_I} (-w_{,11}^{(I)}) (\bar{w}^{(I)} - w^{(I)}) ds + \right. \\ & \left. + \int_{\gamma_I} (-v_{,11}^{(I)} - \varphi_{,1}^{(I)}) (\bar{v}^{(I)} - v^{(I)}) ds + \int_{\gamma_I} (-\varphi_{,11}^{(I)} + v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)}) (\bar{\varphi}^{(I)} - \varphi^{(I)}) ds \right) = \\ & = \sum_{I=1}^2 \left( \int_{\gamma_I} [\sigma_\tau(u)] (\bar{w}^{(I)} - w^{(I)}) ds + \int_{\gamma_I} [\sigma_\nu(u)] (\bar{v}^{(I)} - v^{(I)}) ds \right). \end{aligned}$$

Применяя интегрирование по частям и учитывая условия (9), (11), (14), а также свойства элементов множества  $K$ , можем записать

$$\int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) dx - \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - u) ds + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi^{(I)}) ds +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} [\sigma(u)\nu(\bar{u} - u)] ds + \int_{\gamma_r} [\sigma(u)\nu(\bar{u} - u)] ds + \\
& + ((w_{,1}^{(2)} - w_{,1}^{(1)})(\bar{w}^{(1)} - w^{(1)}))(0) + ((v_{,1}^{(2)} - v_{,1}^{(1)})(\bar{v}^{(1)} - v^{(1)}))(0) + \\
& + ((\varphi_{,1}^{(2)} - \varphi_{,1}^{(1)})(\bar{\varphi}^{(1)} - \varphi^{(1)}))(0) = \\
& = \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} ([\sigma_\tau(u)](\bar{w}^{(I)} - w^{(I)}) + [\sigma_\nu(u)](\bar{v}^{(I)} - v^{(I)})) ds.
\end{aligned}$$

С учетом структуры функций из  $R(\gamma_r)$ , отсюда будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) dx - \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - u) ds + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi^{(I)}) ds + \\
& + \int_{\gamma_r} ([\sigma^1(u)](b - \bar{b})x_2 + [\sigma^1(u)](\bar{c}^1 - c^1)) ds + \int_{\gamma_r} ([\sigma^2(u)](\bar{b} - b)x_1 + [\sigma^2(u)](\bar{c}^2 - c^2)) ds + \\
& + ((w_{,1}^{(2)} - w_{,1}^{(1)})(\bar{w}^{(1)} - w^{(1)}))(0) + ((v_{,1}^{(2)} - v_{,1}^{(1)})(\bar{v}^{(1)} - v^{(1)}))(0) + \\
& + ((\varphi_{,1}^{(2)} - \varphi_{,1}^{(1)})(\bar{\varphi}^{(1)} - \varphi^{(1)}))(0) = \\
& = \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} ([\sigma_\tau(u)](\bar{w}^{(I)} - w^{(I)}) + [\sigma_\nu(u)](\bar{v}^{(I)} - v^{(I)})) ds - \\
& - \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} ([\sigma_\tau(u)](\bar{u}_\tau - u_\tau) + [\sigma_\nu(u)](\bar{u}_\nu - u_\nu)) ds.
\end{aligned}$$

Тогда, благодаря условиям (15), (16), (17), последнее соотношение примет вид

$$\int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) dx - \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - u) ds + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi^{(I)}) ds = L,$$

где

$$\begin{aligned}
L = \sum_{I=1}^2 \left( \int_{\gamma_I} [\sigma_\tau(u)](\bar{w}^{(I)} - w^{(I)}) ds + \int_{\gamma_I} [\sigma_\nu(u)](\bar{v}^{(I)} - v^{(I)}) ds - \right. \\
\left. - \int_{\gamma_I} [\sigma\nu(u)](\bar{u} - u) ds \right).
\end{aligned}$$

Для доказательства справедливости вариационного неравенства (3) достаточно показать, что  $L \geq 0$ . Действительно, используя в выражении

для  $L$  условия (18), а также свойства элементов  $\bar{\chi} \in K$ , можно переписать  $L$  в виде

$$L = - \int_{\gamma} \sigma_{\tau}^{+}(u)[\bar{u}_1 - u_1] ds - \int_{\gamma} \sigma_{\nu}^{+}(u)[\bar{u}_2] ds + \int_{\gamma} \sigma_{\nu}^{+}(u)[u_2] ds \geq 0.$$

Отсюда следует вариационное неравенство (3). Таким образом, система соотношений (8)-(18) составляет полную дифференциальную постановку рассматриваемой задачи о равновесии двумерного упругого тела с упругим и жестким тонкими включениями для случая излома между ними.

