S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2021) УДК 517.956
DOI 10.33048/semi.2021.16.xxx MSC 35K10,
35K20

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

О. С. ЗИКИРОВ, М. М. САГДУЛЛАЕВА

Abstract. In this paper, we prove a unique solvability of a initial–boundary value problem with integral condition for the third–order partial differential equation with heat operator in main part. First, the original problem is reduced to an equivalent problem in a certain sense. Using the Green's function, the equivalent problem is reduced to solving Volterra integral equations. Using equivalence, the existence and uniqueness of the solution of the original problem is proved.

Keywords: A boundary value problem; nonlocal condition; nonlocal problem; parabolic equation; Green's function; integral equations.

1. Введение

В работе рассматриваются краевые задачи с интегральными условиями для уравнения с частными производными третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части.

Исследование разрешимости нелокальных задач для дифференциальных уравнений третьего порядка представляется важным, как с точки зрения развития теории начально–краевых задач для уравнений математической физики, так и с точки зрения приложений математического моделирования различных процессов.

Смешанные задачи с интегральными условиями для параболического уравнения были рассмотрены в работах [4]–[6], но при этом, в основном

Зикиров О.С., Сагдуллаева М.М., Разрешимость нелоальных задач.

Поступила 1 января 2021 г., опубликована 31 декабря 2021 г.

исследовались уравнения второго порядка, как в одномерных [4, 5], так и многомерных [6] областях.

В настоящее время собый интерес вызывают пространственно–нелокальные краевые задачи для обобщенным условием Самарского–Ионкина для одномерных параболических уравнений и для некоторых уравнений соболевского типа [7], в также для квазипараболических уравнений произвольного нечетного порядка по временной переменной [8]. В этих работах получены новые результаты о разрешимости исследуемых задач в клпссе регулярных решений — именно, решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

В данной работе изучается нелокальная граничная задача с интегральными условиями для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной частьи.

2. Постановка задачи

В области $D = \{(x,t): \ 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $c(x,t)$, $f(x,t)$ — заданные функции.

Заметим, что уравнение (1) относится к первому каноническому виду относительно старших производных, указанных в работе [9], т. е. уравнение характеристики имеет один общий интеграл, причём трехкратный. Этот фактор существенно влияет как на корректность постановки задач, так и на их разрешимость.

В работе для уравнения (1) исследуется следующая нелокальная задача.

Нелокальная задача. *Найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

граничным

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и интегральным условиям

$$\int\limits_0^l u(x,t)dx = \int\limits_0^t h(t,\tau)u(l,\tau)d\tau + \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = \overline{1,3})$ – заданные, непрерывные на $[0,l]$ и $[0,T]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \qquad \varphi^{'}(l) = \mu_2(0), \qquad \int\limits_0^l \varphi(x)dx = \mu_3(0).$$

В поставленной задаче в краевых условиях содержится нелокальность по времени, впервые рассмотренная в работе [10]. Заметим, что в работах А.И.Кожанова и его учеников исследована разрешимость краевых задач, сочетающих задачи с нелокальными условиями А.А.Самарского и задачи с интегральными условиями.

Определение. *Регулярным в области D решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x,t)$, из класса $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, удовлетворяющая ему в обычном смысле.*

3. Разрешимость нелокальной задачи 1

Через $C^{k,l}(D)$ обозначен класс функций $u(x,y)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x,y)/\partial x^m \partial y^n$ для всех $m = \overline{0,k}$, $n = \overline{0,l}$; $C^{0,0}(D)$ обозначим через $C(D)$.

Под классом $C^{(k,\nu)}(D)$ понимаются определенные в области D функции, у которых все частные производные порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем ν, $0 < \nu < 1$.

