S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 21, стр. ???? (2023) УДК 517.544
DOI ????/semi.2023.16.xxx MSC 47A68

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ВЗАИМОСВЯЗИ ВЕКТОРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА —ГИЛЬБЕРТА И УСЕЧЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА —ХОПФА.

А.Ф. ВОРОНИН

Abstract. The article will continue the study of the relationships between the equation in convolutions of the 2nd kind on a finite interval (which is also called the truncated Wiener-Hopf equation) and the factorization problem (which is also called the Riemann-Hilbert boundary value problem or the Riemann boundary value problem). Studies of interrelations first appeared in the works of the author [1-5]. In this paper, new results are obtained in the theory of the Riemann-Hilbert vector boundary value problem and the theory of truncated Wiener-Hopf equations based on the identified relationships between the problems under consideration.
Keywords: Wiener algebra, factorization problem, partial indices, truncated Wiener-Hopf equation

Введение В работе будут продолжены исследования взаимосвязи между уравнением в свертках 2-го рода на конечном интервале (которое также называют усеченным уравнением Винера —Хопфа) и задачей факторизации (которую также называют краевой задачей Римана —Гильберта или краевой задачей Римана). В работах автора [1]–[3] был предложен новый подход к решению краевой задачи Римана в алгебре Винера порядка 2. Этот подход (метод) заключается в сведении задачи Римана к усеченному уравнению Винера —Хопфа. В работах [2]–[5] получены новые результаты в теории векторной краевой задачи Римана —Гильберта и теории усеченных уравнений Винера —Хопфа на основе выявленной взаимосвязи между рассматриваемыми задачами. В [3]–[5] было

Работа выполнена при финансовой поддержке фундаментальных научных исследований (проект FWNF-2022-0009).

Поступила 2023 г., опубликована ?? 2023 г.

показано, что для построения факторизации матрицы функции в алгебре Винера порядка 2 достаточно найти решение соответствующего усеченного уравнения Винера —Хопфа (к которому данная задача факторизации сводится). Верно и обратное утверждение. С другой стороны, если задаче факторизации соответствует лишь одно усеченное уравнение Винера —Хопфа, то произвольному усеченному уравнению Винера —Хопфа можно поставить в соответствие некоторый класс задач факторизации (с различными матричными коэффициентами), что вытекает из [3, теорема 2] и [4, теорема 3]. Возникает следующая задача. Для усеченного уравнения Винера —Хопфа требуется найти соответствующую матрицу-функцию, заведомо допускающую эффективную факторизацию, из всего множества матриц-функций, соответствующих этому уравнению. В данной работе сделан первый шаг в решении поставленной задачи.

В работе будут изучаться краевые задачи Римана с матричным коэффициентом $G(x)$, размера 2×2, имеющим следующий общий вид:

$$G(x) = \left(\begin{array}{cc} 1 & e^{ix\tau_0} m^-(x) \\ e^{-ix\tau_0} m^+(x) & 1 + g_{22}(x) \end{array} \right), \tag{0.1}$$

где

$$m^{\pm}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu_{\pm}(t) e^{ixt}\, dt,\ 1 + g_{22}(x) = d_G(x) + m^+(x) m^-(x),$$
$$\mu_{\pm}(t) = \theta(\pm t)\mu(t),\ \mu \in L_1(R),\ d_G(x) \neq 0,\ x \in R, \tag{0.2}$$

$\tau_0 > 0,\ \theta-$ функция Хевисайда.

Легко видеть, что определитель матрицы G равен d_G, где d_G произвольная функции из алгебры Винера.