Нами доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Задача (8)-(18) эквивалентна вариационному неравенству (2) при условии достаточной гладкости решений.*

#### 4 Задача об идеальном сцеплении между включениями

В этом разделе будем предполагать, что включения  $\gamma$  и  $\gamma_r$  соединены между собой в общей точке в условиях идеального сцепления. В этом случае задается условие равенства углов поворота для  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_r$ . Таким образом, мы рассматриваем задачу об одном тонком Т-образном включении, часть которого является упругой, а другая часть - жесткой.

В настоящем пункте будем использовать прежнее обозначение для искомой функции  $\chi = (u, \psi^{(1)}, \psi^{(2)})$ , где  $u = (u_1, u_2)$ ,  $\psi^{(I)} = (w^{(I)}, v^{(I)}, \varphi^{(I)})$ ,  $I = 1, 2$ . Множество допустимых функций определим следующим образом:

$$K_1 = \{\chi \in H \mid [u]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma; \\ u(x) = \rho(x) = (-bx_2 + c^1, bx_1 + c^2) \text{ на } \gamma_r, b, c^1, c^2 \in \mathbb{R}; \varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0) = b\}.$$

Вариационная формулировка состоит в следующем: найти элемент  $\chi \in K_1$ , доставляющий минимум функционалу  $\Pi$  на множестве  $K$ , то есть

$$\Pi(\chi) = \inf_{\bar{\chi} \in K_1} \Pi(\bar{\chi}). \quad (19)$$

Задача (19) также однозначно разрешима и эквивалентна вариационному неравенству

$$\chi \in K_1, \quad \int_{\Omega_c} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) dx + \sum_{I=1}^2 \int_{\gamma_I} \Phi(\psi^{(I)}, \bar{\psi}^{(I)} - \psi^{(I)}) ds \geq \\ \geq \int_{\Gamma_N} f(\bar{u} - u) ds, \quad \forall \bar{\chi} = (\bar{u}, \bar{\psi}^{(1)}, \bar{\psi}^{(2)}) \in K_1. \quad (20)$$

Получим дифференциальную постановку, соответствующую вариационному неравенству (20).

Выбирая произвольную функцию  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in C_0^\infty(\Omega_c)^2$  и подставляя в (20) пробную функцию вида  $\bar{\chi} = (u \pm \theta, \psi^{(1)}, \psi^{(2)})$ , можно получить, что в  $\Omega_c$  выполнено уравнение равновесия (8) и второе из условий (9). Подставим теперь в (20) пробную функцию вида  $\bar{\chi} = \chi \pm \tilde{\chi}$ , где элемент  $\tilde{\chi} = (\tilde{u}, \tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{\psi}^{(2)}) \in K_1$ , такой, что  $[\tilde{u}] = 0$  на  $\gamma$ . Интегрируя по частям полученное равенство, аналогично предыдущему можно показать справедливость уравнений (10) и условий (11). С учетом этих уравнений и граничных условий, получим соотношение вида

$$\begin{aligned} & - \int_{\gamma_r} [\sigma(u)\nu] \tilde{\rho} ds + (w_{,1}^{(1)} \tilde{w}^{(1)})(0) + (\varphi_{,1}^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)})(0) + ((v_{,1}^{(1)} + \varphi^{(1)}) \tilde{v}^{(1)})(0) - \\ & - (w_{,1}^{(2)} \tilde{w}^{(2)})(0) - (\varphi_{,1}^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)})(0) - ((v_{,1}^{(2)} + \varphi^{(2)}) \tilde{v}^{(2)})(0) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть  $\tilde{\rho} = (-\tilde{b}x_2 + \tilde{c}^1, \tilde{b}x_1 + \tilde{c}^2)$ . Выберем  $\tilde{\rho}$  таким, что  $\tilde{\rho}_2 = 0$ , т.е.  $\tilde{b} = \tilde{c}^2 = 0$ . Тогда  $\tilde{\rho} = (\tilde{c}^1, 0)$  и  $\tilde{\rho}_2 = \tilde{v}^{(1)}(0) = \tilde{v}^{(2)}(0) = 0$ ,  $\tilde{b} = \tilde{\varphi}^{(1)} = \tilde{\varphi}^{(2)} = 0$ . В этом случае получим, что

$$\int_{\gamma_r} [\sigma^1(u)] ds = w_{,1}^{(1)}(0) - w_{,1}^{(2)}(0). \quad (22)$$

С учетом этого соотношения и предполагая, что  $\tilde{\rho}_1 = 0$ , из (21) можно также получить

$$\int_{\gamma_r} [\sigma^2(u)] ds = v_{,1}^{(1)}(0) - v_{,1}^{(2)}(0). \quad (23)$$