Задачу (1)–(4) исследуем в пространстве $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, при этом будем требовать выполнения следующих условий:

Условие 1. *Коэффициент и правая часть уравнения (1) удовлетворяют условиям*

$$c(x,t), \quad f(x,t) \in C(\overline{D}).$$

Условие 2. *Заданные функции $\varphi(x)$, $\mu_i(y)$, $(i = 1,2,3)$ и $h(t,\tau)$ удовлетворяют условиям*

$$\varphi(x) \in C^2[0,l]; \quad \mu_1(t), \quad \mu_3(t) \in C^1[0,T], \quad \mu_2(t) \in C[0,T].$$

О разрешимости нелокальной задачи 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условие 1 и условие 2. Тогда существует единственное непрерывное и ограниченное решение нелокальной задачи 2.*

Построим явное решение задачи (1)–(4) с помощью функции Грина для уравнения теплопроводности.

Интегрируя уравнение (1) в пределах от 0 до x получим нагруженное уравнение теплопроводности вида

$$u_t - u_{xx} + u_{xx}(0,t) + \int\limits_0^x c(z,t)u(z,t)dz = f_1(x,t), \tag{5}$$

где

$$f_1(x,t) = \mu_1(t) + \int\limits_0^x f(z,t)dz.$$

Для уравнения (5) получим следующую задачу:

Задача 2. *Найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (5) удовлетворяющее условиям (2), (4) и*

$$u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{6}$$

Сложность этой задачи состоит в том, что в обоих частях условия (4) и уравнения (5) входит неизвестное решение $u(x,t)$ под интегралами и функции $u_{xx}(0,t)$.

Поэтому обозначим $u(l,t)$ через $\mu(t)$ и решим сначала следующую задачу.

Задача 3. *Найти решение $u(x,t)$ уравнения (5), удовлетворяющее условиям (2), (6) и*

$$u(l,t) = \mu(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{7}$$

Потом определим функцию $\mu(t)$ из условия (4).

Будем решать задачу 3 в следующих предположениях: $\varphi(x)$, непрерывна и интегрируема на $[0,l]$, $\mu_2(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и предположим, что функция $\mu(t)$ непрерывна и интегрируема на $[0,T]$ и $\mu(0)=0$.

Функция Грина задачи 3 задается формулой (см. например [11])

$$G(x,t:\xi,\tau)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n[U(x-\xi+2nl,t-\tau)+U(x+\xi+2nl,t-\tau)] \tag{8}$$

где $U(x,t;\xi,\tau)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности,

$$U(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau}}\exp\Big[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big], & t>\tau,\\ \qquad\qquad 0, & t\le\tau.\end{cases} \tag{9}$$

Доказательство абсолютной и равномерной сходимости ряда (8) за исключением члена при $n=0$ и рядов, полученных из него почленным дифференцированием любое число раз по x и t приведено в работе [10].

В силу свойства функции Грина $G(x,t;\xi,\tau)$ легко заметить, что решение задачи 3 в области D можно записать в виде

$$\begin{aligned}u(x,t)=\int_0^l\varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)d\xi-\int_0^t\int_0^l G(x,.t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\\ -\int_0^t\mu(\tau)G_\xi(x,t;l,\tau)d\tau+\int_0^t\mu_2(\tau)G(x,.t;0,\tau)d\tau+\\ +\int_0^t\int_0^l G(x,.t;\xi,\tau)\Big[u_{xx}(0,\tau)+\int_0^\xi c(z,\tau)u(z,\tau)dz\Big]d\xi d\tau.\end{aligned} \tag{10}$$

В равенство (10) входит неизвестная функция $u_{xx}(0,t)$.

Введем обозначения

$$K(x,t;\tau)=\int_0^l G(x,t;\xi,\tau)d\xi; \tag{11}$$

$$\begin{aligned}g(x,t)=\int_0^l\varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)d\xi+\int_0^t\mu_2(\tau)G(x,t;0,\tau)d\tau-\\ -\int_0^t\int_0^l G(x,.t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int_0^t\mu(\tau)G_\xi(x,t;l,\tau)d\tau-\\ -\int_0^t d\tau\int_0^l G(x,t;\xi,\tau)\Big(\int_0^\xi c(z.\tau)u(z,\tau)dz\Big)d\xi=\sum_{i=1}^5 g_i(x,t).\end{aligned} \tag{12}$$

Тогда из равенства (10) получим интегро–дифференциальное уравнение

$$u(x,t) = g(x,t) - \int\limits_0^t K(x,t;\tau) u_{xx}(0,\tau) d\tau, \tag{13}$$

Полученное уравнение будем решать методом сведения к интегральному уравнению относительно $u_{xx}(0,t)$. В дальнейшем, необходимо знать дифференциальные свойства ядра $K(x,t,\tau)$ и свободного члена $g_1(x,t)$ в окрестности точки $x=0$.

