S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том XX, стр. 1–17 (20XX) УДК 519.65
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 65T60

К МЕТОДУ НЕПОЛНОЙ РЕДУКЦИИ СПЛАЙНОВЫХ ВЕЙВЛЕТОВ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Б.М. Шумилов

Abstract. The purpose of this paper is to explore the application of the first two vanishing moments for creating fifth-degree spline-wavelets. The focus is on the system of basic spline wavelets that possess a smoothness level of C^4 and satisfy the conditions of orthogonality to all first-degree polynomials. We also consider the case of splines with homogeneous Dirichlet boundary conditions of the second order and derive an algorithm for the wavelet transform. This algorithm is presented in the form of a solution of a five-diagonal system of linear algebraic equations, which strictly adheres to diagonal dominance. Finally, we showcase the results of a numerical experiments on data processing.

Keywords: *B*-splines, wavelets, polynomials orthogonality.

1. Введение

Сплайн-вейвлеты – это новый подход к построению базиса для сплайнов, который сочетает в себе преимущества вейвлетов и свойства сплайнов [1], [2, стр. 16], позволяя строить базисы с хорошо определенными свойствами и эффективно обрабатывать данные. В частности, в случае полуортогонального вейвлет-базиса они имеют компактные носители, что приводит к использованию разреженных матриц и, следовательно, к более быстрым алгоритмам восстановления сплайн-кривых [3]. Однако, поскольку матрицы прямого преобразования не имеют свойства диагонального преобладания, это затрудняет обработку длинных временных рядов. Биортогональные вейвлеты [4] могут решить эту проблему, но они имеют такой недостаток, как потеря информации по краям изображения при вычислении коэффициентов разложения [5]. По этой

Shumilov, B.M., To the method of incomplete reduction of fifth-degree spline wavelets.

© 2020 Шумилов Б.М..

Поступила 1 января 2020 г., опубликована 31 декабря 2020 г.

причине рекомендуется использовать интерполирующие вейвлеты [6] вместо ортогональных вейвлетов, но и они имеют недостатки при обработке измерительной информации. Например, с точки зрения уменьшения шума данных значения функции вообще не фильтруются, представляя род прореживания данных. В целом, сплайн-вейвлеты представляют собой мощный инструмент для анализа и обработки данных, особенно в области обработки изображений и сигналов. Однако, выбор конкретного типа вейвлета или сплайна зависит от конкретной задачи и требуемых свойств базисных функций.

Характерным свойством полуортогональных вейвлетов является то, что вейвлет-разложение обеспечивает наилучшее среднеквадратическое приближение сплайнов на густой сетке посредством сплайнов на прореженной сетке [7]. Это свойство дает преимущество при сжатии дискретной числовой информации. Однако проблемой остается факт довольно больших носителей полуортогональных сплайн-вейвлетов по сравнению с построением сплайн-вейвлетов с несколькими первыми моментами, равными нулю [8]. Поскольку полуортогональные вейвлеты также имеют нулевые моменты, идея сокращения носителей вейвлетов путем замены свойства ортогональности для пространства сплайнов на прореженной сетке ортогональностью для степенных многочленов кажется привлекательной. Действительно, с точки зрения скорости приближения гладких функций [9, стр. 52, 156], эти два типа вейвлетов эквивалентны, а ортогональность многочленам обеспечивает локально максимальное "сходство" с наилучшим среднеквадратическим приближением. В то же время в статистических приложениях ортогональность многочленам высокой степени не требуется [10], в отличие, например, от задачи численного дифференцирования [11, 12]. Это обеспечивает бо́льшую универсальность неортогонального подхода.

С другой стороны, в работах автора [13, 14] был исследован случай кубических вейвлетов Эрмита, ортогональных всем многочленам третьей степени. Был предложен оригинальный метод неполной редукции системы уравнений вейвлет-преобразования Эрмита на параллельное решение двух тридиагональных систем линейных уравнений вчетверо меньшей размерности со строгим диагональным преобладанием. Попытка применения указанного подхода к эрмитовым сплайнам пятой степени привела к четыре-диагональным матрицам [15], работа с которыми затруднена необходимостью обоснования и применения встречных прогонок.

