S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.928

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35Q30

О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ, ОКРУЖАЮЩЕЙ ТВЕРДОЕ ТЕЛО

В. Л. СЕННИЦКИЙ

Abstract. A problem is formulated and solved on a flow of a viscous liquid which surrounds a solid cylindrical body and has an external free boundary. The liquid undergoes periodical in time influences which are characterized by the presence or by the absence of a predominant direction in space. The formulation of the problem includes the equation of Navier – Stokes, the equation of continuity and the conditions at the solid and at the free boundaries of the liquid. New hydro-mechanical effects are revealed.

Keywords: viscous liquid, solid body, free boundary, periodical in time influences, predominant direction in space, rotatory motion.

1. Введение

Систематически проводимое изучение динамики гидромеханических систем с идеальной или вязкой жидкостью при периодических по времени воздействиях привело к обнаружению ряда новых гидромеханических эффектов (см., например, [1]—[9], а также [10] и представленную там литературу). В настоящей работе рассматривается задача о движении вязкой жидкости при периодических по времени воздействиях на жидкость со стороны твердого цилиндрического тела, которое пульсирует и совершает вращательное движение. Данная задача обладает существенной особенностью, состоящей в том, что испытываемые жидкостью воздействия могут характеризоваться как наличием, так и отсутствием выделенного направления в пространстве. Выявлены новые гидромеханические эффекты. В частности, обнаружен эффект, состоящий в том,

Sennitskii, V.L., On a flow of a liquid surrounding a solid body.

Поступила 1 мая 2023 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

что (на фоне колебаний) часть жидкости совершает стационарное вращательное движение в направлении, противоположном направлению среднего (по времени) вращения твердого тела.

2. Постановка задачи

Имеются несжимаемая вязкая жидкость и находящееся в ней твердое тело Ξ — бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса A. Ось тела Ξ находится на оси Z инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Тело Ξ совершает вращательное движение вокруг оси Z с угловой скоростью Ω. Ралиус A и угловая скорость Ω заданным образом периодически с периодом T изменяются со временем t (среднее значение угловой скорости Ω может быть как отличным от нуля, так и равным нулю). Жидкость занимает область $Q: A < R < B,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ -\infty < Z < \infty$ ($R = \sqrt{X^2 + Y^2},\ \theta,\ Z$ — цилиндрическая система координат; B — функция t , связанная с радиусом A условием постоянства разности $B^2 - A^2$). Жидкость граничит с твердым телом Ξ и с пустотой (твердая граница Γ_{s} и свободная граница Γ_{f} жидкости характеризуются соотношениями $R = A,\ R = B;\ 0 \leq \theta < 2\pi;\ -\infty < Z < \infty$).

Требуется определить периодическое по времени осесимметричное, плоское движение жидкости со свободной границей, обусловленное испытывемыми жидкостью воздействиями со стороны находящегося в ней твердого тела.

Пусть $\tau = t/T;\ 0 \leq \varepsilon < 1$ — параметр; $g = \sin 2\pi\tau;\ h = \sin(2\pi\tau + \varphi)$ (φ — постоянная); $a = A/\widehat{A} = 1 + \varepsilon g$ ($\widehat{A} > 0$ — постоянная, значение A при $\varepsilon = 0$ (значение A в отсутствие пульсаций тела Ξ)); $\widehat{B}$ — постоянная, значение B при $\varepsilon = 0$; $\varkappa = \widehat{B}/\widehat{A}$; $b = B/\widehat{B} = \sqrt{a^2 + \varkappa^2 - 1}/\varkappa$; $\omega = \Omega T = \widehat{\omega}\,[h + \varepsilon(\varkappa - 1)s]$ ($\widehat{\omega} > 0,\ s$ — постоянные); σ, ρ и ν — соответственно коэффициент поверхностного натяжения, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости; $Re = \widehat{A}^2/(\nu T)$ — число Рейнодьдса; $r = R/\widehat{A}$; $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$ — единичные векторы, направления которых совпадают с направлениями возрастания соответственно r и θ; $\mathbf{V}$ — скорость жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/\widehat{A} = v_r(r,\tau)\mathbf{e}_r + v_\theta(r,\tau)\mathbf{e}_\theta$; P — давление в жидкости; $p = T^2 P/(\rho \widehat{A}^2) = p(r,\tau)$; $\lambda = \sigma T^2/(\rho \widehat{A}^3)$.