Тогда из (21) следует

$$\int_{\gamma_r} ([\sigma^1(u)]x_2 - [\sigma^2(u)]x_1) ds = \varphi_{,1}^{(1)}(0) - \varphi_{,1}^{(2)}(0). \quad (24)$$

Таким образом, дифференциальная постановка в случае идеального сцепления состоит в следующем. Для заданной на  $\Gamma_N$  функции  $f = (f_1, f_2)$  внешних нагрузок найти в  $\Omega_c$  поле перемещений  $u = (u_1, u_2)$  точек тела и тензор напряжений  $\sigma = \{\sigma_{ij}(u)\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , кроме того на  $\gamma_I$  найти функции  $\psi^{(I)} = (w^{(I)}, v^{(I)}, \varphi^{(I)})$ ,  $I = 1, 2$ , а также на  $\gamma_r$  найти функцию  $\rho^0 \in R(\gamma_r)$ , такие, что выполнены соотношения:

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \quad \text{в } \Omega_c, \quad (25)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D, \quad \sigma(u)n = f \quad \text{на } \Gamma_N, \quad (26)$$

$$-w_{,11}^{(I)} = [\sigma_\tau], \quad -v_{,11}^{(I)} - \varphi_{,1}^{(I)} = [\sigma_\nu], \quad -\varphi_{,11}^{(I)} + v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)} = 0 \text{ на } \gamma_I, \quad (27)$$

$$w_{,1}^{(I)} = v_{,1}^{(I)} + \varphi^{(I)} = \varphi_{,1}^{(I)} = 0 \text{ при } x_1 = (-1)^I, \quad (28)$$

$$u_1^- = w^{(I)}, \quad u_2^- = v^{(I)} \text{ на } \gamma_I, \quad (29)$$

$$u = \rho^0 = (-b^0 x_2 + c, b^0 x_1 + d) \text{ на } \gamma_r, \quad b^0, c, d \in \mathbb{R}, \quad (30)$$

$$w^{(1)}(0) = w^{(2)}(0) = c; \quad v^{(1)}(0) = v^{(2)}(0) = d; \quad (31)$$

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0) = b^0, \quad (32)$$

$$\int_{\gamma_r} [\sigma^1(u)] ds = w_{,1}^{(1)}(0) - w_{,1}^{(2)}(0); \quad \int_{\gamma_r} [\sigma^2(u)] ds = v_{,1}^{(1)}(0) - v_{,1}^{(2)}(0); \quad (33)$$

$$\int_{\gamma_r} ([\sigma^1(u)]x_2 - [\sigma^2(u)]x_1) ds = \varphi_{,1}^{(1)}(0) - \varphi_{,1}^{(2)}(0), \quad (34)$$

$$[u]\nu \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u]\nu = 0 \text{ на } \gamma. \quad (35)$$

Из условий сопряжения (31), (32) в точке (0, 0) следует, что в случае идеального сцепления между упругим и жестким включениями имеет место равенство как перемещений, так и всех углов поворота  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_r$ . Кроме того, в случае излома моменты для включений  $\gamma$ ,  $\gamma_r$  были равны нулю каждый в отдельности, см. (15), (17), в то время, как из соотношения (34) видно, что во втором случае момент для  $\gamma_r$  равен разности моментов для  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

Аналогично предыдущему разделу, можно доказать, что из краевой задачи (25)-(35) при условии достаточной гладкости решений следует вариационное неравенство (20).

## References

- [1] A.M. Khludnev, *Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates*, Europ. J. Mech. A/Solids, **32** (2012), 69–75.
- [2] T. Popova, G.A. Rogerson, *On the problem of a thin rigid inclusion embedded in a Maxwell material*, Z. Angew. Math. Phys., **67**, 105 (2016). <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0700-9>
- [3] E. M. Rudoy, *Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a thin delaminated rigid inclusion*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **10:2** (2016), 264–276.
- [4] A.M. Khludnev, G. Leugering, *On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks*, Math. Methods Appl. Sci., **33:16** (2010), 1955–1967.
- [5] N.P. Lazarev, T.S. Popova, G.A. Rogerson, *Optimal control of the radius of a rigid circular inclusion in inhomogeneous two-dimensional bodies with cracks*, Z. Angew. Math. Phys., **69**, 53 (2018). <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0949-2>
- [6] H. Itou, A.M. Khludnev, *On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies*, Math. Meth. Appl. Sci., **39** (2016), 4980 – 4993.
- [7] A.M. Khludnev, G.R. Leugering, *On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies*, Math. Mech. Solids, **20:5** (2015), 495 – 511.