Вейвлет-преобразование на основе сплайнов Эрмита имеет свои недостатки. Во-первых, в задаче обработки измерительной информации необходимо сначала вычислить приближенные значения производных в узлах наиболее густой сетки с приемлемой точностью [16], и только затем могут применяться алгоритмы вейвлет-преобразования. Во-вторых, с точки зрения сжатия данных количество вейвлет-коэффициентов в этом случае больше, чем в методах, основанных на B-сплайнах. Поэтому далее в разделе 3 рассматривается идея использования неполной редукции для случая вейвлет-преобразования неэрмитовых сплайнов пятой степени. Достоинствами нового алгоритма являются его свойство устойчивости и простота использования в программах, поскольку на каждом масштабе вейвлет-разложения решается вдвое укороченная система линейных уравнений с матрицей, имеющей строгое диагональное преобладание.

Неполная редукция матрицы вейвлет-преобразования была независимо использована в [12] для доказательства обратимости матрицы; однако там не было представлено четких указаний на то, что это может быть полезно при вычислениях на практике.

2. Построение неэрмитовых сплайн-вейвлетов пятой степени с двумя нулевыми моментами на конечном отрезке

2.1. **Основные определения.** Пусть V_L обозначает пространство сплайнов пятой степени гладкости C^4 на отрезке $[a,b]$ с равномерной сеткой, состоящей из узлов $\Delta^L : x_i = a + hi$, $i = 0, 1, \ldots, 2^L$, $h = (b-a)/2^L$, а базисные функции $\varphi_5(v-i)\forall i$, где $v = (x-a)/h$, образованы посредством сжатий и смещений функции вида [17, стр. 89]:

$$\varphi_5(t) = \frac{1}{120}\sum_{j=0}^{6}\binom{6}{j}(-1)^j(t-j)_+^5,$$

где $t_+^n = (\max\{t,0\})^n$. Известно [2, стр. 91], что эта функция удовлетворяет калибровочному соотношению:

$$\varphi_5(t) = \frac{1}{32}\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\varphi_5(2t-k). \tag{1}$$

Суть вейвлет-преобразования можно сформулировать следующим образом: оно позволяет иерархически разложить заданную функцию на ряд грубых приближенных представлений V_{L-1} и локальных уточняющих деталей $W_{L-1} = V_L - V_{L-1}$. Ясно, что при этом должно выполняться условие дополнения размерностей рассматриваемых пространств, т.е.

$$\mathrm{Dim}(V_L) = \mathrm{Dim}(V_{L-1}) + \mathrm{Dim}(W_{L-1}).$$

Кроме этого, мы должны сохранить симметрию расширенной функции на конечном интервале. Для этого необходимо расположить базисы так, чтобы их расположение было симметричным относительно центра интервала.

Пусть для построения базиса в W_{L-1} используются вейвлеты пятой степени, ортогональные всем многочленам первой степени [8],

$$w_{51}(t) \;=\; \frac{1}{32}\left(\varphi_5(2t) - 2\varphi_5(2t-1) + \varphi_5(2t-2)\right). \tag{2}$$

Легко проверить, что у них имеется два нулевых момента

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k w_{51}(x)dx = 0,\; k = 0, 1.$$