Задачу о движении жидкости составляют уравнение Навье–Стокса, уравнение неразрывности и условия на твердой и свободной границах жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{v}; \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \tag{2}$$

$$v_r = \frac{da}{d\tau}, \qquad v_\theta = \omega a \qquad \text{при } r = a; \tag{3}$$

$$v_r = \varkappa \frac{db}{d\tau}, \quad p - \frac{2}{Re}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\lambda}{\varkappa b} = 0, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = 0 \qquad \text{при } r = \varkappa b. \tag{4}$$

Отметим, что в задаче (1)—(4) испытываемые жидкостью периодические по времени воздействия со стороны тела Ξ при $s \neq 0$ характеризуются наличием, а при $s = 0$ — отсутствием выделенного направления в пространстве.

3. Решение задачи

Согласно (2)—(4) имеем

$$v_r = w/r, \tag{5}$$

где

$$w = a(da/d\tau) = \varkappa^2 b(db/d\tau).$$

Из (1)—(5) следует

$$p = \frac{\lambda}{\varkappa b} - \frac{2}{Re}\frac{d}{d\tau}\ln b - \frac{dw}{d\tau}\ln\frac{r}{\varkappa b} + w^2\ \frac{r^2 - \varkappa^2 b^2}{2\varkappa^2 b^2 r^2}\ + \int_{\varkappa b}^{r}\frac{{v_\theta}^2}{r'}dr'; \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}\ r^2\ \frac{\partial v_\theta}{\partial \tau}\ =\ r^2\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + (1 - \mathrm{Re}\ w)\ r\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - (1 + \mathrm{Re}\ w)\ v_\theta; \tag{7}$$

$$v_\theta = \omega a \qquad \text{при } r = a; \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = 0 \qquad \text{при } r = \varkappa b. \tag{9}$$

Будем рассматривать задачу(7)—(9) при малых по сравнению с единицей значениях ε. Применим метод разложения по степеням малого параметра [11], [12] . Предположим, что

$$v_\theta \sim v_0 + \varepsilon v_1 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Используя (7)—(10), в ε^N-приближении ($N = 0, 1$) получим

$$\mathrm{Re}\ r^2\ \frac{\partial v_N}{\partial \tau} - r^2\ \frac{\partial^2 v_N}{\partial r^2} - r\frac{\partial v_N}{\partial r} + v_N = -N\mathrm{Re}\frac{dg}{d\tau}(r\frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0); \tag{11}$$

$$v_N = (1 - N)\widehat{\omega} h + N[g(\widehat{\omega} h - \frac{\partial v_0}{\partial r}) + \widehat{\omega}(\varkappa - 1)s] \qquad \text{при } r = 1; \tag{12}$$

$$\frac{\partial v_N}{\partial r} - \frac{v_N}{r} = -N\frac{g}{\varkappa r^2}(r^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} - r\frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0) \qquad \text{при } r = \varkappa. \tag{13}$$

Пусть $N = 0$. Задача (11)—(13) имеет решение

$$v_0 = \widehat{\omega}\mathrm{Imag}[e^{i(2\pi\tau + \varphi)}\frac{I_2(q\varkappa)K_1(qr) + K_2(q\varkappa)I_1(qr)}{Q_1}], \tag{14}$$

где $q = (1 + i)\sqrt{\pi \mathrm{Re}}$; I_1, I_2, K_1, K_2 — модифицированные функции Беселя;

$$Q_1 = I_2(q\varkappa)K_1(q) + K_2(q\varkappa)I_1(q).$$

Пусть $N = 1$. Произведем усреднение (11)—(13) по безразмерному времени τ. В результате этого получим

$$r^2\frac{d^2\bar{v}}{dr^2} + r\frac{d\bar{v}}{dr} - \bar{v} = \mathrm{Re}\left\langle\frac{dg}{d\tau}(r\frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0)\right\rangle; \tag{15}$$

$$\bar{v} = \left\langle g(\widehat{\omega} h - \frac{\partial v_0}{\partial r})\right\rangle + \widehat{\omega}(\varkappa - 1)s \qquad \text{при } r = 1; \tag{16}$$

$$\frac{d\bar{v}}{dr} - \frac{\bar{v}}{r} = -\frac{1}{\varkappa r^2}\left\langle g(r^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} - r\frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0)\right\rangle \qquad \text{при } r = \varkappa. \tag{17}$$