Напомним понятие алгебры Винера порядка 2. Для целых $2 \geq n, l \geq 1$ положим $L_{n\times l}$ — пространство $n \times l$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$, $\mathcal{F}f$ — образ Фурье матрицы функции $f \in L_{n\times l}$:

$$\mathcal{F}f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt}\, dt,\ x \in \mathbb{R},$$

где $\mathbb{R}$ – расширенная вещественная прямая (R– вещественная прямая); $\mathbb{W}^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$, где C — постоянная матрица порядка n и $f \in L_{n\times n}$; $\mathbb{W}_+^{n\times n}$ ($\mathbb{W}_-^{n\times n}$) — подалгебра в $\mathbb{W}^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$). Через $\mathbb{W}^{n\times 1}$, $\mathbb{W}_\pm^{n\times 1}$ обозначим группы, состоящие из векторов-столбцов матриц-функций из алгебр $\mathbb{W}^{n\times n}$, $\mathbb{W}_\pm^{n\times n}$ соответственно.

Если A — некоторая алгебра, то через $\mathcal{G}A$ обозначим группу из обратимых элементов в A. При $n = 1$ верхний индекс $n \times n$ при $\mathbb{W}$ будем опускать.

Рассмотрим неоднородную задачу Римана на расширенной прямой $\mathbb{R}$, в которой требуется найти вектор-функции $\Phi^{\pm} \equiv (\Phi_1^{\pm}, \Phi_2^{\pm})^T \in \mathbb{W}_\pm^{2\times 1}$ по краевому условию:

$$\Phi^+(x) = G(x)\, \Phi^-(x) + h^-(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

при ограничении $\Phi_2^{\pm}(\infty) = 0$,

где

$$h^- = (h_1^-, h_2^-) \in \mathbb{W}_-^{2\times 1},\ h_1^- = 0,$$

$$h_2^-(x) = \int\limits_{-\tau}^{0} q_-(t)e^{ixt}\,dt,\ q_- \in L_1(-\tau,0),\ \tau_0 \le \tau \text{ – параметр.}$$

Будем рассматривать также уравнение в свертках второго рода на конечном интервале $(0,\tau)$, которое соответствует (при определенных k и f) краевой задаче Римана (0.3):

$$u(t) - \int\limits_{0}^{\tau} k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0,\tau), \tag{0.4}$$

где

$$k \in L_1(R), \quad f \in L_1(0,\tau).$$

Легко видеть, что значения функции $k(t)$ вне интервала $(-\tau,\tau)$ не влияют на решение уравнения (0.4) (последнее будем искать в $L_1(0,\tau)$).

Краевую задачу Римана (0.3), (0.1),(0.2) будем изучать при следующих значениях функции d_G:

$$d_G(x) = (1 + e^{ix(\tau-\tau_0)}m^+(x))(1 - e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^-(x)),\ x \in R. \tag{0.5}$$

§**1. Предварительные утверждения, дополнительные построения и допущения.** Из неравенства в (0.2) следует, что определитель матрицы $G(x)$ допускает эффективную факторизацию (см., например, [6, § 38]):

$$\det\, G(x) = d_G^+(x)\,p^\kappa d_G^-(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где

$$d_G^\pm \in \mathcal{G}\mathbb{W}_\pm,\ d_G^\pm(\infty) = 1,\ p = \frac{x-i}{x+i},$$

$\kappa = \operatorname{Ind}\det\, G(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\Delta_{\mathbb{R}} \arg\det\, G(t)$.

Отметим, что матрица-функции $G(x)$ в (0.1)–(0.2) обладает следующими важными свойствами. Для построения факторизации (достаточно) произвольной матрицы функции из алгебры Винера порядка 2 достаточно построить факторизацию матрицы-функции $G(x)$. Это утверждение вытекает из [3, теорема 2] и [5, следствие], например, при $d_G = 1$. С другой стороны, "простота"структуры матрицы $G(x)$ открывает перспективу построения ее факторизации эффективно. В самом деле, при

$$d_G = 1 - m^+m^-,\ supp\,\mu_+ \subseteq [0,\tau_0]$$

выполняется включение

$$e^{-ix\tau_0}m^+(x),\ d_G(x) + m^+(x)m^-(x) \in \mathbb{W}_-,$$

которое позволяет элементарно свести векторную задачу факторизации (и задачу Римана (0.3)) к скалярной. Вместе с тем легко видеть, что задача Римана (0.1),(0.1)–(0.2) эквивалентна аналогичной задаче Римана с матричным коэффициентом G_0, определитель которого рациональная функция (равен 1 при $\kappa = 0$):

$$G_0(x) = J^+(x)G(x)J^-(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{ix\tau_0}m_0^-(x) \\ e^{-ix\tau_0}m_0^+(x) & p^\kappa + g_{22}^0(x) \end{pmatrix},$$