В отличие от случая полуортогональных сплайн-вейвлетов, у которых центры носителей располагаются в четных узлах, имея в виду желаемое свойство алгоритмов редукции, будем располагать центры носителей вейвлетов $w_{51}(v-i)$ со сдвигом – в нечетных узлах $j = 5, 7, ..., 2^L - 5$, получив в результате $2^{L-1} - 4$ степени свободы. Для обсуждения числа граничных вейвлетов подсчитаем сначала количество базисных сплайнов $\varphi_5(v-i)$, $i = 0, 1, ..., 2^L - 6$, полностью вложенных в интервал $[a,b]$, чтобы получить в результате $2^L - 5$ степеней свободы. Если сетка Δ^{L-1}, $L \geq 4$, получается из Δ^L удалением каждого второго узла, то соответствующие базисные функции $\varphi_5(v/2 - i)\forall i$, носители которых вдвое шире и центры в четных узлах сетки Δ^L, обеспечивают $2^{L-1}-5$ степеней свободы во вложенном пространстве V_{L-1}. Поскольку разность степеней свободы в обоих масштабах должна быть равна числу добавленных вейвлетов, $\mathrm{Dim}(W_{L-1}) = 2^{L-1}$, для получения вложенного масштаба разложения необходимо четыре граничных вейвлета и четыре граничных базисных сплайна. Напомним, что полная размерность V_L равна 2^L+5. Поэтому, чтобы аргумент о вложенном разложении был верен, мы должны пренебречь шестью степенями свободы в каждом масштабе сплайн-аппроксимации. Для этого будем накладывать дополнительные граничные условия Дирихле второго рода [12]: $f(a) = f'(a) = f''(a) = f(b) = f'(b) = f''(b) = 0$. Это предложение соответствует конструктивному подходу [18] использования кратных узлов по концам отрезка $[a,b]$. Тогда две крайние левые базисные функции отличаются от $\varphi_5(t)$, и они удовлетворяют калибровочным соотношениям [12]

$$
\begin{aligned}
\varphi_{b1}(t) &= \frac{1}{16}\varphi_{b1}(2t) + \frac{137}{384}\varphi_5(2t) + \frac{37}{64}\varphi_5(2t-1) + \frac{59}{128}\varphi_5(2t-2) + \\
&\quad + \frac{3}{16}\varphi_5(2t-3) + \frac{1}{32}\varphi_5(2t-4), \\
\varphi_{b2}(t) &= \frac{1}{8}\varphi_{b2}(2t) + \frac{25}{48}\varphi_{b1}(2t) + \frac{625}{1152}\varphi_5(2t) + \frac{15}{64}\varphi_5(2t-1) + \\
&\quad + \frac{5}{128}\varphi_5(2t-2).
\end{aligned} \tag{3}
$$

На правом конце отрезка базисные функция представляют зеркальные отражения функций $\varphi_{b1,b2}(t)$. В результате на сетке Δ^L, $L \geq 3$, сплайн пятой степени можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
S^L(v) &= C^L_{-2}\varphi_{b2}(v) + C^L_{-1}\varphi_{b1}(v) + \sum_{i=0}^{2^L-6} C^L_i \varphi_5(v-i) + \\
&\quad + C^L_{2^L-5}\varphi_{b1}(2^L - v) + C^L_{2^L-4}\varphi_{b2}(2^L - v), 0 \leq v \leq 2^L, \\
&\quad \mathrm{Dim}(V_L) = 2^L - 1,
\end{aligned} \tag{4}
$$

где коэффициенты $C^L_i \forall i$ являются решением, например, следующей интерполяционной задачи:

$$S^L(i) = y_i = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, 2^L - 1.$$

Введя обозначение для вектора, состоящего из коэффициентов сплайна $C^L = \left[C^L_{-2}, C^L_{-1}, C^L_0, \dots, C^L_{2^L-4}\right]^T$, запишем предыдущие равенства в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \frac{1775}{36} & \frac{163}{12} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{280}{9} & \frac{179}{3} & 26 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{5}{4} & \frac{103}{4} & 66 & 26 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & 26 & 66 & 26 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 26 & 66 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 26 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \cdot C^L = 120 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2^L-1} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Здесь каждый следующий столбец получается из предыдущего столбца сдвигом вправо и вниз на одну позицию, а последние два столбца центросимметричны [19] по отношению к двум первым столбцам; незаполненные позиции столбцов равны нулю.

В качестве граничных вейвлетов для построения базиса в W_{L-1} далее используются вейвлеты пятой степени, ортогональные всем многочленам первой степени [8],

$$w_{b1}(t) = \frac{1}{32}\left(42\varphi_{b1}(2t) - 65\varphi_5(2t)(2t) + 30\varphi_5(2t-1)\right), \tag{6}$$

$$w_{b2}(t) = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{2}\varphi_{b2}(2t) - \frac{36}{65}\varphi_{b1}(2t) + \frac{5}{39}\varphi_5(2t-1)\right). \tag{7}$$