Здесь $\langle ... \rangle = \int_{\tau}^{\tau+1} ... \, d\tau'$; $\bar{v} = \langle v_1 \rangle$. Задача (11)—(13) имеет решение

$$v_1 = \bar{v} + \text{Real } (\tilde{v} e^{4\pi i \tau}), \tag{18}$$

где $\tilde{v}$ — функция r.

Из (15)—(17) следует

$$\bar{v} = \widehat{\omega}\ [\cos\varphi + (\varkappa - 1)s + \frac{1}{2}\text{Real } \frac{e^{i\varphi} q Q_2}{Q_1}]r$$
$$- \frac{1}{2}\pi\text{Re } \widehat{\omega} \text{ Imag } \{\frac{e^{i\varphi}}{Q_1}[I_2(q\varkappa)G_K + K_2(q\varkappa)G_I]\}. \tag{19}$$

Здесь

$$Q_2 = I_2(q\varkappa)K_0(q) - K_2(q\varkappa)I_0(q);$$

$$G_I = I_1(qr) - I_1(q)r - qr\int_1^r \frac{I_0(qr')}{r'}\, dr';$$

$$G_K = K_1(qr) - K_1(q)r + qr\int_1^r \frac{K_0(qr')}{r'}\, dr'$$

(I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя).

Формулами

$$v_\theta = v_0 + \varepsilon v_1 \tag{20}$$

и (5), (6), (14), (18), (19) определяется приближенное решение задачи (1)—(4). Данное решение, в частности, свидетельствует о наличии ряда (происходящих на фоне колебаний) необычных стационарных вращательных течений жидкости.

Обратимся к вопросу о среднем по времени движении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях $\varkappa - 1$.

Пусть $\chi = (\varkappa - r)/(\varkappa - 1)$. Используя (5), (14), (18)—(20), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \varepsilon\widehat{\omega}[s - \pi\text{Re}(\sin\varphi)\chi](\varkappa - 1)\mathbf{e}_\theta \qquad \text{при } \varkappa - 1 \to 0. \tag{21}$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении безразмерная скорость $\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{e}_\theta$ совпадает с безразмерной средней по времени угловой скоростью вращения жидкости вокруг оси Z.

Согласно (21) (на фоне колебаний) при любом значении $Re > 0$ имеет место следующее. Если $s \neq 0$, то при $\chi \sin\varphi = 0$ (то есть при $\sin\varphi = 0,\ 1 \leq r < \varkappa$ и при $r = \varkappa,\ -1 \leq \sin\varphi \leq 1$) средняя (по времени) угловая скорость вращения жидкости равна (отличной от нуля) средней угловой скорости вращения тела Ξ. Если $s\sin\varphi < 0$, то при $1 \leq r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ, при том что для $1 \leq r < \varkappa$ жидкость «обгоняет» твердое тело. Если $s\sin\varphi > 0$, и $|s| > \pi\text{Re}|\sin\varphi|$, то при $1 \leq r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ, при том что для $1 \leq r < \varkappa$ жидкость «отстает» от твердого тела. Если $s\sin\varphi > 0$, и $|s| < \pi\text{Re}|\sin\varphi|$, то при $r = r^* = \varkappa - (\varkappa - 1)s/(\pi\text{Re}\sin\varphi)$) угловая скорость жидкости равна нулю; при $r^* < r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ , при том что для $r^* < r < \varkappa$ жидкость «отстает» от твердого тела; при $1 \le r < r^*$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению среднего вращения тела Ξ; для $s = \pi \mathrm{Re} \sin\varphi$ выполняется: $r^* = 1$, и угловая скорость жидкости равна нулю при $r = 1$. Если $s = 0$ то при $1 \le r < \varkappa$ направление вращения жидкости определяется знаком $\sin\varphi$ (при $\sin\varphi < 0$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением вектора $\mathbf{e}_\vartheta$, при $\sin\varphi > 0$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению вектора $\mathbf{e}_\vartheta$); при $r = \varkappa$ угловая скорость вращения жидкости равна нулю.

