Здравствуйте уважаемый господин рецензент!

Пересылаю список исправлений, внесенных в работу в соответствии с Вашими замечаниями.

Замечание 1. Стр. 148, определение 1.1. "Пара элементов **отделяется** подходящим ν-вычислимым множеством" – этого понятия рецензент не нашел в статье, из-за чего определение 1.1 осталось непонятым, а это базовое определение в статье. Это понятие также не удалось найти в рекомендуемых в статье источниках [1–4]. В источнике 1 есть определения отделимого и эффективно отделимого отношений эквивалентности, и отделимой (эффективно отделимой) нумерации, но нет уверенности в связи с понятием вычислимо отделимой нумерованной алгебры из рецензируемой статьи. Необходимо привести точные определения.

Ответ 1. Приведено, уточнено и расширено. Включен следующий текст;

Если A – универсальная алгебра, то ее основное множество будем обозначать также через A. Из контекста всегда будет ясно о чем идет речь.

Пусть A – универсальная алгебра, $P(A) = \{B|B \subseteq A\}$ – множество всех подмножеств множества A и $\mathfrak{S} = \{S_i|i \in I\} \subseteq P(A)$ – некоторое семейство подмножеств основного множества этой алгебры. Будем говорить, что элемент a_0 отделяется от элемента a_1 посредством $\mathfrak{S}$, если существует такое $i \in I$, что $a_0 \in S_i$ и $a_1 \notin S_i$. Если для всякой пары различных элементов a_0, a_1 алгебры A имеет место отделимость a_0 от a_1 либо a_1 от a_0 посредством $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{S}$ назовем полным отделяющим семейством.

Определение 1.1. *Нумерованная алгебра (A, ν) называется вычислимо отделимой, если всякая пара различных ее элементов отделяется подходящим ν-вычислимым множеством.*

Другими словами, если a_0, a_1 – различные элементы алгебры A, то найдется такое ν-вычислимое подмножество A_0 основного множества алгебры A, что $a_0 \in A_0$ и $a_1 \notin A_0$. Таким образом, вычислимая отделимость нумерованной алгебры равносильна существованию полного отделяющего семейства вычислимых (в данной нумерации) подмножеств. Заметим, что в силу симметричности ситуации (дополнение вычислимого множества также вычислимо) из вычислимой отделимости a_0 от a_1 следует вычислимая отделимость a_1 от a_0. Для ν-вычислимо перечислимой отделимости (точная формулировка понятия дана в определении 1.3) это не так. Рассмотрим, например, связное двоеточие, которое реализуем так. Пусть α – вычислимо перечислимое невычислимое подмножество ω, $A = \{a_0, a_1\}$ и $\nu x = a_0$ для $x \in \alpha$, $\nu x = a_1$ для $x \notin \alpha$. Тогда a_0 является ν-вычислимо перечислимо отделимым от a_1, но a_1 не является ν-вычислимо перечислимо отделимым от a_0 и $\mathfrak{S} = \{\{a_0\}\}$ – полное отделяющее семейство для нумерованной алгебры (A, ν) пустой сигнатуры.

Замечание 2. Стр. 148, строка 17 снизу. "Вычислимое семейство отделяющих множеств" – аналогично.

Ответ 2. Вставлен следующий текст:

Если существует вычислимое (в смысле Ю.Л.Ершова, см. [1]) полное семейство $\mathfrak{S}$ отделяющих вычислимо перечислимых множеств для нумерованной алгебры (A, ν) из этого определения, то нумерация называется эффективно отделимой, т.е. вместе с полнотой семейства $\mathfrak{S}$ (каждый элемент которого есть ν-вычислимо перечислимое подмножество множества A) требуется наличие такой нумерации $\mu : \omega \longrightarrow \{\nu^{-1}S | S \in \mathfrak{S}\}$ множества, элементами которого являются полные ν-прообразы элементов из $\mathfrak{S}$, что множество $\{\langle x, y\rangle | y \in \mu x\}$ вычислимо перечислимо. Неформально говоря, имея μ-номер множества из семейства $\nu^{-1}\mathfrak{S}$ мы автоматически располагаем алгоритмом (постовским номером) для перечисления элементов этого множества.