1. Сначала исследуем дифференциальные свойства ядра $K(x,t;\tau)$ определяемого по формуле (11).

Имеет место следующее утверждение:

Лемма 1. При $t > \tau$ и ядро $K(x,t,\tau) \in C_x^2(D)$ и при $x = 0$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^2 K(x,t,\tau)}{\partial x^2} \bigg|_{x=0} \right| \leq M.$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (11) под знаком интеграла, имеем

$$\frac{\partial K}{\partial x} = - \int\limits_0^l \frac{\partial G(x,t;\xi,\tau)}{\partial \xi} d\xi = -G(x,t;l,\tau) + G(x,t;0,\tau).$$

Учитывая свойства функции Грина, получим

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} [U(x+(2n+1)l, t-\tau) + U(x+(2n-1)l, t-\tau)].$$

Отсюда еще раз дифференцируя по x, находим

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{x+(2n+1)l}{2(t-\tau)} U(x+(2n+1)l, t-\tau) - \right.$$
$$\left. - \frac{x+(2n-1)l}{2(t-\tau)} U(x+(2n-1)l, t-\tau) \right].$$

В последнем равенстве полагая $x=0$ получим

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \bigg|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)l}{2(t-\tau)} \exp\left\{ -\frac{[(2n+1)l]^2}{4(t-\tau)} \right\}. \tag{14}$$

Общий член ряда (14) представим в виде

$$\frac{(2n+1)l}{4\sqrt{\pi(t-\tau)^3}} \exp\left\{ -\frac{[(2n+1)l]^2}{4(t-\tau)} \right\} =$$
$$= \frac{[(2n+1)l]^3}{4\sqrt{\pi}(\sqrt{t-\tau})^3} \exp\left\{ -\frac{[(2n+1)l]^2}{8(t-\tau)} \right\} \cdot \frac{1}{[(2n+1)l]^2} \exp\left\{ -\frac{[(2n+1)l]^2}{8(t-\tau)} \right\}$$

Используя, известное неравенство [13, 14]

$$X^\gamma e^{-X} < M e^{-qX}$$

где $\quad X > 0, \quad \gamma \geq 0, \quad M > 0, \quad 0 < q < 1,$

$$0 < \left\{ \frac{(2n+1)l}{2(t-\tau)} \right\}^3 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(2n+1)l}{2\sqrt{t-\tau}} \right]^2 \right\} \leq M_0,$$

получим оценку для общего члена ряда (14)

$$\left|\frac{(2n+1)l}{2(t-\tau)}\,U((2n+1)l,t-\tau)\right| < \frac{2M_0}{\sqrt{\pi}[(2n+1)l]^2}\,\exp\left\{-\frac{[(2n+1)l]^2}{8(t-\tau)}\right\}.$$

Так как $(2n+1)l \neq 0$ при $\forall n \in N$, то нетрудно убедится, что знакочередующийся ряд в правой части (14) сходится абсолютно и равномерно, т. е.

$$\left|\frac{\partial^2 K(x,t,\tau)}{\partial x^2}\right|_{x=0} \leq M.$$

Лемма 1 доказана.

2. Теперь исследуем свободный член равенства (13). Функция $g_1(x,t)$ определенная равенством (12) состоит из суммы тепловых потенциалов [14].