где

$$m_0^\pm = \frac{m^\pm}{d_G^\pm},\ g_{22}^0 = \frac{g_{22}}{d_G^-\,d_G^+},\ J^\pm(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_G^\pm} \end{pmatrix}.$$

Дополним определения, введенные ранее. При C=0 соответствующие алгебры, подалгебры и группы будем снабжать нижним индексом 0 ($\mathbb{W}_0^{n\times l}$, $\mathbb{W}_{0\pm}^{n\times l}$, $l \in \{1, n\}$). На алгебре $\mathbb{W}_0$ определим дополнительные друг к другу проекторы P_0^+ и P_0^- по формулам

$$P_0^{\pm} \;:\; W_0 \;\to\; \mathbb{W}_{0\pm},\; P_0^{\pm}\mathcal{F}g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} g(t)\theta(\pm t)\,dt,\; x \in \mathbb{R},$$

где $g \in L_1(R)$.

Отметим следующие свойства линейных операторов $P_0^{\pm}$:

$$P_0^+ + P_0^- = I,\; \mathcal{F}^{-1}\{P_0^{\pm}\mathcal{F}g(x)\}(t) = g(t)\theta(\pm t),\; t \in R,$$

где I – единичный оператор, $\mathcal{F}^{-1}$ - обратное преобразование Фурье.

Имеет место

Лемма 1. *Решение краевой задачи Римана (0.3),(0.1),(0.2) обладает следующим свойством:*

$$P_0^+\{e^{-ix\tau_0}\big(\Phi_1^+(x) - C_1\big)\} = 0,\; P_0^-\{e^{ix\tau}p^{\kappa_+}d_G^-(x)\Phi_2^-(x)\} = 0,$$

где

$$x \in \mathbb{R},\; C_1 = \Phi_1^{\pm}(\infty),\; \kappa_+ = \kappa \textit{ при } \kappa \geq 0,\; \kappa_+ = 0 \textit{ при } \kappa < 0.$$

Другими словами, решение краевой задачи Римана (0.3),(0.1),(0.2) имеет следующий общий вид:

$$\Phi_1^+(x) = C_1 + \int\limits_0^{\tau_0} e^{ixt}\alpha_1(t)\,dt,\; \Phi_2^-(x) = \frac{p^{-\kappa_+}}{d_G^-(x)}\int\limits_{-\tau}^{0} e^{ixt}\alpha_2(t)\,dt,$$

$$\big(\Phi_1^-(x) = C_1 + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{ixt}\alpha_1(t)\,dt,\; \Phi_2^+(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{ixt}\alpha_2(t)\,dt,\big)$$

где $\alpha_1 \in L_1(-\infty, \tau_0),\; \alpha_2 \in L_1(-\tau, \infty)$.

Доказательство леммы 1 опускаем, т.к. оно достаточно тривиальное и аналогично доказательству [3, лемма 1] и [2, лемма 1].

В работе, для простоты, будем считать, чть индекс Коши матрицы $G(x)$ равен нулю, т.е. $\kappa = 0$.