Отметим, что при $s\sin\varphi > 0,\ |s| < \pi$ Re $|\sin\varphi|$ для больших значений Re $|\sin\varphi|$ разность $\varkappa - r^*$ является малой по сравнению с разностью $\varkappa - 1$, что соответствует наличию такого движения жидкости, что (на фоне колебаний) в «очень тонкой области» $r^* < r \le \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ, а в «основной области» $1 \le r < r^*$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению среднего вращения твердого тела.

4. Заключение

Проведенное исследование привело к обнаружению новых эффектов необычного, парадоксального движения жидкости при периодических по времени воздействиях. Рассмотрено поведение вязкой жидкости, обусловленное как воздействиями, характеризующимися наличием выделенного направления в пространстве, так и воздействиями, характеризующимися отсутствием такого направления. Из представленного в работе следует, что воздействия, не имеющие выделенного направления в пространстве, могут порождать качественные изменения в движении жидкости, по достигаемому влиянию на динамику гидромеханических систем такие воздействия способны эффективно конкурировать, например, со стационарными воздействиями на системы (см. также [9, 10]).

Результаты настоящей работы могут использоваться, в частности, при создании гидромеханических систем, обладающих предписанными свойствами, например, систем, заданным образом реагирующих на периодические по времени воздействия.

References

[1] B.A. Lugovtsov, V.L. Sennitskii, *On the motion of a body in a vibrating liquid*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **289**:2 (1986), 314–317.

[2] V.L. Sennitskii, *The predominantly unidirectional motion of a gas bubble in a vibrating liquid*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **319**:1 (1991), 117—119.

[3] V.L. Sennitskii, *On the motion of an inclusion in a uniformly and a non-uniformly oscillating liquid*, Appl. Mech. and Tech. Phys., **48**:1 (2007), 79—85.

[4] O.S. Pyatigorskaya, V.L. Sennitskii, *An example of the motion of a cylindrical solid body in a viscous liquid*, Appl. Mech. and Tech. Phys., **54**:2 (2013), 81—87.

[5] O.S. Pyatigorskaya, V.L. Sennitskii, *On the motion of solid particles in an oscillating liquid* , Appl. Mech. and Tech. Phys. **54**:3 (2013), 74—77.

[6] V.L. Sennitskii, *On a prescribed orientation of a solid inclusion in a viscous liquid*, Siberian Journ. of Indust. Math. **18**:1 (2015), 123—128.

[7] V.L. Sennitskii *The predominantly unidirectional rotation of a soloid body and a viscous liquid*, Siberian Journ. of Indust. Math. **20**:2 (2017), 93—97. DOI: 10.17377/sibjim.2017.20.210 .

[8] V.V. Konovalov, T.P. Lyubimova, *A numerical investigation of an action of vibrations on the interaction in an ensemble of gas bubbles and solid particles in a liquid* , Computational continuum mechanics, **12**:1 (2019), 48—56. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.1.5 .
[9] V.L. Sennitskii, *On peculiarities of a liquid flow in a gravity field*, Siberian Electronic Mathematical Reports **19**:1 (2022), 241—247. DOI: 10.33048/semi.2022.19.018 .
[10] V.L. Sennitskii, *A paradoxical motion of a liquid*, Intern. Journ. of Appl. and Fundam. Investigations, 2017, No. 8-1, 28—33. DOI: 10.17513/mjpfi.11753 .
[11] N.M. Krilov, N.N. Bogolyubov, *Introduction into a non-linear mechanics*, Moskva-Ijevsk: SPC Regular and Chaotic Dynamics, 2004, 352 p.
[12] N.N. Bogolyubov, Yu.A. Mitropolskiy *Asymptotic metods in the theory of non-linear oscillations*, M: GIF-ML, 1958, 408 p.

Vladimir Leonidovich Sennitskii
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
pr. acad. Lavrentyeva, 15,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: sennitskii@yandex.ru