- [8] V.V. Shcherbakov, *The Griffith formula and  $J$ -integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions*, Z. Angew. Math. Mech., **96**:11 (2016), 1306 – 1317.
- [9] A.M. Khludnev, T.S. Popova, *Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle*, Acta Mechanica Solida Sinica, **30**:3 (2017), 327 – 333.
- [10] A.M. Khludnev, L. Faella, T.S. Popova, *Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies*, Mathematics and Mechanics of Solids, **22**:4 (2017), 737 – 750.
- [11] A.M. Khludnev, T.S. Popova, *On junction problem for elastic Timoshenko inclusion and semi-rigid inclusion*, Mathematical notes of NEFU, **25**:1 (2018), 73–89.
- [12] N.V. Neustroeva, N.P. Lazarev, *Junction problem for Bernoulli - Euler and Timoshenko elastic beams*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 26–37. (in Russian)
- [13] Yu. A. Bogan, *Homogenization of a nonhomogeneous spring beam with elements jointed by hinges of finite rigidity*, Sib. Zh. Ind. Mat. **1**:2 (1998), 67–72 (In Russian)
- [14] G. Leugering, S.A. Nazarov, A.S. Slutskiy, *The asymptotic analysis of a junction of two elastic beams*, Z. Angew. Math. Mech., **99** (2019), e201700192.
- [15] G. Leugering, S.A. Nazarov, A.S. Slutskiy, J. Taskinen, *Asymptotic analysis of a bit brace shaped junction of thin rods*, Z. Angew. Math. Mech., **100** (2020), e201900227.
- [16] S. Caddemi, I. Calio, F. Cannizzaro, *The influence of multiple cracks on tensile and compressive buckling of shear deformable beams*, Int. J. of Solids and Structures, **50**:20–21 (2013), 3166–3183.
- [17] A. Palmeri, A. Cicirello, *Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler - Bernoulli and Timoshenko beams*, Int. J. of Solids and Structures, **48**:14–15 (2011), 2184–2195.
- [18] D.S. Mueller-Hoeppel, P. Wriggers, S. Loehnert, *Crack face contact for a hexahedral-based XFEM formulation*, Comput. Mech., **49** (2012), 725–734.
- [19] A.M. Khludnev, T.S. Popova, *Equilibrium problem for elastic body with delaminated T-shape inclusion*, J. Comp. Appl. Math., **376** (2020), 112870.
- [20] A.M. Khludnev, *T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **393** (2021), 113540.
- [21] A.M. Khludnev, *Elasticity Problems in Non-Smooth Domains*, Fizmatlit, Moscow, 2010. (in Russian)
- [22] J.-L. Lions, *Some methods of solving non-linear boundary value problems*, Dunod, Paris, 1969.
- [23] A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenکو, *Analysis of Cracks in Solids*, WIT Press, Southampton, Boston, 2000.
- [24] H. Itou, V.A. Kovtunenکو, K.R. Rajagopal, *Crack problem within the context of implicitly constituted quasi-linear viscoelasticity*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **29**:2 (2019), 355–372.
- [25] H. Itou, V.A. Kovtunenکو, K.R. Rajagopal, *On the states of stress and strain adjacent to a crack in a strain-limiting viscoelastic body*, Math. Mech. Solids, **23** (2018), 433–444.
- [26] T.S. Popova, *Equilibrium problem for a viscoelastic body with a thin rigid inclusion*, Mathematical notes of NEFU, **21**:1 (2014), 47–55.
- [27] T.S. Popova, *Problems of thin inclusions in a two-dimensional viscoelastic body*, J. Appl. Ind. Math., **12** (2018), 313 – 324.
- [28] E.M. Rudoy, N.P. Lazarev, *Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko beam*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **334** (2018), 18–26.
- [29] V.M. Alexandrov, B.I. Smetanin, B.V. Sobol, *Thin Stress Concentrators in Elastic Bodies*, Fizmatlit, Moscow, 1993. (in Russian)

- [30] M. Goudarzi, F. Dal Corso, D. Bigoni, A. Simone, *Dispersion of rigid line inclusions as stiffeners and shear band instability triggers*, Int. J. of Solids and Structures, **210–211** (2021), 255–272.
- [31] L.T. Berezhnitsky, V.V. Panasyuk, N.G. Stashchuk, *Interaction of Rigid Linear Inclusions and Cracks in a Deformable Body*, Naukova dumka, Kiev, 1983. (in Russian)
- [32] E. Sanches-Palencia, *Non-Homogeneous Media and Vibrations Theory*, Moscow, Mir, 1984. (in Russian)
- [33] M.S. Agranovich, *Sobolev Spaces, their Generalizations, and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundaries*, MCNMO, Moscow, 2013. (in Russian)

TATIANA SEMENOVNA POPOVA  
 NORTH-EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,  
 UL. KULAKOVSKOGO, 48,  
 677008, YAKUTSK, RUSSIA  
 Email address: [ptsokt@mail.ru](mailto:ptsokt@mail.ru)