Пусть функция d_G в (0.1) определена равенством (0.5). Тогда из (0.2) и (1.1) следует, что

$$d_G^+(x) = 1 + e^{ix(\tau-\tau_0)}m^+,\; d_G^-(x) = 1 - e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^-.$$

Определим теперь функции $w_\tau^{\pm}(x)$ и $\hat{k}(x)$ также как в [3]. Из формул (1.8) в [3] при $\kappa_0 = \kappa_+$ имеем

$$\begin{aligned} w_\tau^-(x) &:= d_G^-(x) + e^{-ix\tau}\,p^{-\kappa_+}g_{12}(x),\\ w_\tau^+(x) &:= d_G^+(x) - e^{ix\tau}p^{-\kappa_-}g_{21}(x), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$g_{12}(x) = e^{ix\tau_0}m^-(x),\; g_{21}(x) = e^{-ix\tau_0}m^+(x).$$

Из (1.2) получим $w_\tau^{\pm} = 1$, т.к. $\kappa_{\pm} = \kappa = 0$. Тогда из формулы (2.1) в [3] имеем

$$\hat{k}(x) = e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^-(x) - e^{ix(\tau-\tau_0)}m^+(x) := \mathcal{F}k(x). \tag{1.3}$$

$$\big(\mathcal{F}k_+ = -e^{ix(\tau-\tau_0)}m^+,\ \mathcal{F}k_- = e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^-\big).$$

Образ Фурье правой части уравнения в свертках (0.4) определим по формуле:

$$\mathcal{F}f(x) = C_1\mathcal{F}k_+(x) - e^{ix\tau}h_2^-(x). \tag{1.4}$$

Справедлива

Лемма 2. *Пусть $\varkappa = 0$ и выполнены равенства (0.5) и (1.3)–(1.4). Тогда решение $u(t)$ (его образ Фурье) соответствующего усеченного уравнения Винера – Хопфа (0.4) выражается через решение краевой задачи Римана (0.3),(0.1),(0.2) по формуле:*

$$\mathcal{F}u(x) = \Phi_1^+(x) - C_1 + e^{ix\tau}\big(1 - e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^-(x)\big)\Phi_2^-(x). \tag{1.5}$$

Доказательство леммы 2. Доказательство проведем по аналогии с доказательством [3, теорема 2]. Отметим, что при $h_2^- = 0$ лемма 2 является частным случаем [3, теорема 2].

Легко видеть, что краевое условие (0.3) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\Psi^+(x) - h^-(x) = M_\tau(x)\,\Phi^-(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

где

$$M_\tau(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{ix\tau_0}m^-(x) + e^{ix\tau}\,d_G^-(x) \\ e^{-ix\tau_0}m^+(x) & 1 + g_{22}(x) \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1^+(x) = \Phi_1^+(x) + e^{ix\tau}\,d_G^-(x)\,\Phi_2^-(x),\ \Psi_2^+(x) = \Phi_2^+(x). \tag{1.7}$$

Умножив слева левую и правую части системы (1.6) на матрицу M_τ^{-1} получим

$$\Phi^-(x) = \frac{1}{d_G^-(x)w_\tau^+(x)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + g_{22}(x) & -e^{ix\tau_0}m^-(x) - e^{ix\tau}\,d_G^-(x) \\ -e^{-ix\tau_0}m^+(x) & 1 \end{pmatrix} \big(\Psi^+(x) - h^-(x)\big). \tag{1.8}$$

Умножим левую и правую части первого уравнения системе (1.8) на d_G^-/w_τ^+, с учетом очевидного равенства

$$1 + g_{22}(x) = 1 - e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^- + e^{ix(\tau-\tau_0)}m^+$$

и равенства (1.3) имеем

$$\big(1 - \mathcal{F}k(x)\big)\Psi_1^+(x) - \frac{\Phi_2^+(x) - h_2^-(x)}{w_\tau^+(x)}e^{ix\tau} = d_G^-(x)\frac{\Phi_1^-(x)}{w_\tau^-(x)}. \tag{1.9}$$

Из (1.9) и (1.4),(1.7), рассуждая также как при доказательстве теоремы 2 в [3] (начиная с формулы (2.7)), получим аналог формулы (2.9) в [3]:

$$\big(1 - \mathcal{F}k(x)\big)\mathcal{F}u(x) - \frac{\Phi_2^+(x)}{w_\tau^+(x)}e^{ix\tau} = \frac{d_G^-(x)}{w_\tau^-(x)}\big(\Phi_1^-(x) - C_1\big) + \hat{f}(x), \tag{1.10}$$

где

$$\hat{f}(x) = -C_1\big(1 - \mathcal{F}k(x) - \frac{d_G^-(x)}{w_\tau^-(x)}\big) - e^{ix\tau}\frac{h_2^-(x)}{w_\tau^+(x)} \equiv \mathcal{F}f(x). \tag{1.11}$$

Здесь $Q^\pm = 0$, в отличае от формулы (2.9) в [3], т.к. $w_\tau^\pm = 1$.