Лемма 2. Если $f(x,t) \in C(\overline{D})$, $\varphi(x) \in C(0,l)$, $\psi_1(t) \in C(0,+\infty)$, $\mu(t) \in C^1(0,+\infty)$ и $\mu(0)=0$, то функция $g(x,t) \in C^2_x(D)$ и имеет место

$$\left|\left.\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}\right| \leq M.$$

Доказательство. Для краткости доказательства, рассмотрим слагаемое $g_4(x,t)$

$$g_4(x,t) = \int\limits_0^t \mu(\tau)G(x,t;l,\tau)d\tau$$

При $x \neq 0$ и $t \neq \tau$, ядро $G(x,t;l,\tau) \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$. Дифференцируя два раза по x под знака интеграла имеем

$$\frac{\partial^2 g_4(x,t)}{\partial x^2} = \int\limits_0^t \mu(\tau)\frac{\partial^2 G(x,t;l,\tau)}{\partial x^2}\,d\tau = -\int\limits_0^t \mu(\tau)\frac{\partial G(x,t;l,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая свойства фунции Грина и $\mu(0)=0$, получим

$$\frac{\partial^2 g_4(x,t)}{\partial x^2} = \int\limits_0^t \mu^{'}(\tau)G(x,t;l,\tau)d\tau. \tag{15}$$

В равенстве (15) правая часть является потенциалом простого слоя с ядром функции Грина $G(x,t;l,\tau)$. При $x=0$, правая часть (15) непрерывная и ограниченная функция при $0<t<T$:

$$\frac{\partial^2 g_4(0,t)}{\partial x^2} = \int\limits_0^t \mu^{'}(\tau)G(0,t;l,\tau)d\tau.$$

где

$$G(0,t;l,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n \exp\left\{-\frac{[(2n+1)l]^2}{4(t-\tau)}\right\}.$$

Лемма 2 доказана.

Далее, находим нагруженное слагаемое $u_{xx}(0,t)$.

Из доказанных утверждений следует, что равенство (13), можно дифференцировать по x дважды, затем полагая $x = 0$, получим

$$u_{xx}(0,t) = \int\limits_0^t K_{xx}(0,t,\tau)u_{xx}(0,\tau)d\tau + g_{xx}(0,t). \tag{16}$$

Ядро и правая часть интегрального уравнения (16) являются непрерывными и ограниченными функциями.

Обращая равенство (16) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $u_{xx}(0,t)$, будем иметь

$$u_{xx}(0,t) = g_2(t) + \int\limits_0^t k(t,\tau)\mu(\tau)d\tau - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l T(\xi,t;\tau)u(\xi,\tau)d\xi \tag{17}$$

где

$$k(t,\tau) = \frac{\partial G(0,t;l,\tau)}{\partial \tau} + \int\limits_\tau^t R(t,s)\frac{\partial G(0,\tau;l,s)}{\partial \tau}ds;$$

$$T(\xi,t;\tau) = c(\xi,\tau)\int\limits_0^l G(0.t;z,\tau)dz + \int\limits_\tau^t \left[R(t,\tau_1)c(\xi,\tau_1)\int\limits_\xi^l G(0,\tau;z,\tau_1)dz\right]d\tau_1;$$

здесь $R(t,\tau)$ – резольвента ядра $K_{xx}(0,t,\tau)$, а $g_2(t)$ – известная функция.

Подставляя значение $u_{xx}(0,t)$ из (17) в формулу (10), после некоторых преобразований получим

$$u(x,t) = \int\limits_0^t k_1(x,t,\tau)\mu(\tau)d\tau - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l T_1(x,t,\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi + g_6(x,t), \tag{18}$$

здесь

$$k_1(x,t,\tau) = \frac{\partial G(x,t;l,\tau)}{\partial \xi} + \int\limits_\tau^t K(x,t,s)k(\tau,s)ds;$$

$$T_1(x,t;\xi,\tau) = c(\xi,\tau)\int\limits_\xi^l G(x,t;z,\tau)dz + \int\limits_\tau^t K(x,t;\tau_1)T(\xi,\tau,\tau_l)d\tau_1;$$

$g_6(x,t)$ – известная функция.