Замечание 3. Стр. 148, строка 14 снизу. "T_0-отделяющее семейство" – аналогично.

Ответ 3. Вставлен следующий текст:

Напомним, что эквивалентность η на ω называется отделимой, если для фактор-пространства ω/η существует полное отделяющее семейство η-замкнутых вычислимо перечислимых множеств $\mathfrak{S}$ (подразумевается естественная проектирующая нумерация $\pi : \omega \longrightarrow \omega/\eta$ фактор-пространства, т.е. $\pi x = x/\eta$).

Аналогично, эквивалентность η называется эффективно отделимой, если существует полное отделяющее семейство η-замкнутых вычислимо перечислимых множеств $\mathfrak{S}$, обладающее вычислимой нумерацией $\mu : \omega \longrightarrow \mathfrak{S}$ (т.е. множество $\{\langle x, y\rangle | y \in \mu x\}$ вычислимо перечислимо). Другими словами, эффективная отделимость эквивалентности η означает, что существует вычислимое полное T_0-отделяющее семейство η-замкнутых вычислимо перечислимых множеств для пространства ω/η.

Важно отметить, что для нумерованной алгебры (A, ν) в качестве элементов полного отделяющего семейства мы рассматриваем ν-вычислимо перечислимые подмножества множества A и в качестве вычислимой нумерации этого семейства выбирается (если она существует) подходящая вычислимая нумерация семейства полных ν-прообразов этих множеств. Для эквивалентности η рассматривается непосредственно полное отделяющее семейство η-замкнутых вычислимо перечислимых множеств и, при условии существования, вычислимая нумерация этого семейства.

Замечание 4. Стр. 148, последняя строка. "Эффективно отделимая алгебра" – не найдено такого определения, найдены "эффективно отделимая нумерация" и "эффективно отделимая эквивалентность". Если имеется в виду вычислимо отделимая нумерованная алгебра – необходимо привести статью к единой терминологии.

Ответ 4. После формулировки теоремы 1.4 вставлено следующее предложение:

Нумерованная алгебра, ядро представления которой отделимо (эффективно отделимо) называется отделимой (соответственно эффективно отделимой).

Замечание 5. Стр. 156, определение 2.13. Не удалось также найти определения "позитивной формулы" ни в статье, ни в рекомендуемых источниках [1–4].

Ответ 5. Перед определением 2.13 вставлено следующее предложение:

Формула называется позитивной, если в ее записи нет знаков отрицания и импликации (см. А.И.Мальцев [24], п.7.4). Заметим, что позитивные формулы устойчивы относительно гомоморфизмов (также [24]).

Замечание 6. Стр. 153, определение 2.13, не понятно, что такое Φ в пункте 3.

Ответ 6. Это описка. Должно быть P, т.е. позитивная формула. Исправлено.

Замечание 7. Стр. 146, строки 6 и 19 снизу, используется понятие вычислимо отделимой нумерации, предлагается его в явном виде привести, в источнике [1] понятие эффективно отделимой нумерации, и кроме того, не является повсеместно используемым в теории вычислимости, известно не всем специалистам.

Ответ 7. Перед 19 снизу строкой вставлено следующее предложение:

Предваряя следующие далее строгие определения будем говорить, что нумерация ν алгебры A вычислимо отделима, если для любых различных $a_0, a_1 \in A$ найдется такое множество (окрестность) A_0 для элемента a_0, что $a_0 \in A_0$, $a_1 \notin A_0$ и полный ν-прообраз множества A_0 (т.е. $\nu^{-1}A_0$) вычислим.

Замечание 8. Стр. 153, формулировка теоремы 2.14, условие 1) – неясно, что такое "**равномерно** вычислимо отделимая алгебра", в определении 1.1 вычислимо отделимой алгебры последовательности нет, которая могла бы стать равномерно вычислимой.