Полученная в (1.11) формула для $\mathcal{F}f(x)$ совпадает с формулой (1.4) при $w_\tau^+ = 1$. Применив к левой и правой частям уравнения (1.10) обратное преобразования Фурье получим усеченное уравненме Винера –Хопфа (0.4), символ которого выражается формулой:

$$1 - \mathcal{F}k_+(x) - \mathcal{F}k_-(x) = 1 + e^{ix(\tau-\tau_0)}m^+(x) - e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^-(x). \tag{1.12}$$

$\square$

§**2. Решение краевой задачи Римана–Гильберта (0.3),(0.1),(0.2).** Имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 2 и справедливо равенство*

$$h_2^-(x) = C_1 P_0^-\{e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x)\}. \tag{2.1}$$

Тогда задача Римана–Гильберта (0.3),(0.1),(0.2) имеет следующее решение

$$\Phi_1^\pm = C_1,\ \Phi_2^- = 0,\ \Phi_2^+(x) = -C_1 P_0^+\{e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x)\}. \tag{2.2}$$

Решение в (2.2) единственно и матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию тогда и только тогда, когда соответствующее однородное усеченное уравнение Винера —Хопфа (0.4) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы. Из равенств (1.4) и (2.1) следует, что $f(t) = 0,\ t \in (0, \tau)$. Тогда очевидно, что $u = 0$ будет решением соответствующего однородного ($f = 0$) усеченного уравнения Винера —Хопфа (0.4) (с символом (1.12)). Из равенства (1.5) в лемме 2 получим

$$0 = \Phi_1^+(x) - C_1 + e^{ix\tau}\big(1 - m^-(x)\big)\Phi_2^-(x). \tag{2.3}$$

С учетом (2.3) запишем первое уравнение системы (0.3) в следующем виде

$$\Phi_1^+(x) - C_1 = \Phi_1^-(x) - C_1 - \big(\Phi_1^+(x) - C_1\big)\frac{m^-(x)}{1 - m^-(x)}.$$

После приведения подобных в вышестоящем уравнении получим

$$\Phi_1^+(x) - C_1 = \big(\Phi_1^-(x) - C_1\big)\big(1 - m^-(x)\big). \tag{2.4}$$

Левая часть уравнения (2.4) из алгебры $\mathbb{W}_{0+}$, правая из $\mathbb{W}_{0-}$ по условию. Применив к левой и правой частям уравнения (2.4) проекторы $P_0^\pm$ получим первые два равенства в (2.2). Из полученного равенства $\Phi_1^+ = C_1$ и равенства (2.3) имеем $\Phi_2^-(x) = C_1$. Справедливость последнего равенства в (2.2) вытекает из второго уравнения системы (0.3) и первых трех равенств в (2.2), т.к. $e^{ix(\tau-\tau_0)}m^+ = -\mathcal{F}k_+$.

Докажем единственность решения задачи Римана в (2.2), и тем самым будет доказана существование канонической факторизации матрицы $G(x)$, т.к. $\kappa = 0$. Для доказательства достаточно заметить, что равенство (2.3) выполняется с необходимостью, если $u = 0$ единственное решение соответствующего однородного усеченного уравнения Винера —Хопфа (0.4).