Интегрируя (18) по x от 0 до l будем имеет

$$\int\limits_0^l u(x,t)dx = \int\limits_0^t \mu(\tau)\left(\int\limits_0^l k_1(x,.t;\tau)dx\right)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \left(\int\limits_0^l T_1(x,t;\xi,\tau)dx\right)u(\xi,\tau)d\xi + \int\limits_0^l g_6(x,t)dx, \tag{19}$$

Заметим, что

$$\int_0^l dx \int_0^t \mu(\tau) G_\xi(x,t;l,\tau)d\tau = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t G(0,t;l,\tau)\mu(\tau)d\tau.$$

Тогда формула (19) примет вид

$$\int_0^l u(x,t)dx = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t \Big\{ G(0,t;l,\tau) - \int_0^l k(x,t,\tau) \Big\} \mu(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^l \Big(\int_0^l T_1(x,t'\xi,\tau)dx \Big) u(\xi,\tau)d\xi + \int_0^l g_6(x,t)dx. \tag{20}$$

В формуле (18) положим $x = l$ и умножим обе части на $h(t,\tau)$, полученное при этом выражение проинтегрируем по τ в пределах от 0 до t и после ряда преобразований, имеем

$$\int_0^t h(t,\tau)u(l,\tau)d\tau = \int_0^t \mu(\tau) \Big\{ \int_\tau^t h(t,s)[G_\xi(l,s;l.\tau) - k(l,t;\tau)]ds \Big\} d\tau -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^l \Big\{ \int_\tau^t h(t,s)T_1(l,\tau;l,s)ds \Big\} u(\xi,\tau)d\xi + \int_0^t h(t,\tau)g_6(l,\tau)d\tau. \tag{21}$$

Согласно условию (4), из равенств (20) и (21) для определения функции $\mu(t)$ получим следующее соотношение

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t k_2(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = \tag{22}$$

$$= g_7(t) - \int_0^t d\tau \int_0^l \Big\{ \int_\tau^t h(t,s)T_1(l,\tau;l,s)ds \Big\} u(\xi,\tau)d\xi,$$

здесь

$$k_2(t,\tau) = G(0,t;l,\tau) + \int_0^l k(x,t,\tau)dx +$$

$$\int_\tau^t h(\tau,s)[G_\xi(l,s;l,\tau) + k(l,s,\tau)]ds;$$

$$g_7(t) = \mu_3(t) - \int_0^l g_6(x,t)dx + \int_o^t h(t,\tau)g_6(l,\tau)d\tau.$$

Последное равенство перепишем в виде

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = g_8(t) \tag{23}$$

$$g_8(t)=g_7(t)-\int\limits_0^t k_2(t,\tau)\mu(\tau)d\tau-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\Big\{\int\limits_\tau^t h(t,s)T_1(l,\tau;l,s)ds\Big\}u(\xi,\tau)d\xi.$$

В силу условия согласования имеем, что $g_8(0)=0$.

Вычислим производную функции $g_8(t)$:

$$g_8^{'}(t)=g_7^{'}(t)-k_2(t,t)-\int\limits_0^t\frac{\partial k(t,\tau)}{\partial t}\mu(\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l h(t,t)T_1(l,\tau;\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi.$$

Обращая уравнение (23), как интегральное уравнение Абеля [15], получим

$$\mu(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t k_3(t,\tau)\mu(\tau)d\tau+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{g_8^{'}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau, \tag{24}$$

здесь

$$k_3(t,\tau)=\frac{k_2(\tau,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}+\int\limits_\tau^t\frac{\partial k_2(\tau,s)}{\partial\tau}\frac{ds}{\sqrt{t-s}}.$$

Учитывая явное выражение $g_8^{'}(t)$, из (24) получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $\mu(t)$:

$$\mu(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t k_3(t,\tau)\mu(\tau)d\tau+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l T_2(t,\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi+g_8(t), \tag{25}$$

где

$$k_3(t,\tau)=\frac{k_2(t,t)}{\sqrt{t-\tau}}+\int\limits_\tau^t\frac{\partial k_2(\tau,s)}{\partial\tau}\frac{ds}{\sqrt{t-s}};$$

$$T_2(t;\xi,\tau)=\frac{T_1(\tau,\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}+\int\limits_\tau^t\frac{\partial T_1(\tau,\xi,s)}{\partial\tau}\frac{ds}{\sqrt{t-s}};$$

$g_8(t)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^t\dfrac{g_7^{'}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau$ – известная функция.