Ответ 8. После определения 1.7 и неформального описания равномерно вычислимо отделимой эквивалентности вставлено определение равномерно вычислимо отделимой нумерованной алгебры (перед замечанием 1.8):

Соответственно, нумерованная алгебра (A, ν) называется равномерно вычислимо отделимой, если существует эффективная процедура, которая для любой пары различных элементов $a_0, a_1 \in A$ "выдает" характеристический индекс такого подходящего вычислимого множества $S \subseteq \omega$, что S является ν-замкнутым (т.е. $x \in S \wedge \nu x = \nu y \Rightarrow y \in S$), $a_0 \in \nu S$ и $a_1 \notin S$.

Замечание 9. Стр. 152, строка 2, рецензенту не известно понятие "равномеризующая функция".

Ответ 9. Переформулировано. Предложение "Более того, равномеризующая функция g едина для всех этих эквивалентностей" заменено на следующее:

"Более того, функция g из определения равномерно вычислимой отделимости едина для всех этих эквивалентностей".

Кроме того, на данном этапе рецензирования были обнаружены следующие менее значительные недочеты и опечатки.

Прочие замечания:

Замечание 1. Название статьи неточно отражает ее содержание. Рецензенту кажется, что название "Равномерно вычислимо отделимые нумерации локально финитно отделимых алгебр" точнее отражало бы полученные результаты.

Ответ 1. Принято частично. Действительно, основным результатом статьи является равносильность свойства иммунности характеристической трансверсали равномерно вычислимо отделимой эквивалентности и свойства локально финитной отделимости всякой алгебры, представимой над этой эквивалентностью. Тем не менее в работе присутствуют важные контрпримеры вычислимо отделимых алгебр, не являющихся равномерными. В последнем пункте вообще показывается, что всякое бесконечное и кобесконечное множество (содержащее число 0) является характеристической трансверсалью вычислимо отделимой (даже с конечными смежными классами) эквивалентности, над которой представимы только финитно аппроксимируемые алгебры. Этот результат совершенно неожиданный и равномерностью тут и не пахнет, т.к. финитная аппроксимируемость всякой алгебры представимой над равномерно вычислимо отделимой эквивалентностью автоматически влечет иммунность характеристической трансверсали. Вношу на рассмотрение рецензента компромиссный вариант по названию: "Вычислимо отделимые нумерации локально финитно отделимых алгебр".

Замечание 2. Автор предлагает использовать источники [1–4] для поиска неопределнных в статье понятий (стр. 144, "Введение"). При этом источники [2,4] не обладают даже алфавитным указателем, что делает их непригодными для поставленной задачи.

Ответ 2. В переработанном варианте статья начинается со слов "С неопределяемыми в статье базовыми понятиями можно ознакомиться в [1,2,3]. Используемые постановки вопросов, идеи и методы восходят к [4,5]". При этом источники [2,4] получили номера [4,5] соответственно.

Замечание 3. Стр. 144, строка 8 снизу. Слова "с неопределяемыми базовыми понятиями" по всей видимости надо заменить на "с неопределяемыми в статье базовыми понятиями". При этом рецензент настоятельно рекомендует, чтобы неопределенными в статье остались лишь общие понятия теории вычислимости и логики.

Ответ 3. Слова "с неопределяемыми базовыми понятиями" заменены на слова "с неопределяемыми в статье базовыми понятиями"

Замечание 4. Стр. 145, строка 3. Два раза подряд слово "всякая".

Ответ 4. Исправлено

Замечание 5. Стр. 146, строка 12. Два раза подряд слово "что".

Ответ 5. Исправлено.

Замечание 6. Стр. 146, строка 17. Опечатка в слове "называется".

Ответ 6. Исправлено.

Замечание 7. Стр. 146, строка 22. Необходимо преформулировать предложение "Среди алгоритмических задач алгебры, в рамках алгоритмической разрешимости...", например, так: "Среди задач, связанных с алгоритмической разрешимостью алгебр...".

Ответ 7. Переформулировано в соответствии с рекомендацией рецензента.

Замечание 8. Стр. 147, строки 4 и 6, понятия продуктивной нумерации и сечения не являются широко распространенными, требуют пояснения при упоминании.