Пусть теперь матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию. Тогда хорошо известно, что решение задачи Римана (0.3) единственно при заданном C_1, что будет противоречить равенству (1.5) в лемме 2, если $u \neq 0$. Следовательно, $u = 0$. $\square$

§**3. Уравнение в свертках второго рода на конечном интервале (0.4).**

Теорема 2. *Пусть*

$$||k_{\pm}||_{L_1} < 1, \tag{3.1}$$

где

$$k_{\pm}(t) = k(t)\theta(\pm t),\ k \in L_1(-\tau_0, \tau_0),\ \tau_0 > 0.$$

Тогда, если однородное ($f = 0$) уравнение (0.4) (при $\tau = \tau_0$) имеет только тривиальное решение, то для любой функции $f_1 \in L_1(0, \tau)$ и любого параметра $\tau > \tau_0$ следующее усеченное уравнение Винера —Хопфа

$$u_1(t) - \int\limits_0^{\tau} \big(k_-(t - s + a) + k_+(t - s - a)\big)u_1(s)\, ds = f_1(t), \quad t \in (0, \tau), \tag{3.2}$$

где $a = \tau - \tau_0$, имеет единственное решение.

Верно и обратное утверждение. Если для некоторого $a > 0$ однородное ($f_1 = 0$) уравнение (3.2) имеет только тривиальное решение, то для любого $f \in L_1(0, \tau_0)$ усеченное уравнение Винера —Хопфа (0.4) (при $\tau = \tau_0$) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы. Однородному усеченному уравнению Винера —Хопфа (0.4) поставим в соответствие задачу Римана (0.3),(0,1),(0.2) так, что бы выполнялись условия леммы 2 и равенство (2.1). Из леммы 2 получим формулы соответствия (1.12) между символом уравнения (0.4) и элементами матрицы G. В свою очередь из (1.12) следует, что однородное уравнение (0.4) можно записать в виде (3.2) (при $f_1 = 0$) с точностью до переобозначений.

Для случая $a = 0$ матрицу $G(x)$ обозначим через $G_1(x)$. Из условия (3.1) следует, что матрицы $G(x)$, $G_1(x)$ и $G_0(x)$ эквивалентны (последняя определена в начале § 1) и сумарный индекс каждой из этих матриц равен нулю, $\kappa = 0$. Другими словами, все три матрицы обладают одим и тем же набором частных индексов.

Можно видеть, что при $a > 0$ ($a = 0$) условия теоремы 1 выполнены. По теореме 1 матрица $G(x)$ ($G_1(x)$) допускает каноническую факторизацию тогда и только тогда, когда уравнение (3.2) при $f_1 = 0$ (уравнение (0.4) при $f = 0$) имеет единственное решение. Следовательно, заключение теоремы 2 вытекает из эквивалентности матриц $G(x)$, $G_1(x)$ и альтернативы Фредгольма для уравнения (3.2) и уравнения (0.4) (при $\tau = \tau_0$).

□

References

[1] A. F. Voronin, *On the relationship between the factorization problem in the Wiener algebra and the truncated Wiener–Hopf equation*, Russian Math. (Iz. VUZ), 64:12 (2020), 20–28

[2] A. F. Voronin, *Inhomogeneous vector Riemann boundary value problem and convolutions equation on a finite interval*, Russian Math. (Iz. VUZ), 65:3 (2021), 12–24

[3] A. F. Voronin, *Some questions on the relationship of the factorization problem of matrix functions and the truncated Wiener—Hopf equation in the Wiener algebra*, Sib. Electron. Mat. Izv., 18:2 (2021), 1615–1624

[4] A. F. Voronin, *On a Factorization Method for Matrix Functions in the Wiener Algebra of Order 2*, J. Appl. Ind. Math. 16 (2022), 365–376.

[5] A. F. Voronin, *Construction of a factorization of a certain class of matrix functions in the Wiener algebra of order two*, Iz. VUZ. Math. (Russian Math.), N3 (2023), 41–51

[6] N.I.Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Wolters-Noordhoff Pabl., Groningen, 1972.

Anatoly Fedorovich Voronin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State Technical University,
K. Marx Ave., 20,
Novosibirsk, 630073, Russia
E-mail address: voronin@math.nsc.ru