В силу свойств функции Грина, легко показать [13], что

$$|k_3(t,\tau)|\le\frac{c_1}{\sqrt{t-\tau}};\qquad|T_2(t;\xi,\tau)|\le\frac{c_2}{\sqrt{t-\tau}},\quad c_1,c_2=const>0.$$

Обращая уравнение (25) относительно функции $\mu(t)$, как интегральное уравнение Вольтерра второго рода со слабой особенностью, имеем

$$\mu(t)=g_9(t)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l T_3(t;\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi, \tag{26}$$

где

$$T_3(t,\xi,\tau) = T_2(t,\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} R_3(t,s)T_2(\tau,\xi,s)ds;$$

$g_9(t)$ – известная функция, а $R_3(t,\tau)$ резольвента ядра $k_3(t,\tau)$.

Подставляя найденное значение $\mu(t)$ из (26) в формулу (18), после несложных преобразований получим

$$u(x,t) = g_{10}(t) + \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{0}^{l} T_4(x,t;\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi, \tag{27}$$

здесь

$$T_4(x,t;\xi,\tau) = T_1(x,t;\xi,\tau) - \int\limits_{\tau}^{t} k_2(x,t,s)T_3(\tau,\xi,s)ds;$$

$$g_{10}(x,t) = g_2(x,t) - \int\limits_{\tau}^{t} k_2(x,t,\tau)g_9(\tau)d\tau.$$

В силу свойств функции $T_4(x,t;\xi,\tau)$ и $g_{10}(x,t)$ уравнение (27) допускает единственное непрерывно–дифференцируемое решение.

Таким образом, разрешимость нелокальной задачи (1)–(4) доказана.

References

[1] Баренблатт Г. Н., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Прикладная математика и механика, **24**:5,(1960) 852–864.

[2] Дзекцер Е. С. Уравнения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах. Доклады АН СССР, **220**:3 (1975), 540–543.

[3] Чудновский А. Ф. Теплофизика почвы. Наука, Москва, 1976.

[4] Пулькина Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения. Дифференциальные уравнения, **40**:7, (2004), 887–892.

[5] Пулькина Л. С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения. Матем. заметки, **74**:3, (2003), 435–445.

[6] Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальными граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. Дифференциальные уравнения, **42**:9, (2006), 1166–1179.

[7] Кожанов А.И. Нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского-Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений. Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. **509** (2023), 50–53.

[8] Кожанов А.И., Абдрахманов А.М. Пространственно-нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского-Ионкина для квазипараболических уравнений. Сиб. электрон. матем. изв. **19**:2 (2022), 792–803.

[9] Джураев Т. Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка. Дифференциальные уравнения, **27**:10, (1991), 1734–1745.

[10] Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера. Дифференциальные уравнения, **40**:6, (2004), 763–774.

[11] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Высшая школа. Москва. 1995.

[12] Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. Иностранная литература. Москва. 1957.

[13] Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно–составного типов. Фан, Ташкент. 1979.
[14] Зикиров О.С., Сагдуллаева М.М. Разрешимость нелокальной задачи для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. **30**:1, (2020), 20-30.
[15] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Наука. Москва. 1977.

Обиджан Салижанович Зикиров
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, 4,
100174, Ташкент, Узбекистан
E-mail address: zikirovv@yandex.ru

Манзура Муродуллоевна Сагдуллаева
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, 4,
100174, Ташкент, Узбекистан
E-mail address: sagdullayevam@mail.ru