Ответ 8. В указанный рецензентом диапазон вставлено следующее предложение:

При этом, дедекиндово сечение $A|B$ линейного порядка $\langle L; \leqslant \rangle$ (в котором всякий элемент попадает либо в нижний класс A, либо в верхний класс B, причем $A \bigcap B = \emptyset$ и $\forall a \in A \forall b \in B(a \leqslant b)$) называется вычислимым в нумерации ν линейного порядка L, если вычислимо множество $\{x | x \in A\}$ и на множество $\{\langle x, y \rangle | \nu x \leqslant \nu y\}$ налагаются естественные ограничения алгоритмического характера (вычислимость, позитивность, негативность и т.д.). Касательно продуктивности отметим, что семейство вычислимых сечений нумерованного линейного порядка называется продуктивным, если существует эффективная процедура, которая любому вычислимому (в смысле Ю.Л.Ершова, [1]) семейству вычислимых сечений этого порядка сопоставляет (интенсионально, т.е. посредством алгоритма, способа вычисления, характеристического индекса) некоторое вычислимое сечение вне данного семейства. Более детально, семейство $\mathfrak{S}$ вычислимых дедекиндовых сечений вычислимо, если существует такая его нумерация $\mu : \omega \longrightarrow \mathfrak{S}$, что множество $\{\langle x, y \rangle | y \in \mu x\}$ вычислимо (алгоритмически разрешимо) и продуктивность семейства $\mathfrak{D}$ всех вычислимых сечений означает наличие эффективной процедуры "выдающей" для любого вычислимого подсемейства $\mathfrak{S}$ (заданного нумерацией μ) семейства $\mathfrak{D}$ алгоритм разрешения некоторого вычислимого сечения S из $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{S}$.

Замечание 9. Стр. 147, абзац 3, строка 4, опечатка в слове "эквивалентностей".

Ответ 9. Исправлено.

Замечание 10. Стр. 147, абзац 4, строка 2, "обладающих свойств**ом**".

Ответ 10. Исправлено окончание слова.

Замечание 11. Стр. 147, пятый абзац начинается с маленькой буквы, надо переделать текст.

Ответ 11. Текст переделан (начало с большой буквы).

Замечание 12. Стр. 148, определение 1.3 включает в себя определение 1.1. Достаточно одного определения 1.3.

Ответ 12. В определениии 1.3 элиминирован параллельный вариант для вычислимо отделимой нумерации. Определения в скорректированном варианте выглядят так:

Определение 1.1. *Нумерованная алгебра (A, ν) называется вычислимо отделимой, если всякая пара различных ее элементов отделяется подходящим ν-вычислимым множеством.*

Определение 1.3. *Нумерованная алгебра (A, ν) называется отделимой, если всякая пара различных ее элементов отделяется подходящим*

ν-вычислимо перечислимым множеством.

Автор намеренно разнес эти два определения, т.к. несмотря на внешнюю аналогию это принципиально различные понятия. Например, топологическое пространство, порожденное вычислимыми подмножествами вычислимо отделимо нумерованного множества всегда будет T_4-пространством, а пространство порожденное вычислимо перечислимо отделимо нумерованными подмножествами может быть не T_1-пространством. Имеется и масса других кардинальных различий. К тому же в данной работе определение 1.1 играет фундаментальную роль, а определение 1.3 вводится для полноты восприятия ситуации. Строго говоря, можно было вообще не вводить понятие отделимой нумерации, однако это существенно методологически обеднило бы работу в идейном плане.

Вношу на рассмотрение рецензента.

Замечание 13. Стр. 148, строка 6, опечатка в слове "финитно"

Ответ 13. Исправлено.

Замечание 14. Стр. 148, в определении 1.3 в строке 2 слово "если" два раза подряд.

Ответ 14. Исправлено.

Замечание 15. Стр. 153, строка 3 после определения 2.13 – два раза подряд слово "и".

Ответ 15. Исправлено.

Кроме того, в список литературы добавился источник – книга А.И. Мальцева "Алгебраические системы" (М., Наука, 1970), что повлекло перенумерацию ссылок. Координаты исправлений, указанные в первоначальном варианте, изменились в силу незначительного расширения объема статьи.

Автор выражает огромную признательность рецензенту, замечания которого не только позволили существенно улучшить качество восприятия статьи, но и вышли далеко за рамки собственно работы рецензента, способствуя повышению уровня стилистики и грамматики.

С уважением,
Автор