У них, соответственно, по два нулевых момента

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k w_{b1}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w_{b2}(x)dx = 0,\ k = 0, 1.$$

2.2. **Построение блока фильтров.** Запишем базисные сплайн-функции в виде однострочной матрицы,

$$\begin{aligned} \varphi^L(\cdot) &= [\varphi_{b2}(\cdot), \varphi_{b1}(\cdot), \varphi_5(\cdot), \varphi_5(\cdot - 1), \dots \\ &\quad \dots, \varphi_5(\cdot - 2^L + 6), \varphi_{b1}(2^L - \cdot), \varphi_{b2}(2^L - \cdot)]. \end{aligned}$$

Тогда формула (4) принимает векторный вид

$$S^L(\cdot) = \varphi^L(\cdot)C^L.$$

Точно так же мы можем записать базисные вейвлет-функции с центрами в нечетных целых числах в виде матрицы-строки

$$\begin{aligned} \psi^{L-1}(\cdot) &= [w_{b2}(\cdot), w_{b1}(\cdot), w_{51}(\cdot - 1), w_{51}(\cdot - 3), \dots \\ &\quad \dots, w_{51}(\cdot - 2^L + 9), w_{b1}(2^L - \cdot), w_{b2}(2^L - \cdot)]. \end{aligned}$$

Соответствующие вейвлет-коэффициенты аппроксимации на масштабе L обозначим через

$$D_i^{L-1},\ i = -2, -1, 0, \dots, 2^{L-1} - 3,$$

и введем вектор-столбец

$$D^{L-1} = \left[D_{-2}^{L-1}, D_{-1}^{L-1}, D_0^{L-1}, \dots, D_{2^{L-1}-3}^{L-1}\right]^T.$$

Поскольку пространства V_{L-1} и W_{L-1} по определению являются подпространствами V_L, можно представить функции $\varphi^{L-1}(\cdot)$ и $\psi^{L-1}(\cdot)$ в виде линейных комбинаций функций $\varphi^L(\cdot)$:

$$\varphi^L(\cdot) = \varphi^L(\cdot)P^L \text{ и } \psi^{L-1}(\cdot) = \varphi^L(\cdot)Q^L,$$

где столбцы матрицы P^L составлены из коэффициентов соотношений (1) и (3), поскольку каждая широкая базисная функция в интервале аппроксимации может быть построена из семи узких базисных функций, а каждая широкая базисная функция на концах интервала может быть построена из пяти либо шести узких базисных функций; элементы столбцов матрицы Q^L составлены из коэффициентов соотношений (2), (6), (7).

Следовательно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \varphi^L(\cdot)C^L = {} & \varphi^{L-1}(\cdot)C^{L-1} + \psi^{L-1}(\cdot)D^{L-1} = \\ = {} & \varphi^L(\cdot)P^L C^{L-1} + \varphi^L(\cdot)Q^L D^{L-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть известны коэффициенты C^{L-1} и D^{L-1}. Тогда коэффициенты C^L могут быть получены из C^{L-1} и D^{L-1} следующим образом

$$C^L = P^L C^{L-1} + Q^L D^{L-1}$$

или, используя обозначения для блочных матриц,

$$C^L = \left[P^L \mid Q^L\right] \left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}}\right]. \tag{9}$$

Определим блочную матрицу, обратную матрице $\left[P^L \mid Q^L\right]$:

$$\left[\frac{A^L}{B^L}\right] = \left[P^L \mid Q^L\right]^{-1}.$$

Тогда процесс создания версии с грубым разрешением, C^{L-1}, характеризуемой меньшим количеством коэффициентов, можно выразить матричным равенством

$$C^{L-1} = A^L C^L,$$

где A^L – матрица размерности $\left(2^{L-1}-1\right) \times \left(2^L - 1\right)$. В этом случае потерянные части собираются в другом векторе D^{L-1}, определяемом выражением

$$D^{L-1} = B^L C^L,$$

где B^L – матрица размерности $2^{L-1} \times \left(2^L - 1\right)$. Матрицы A^L и B^L называются фильтрами анализа, а матрицы P^L и Q^L – фильтрами синтеза [18, стр. 95].

Процедура разбиения коэффициентов C^L на грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} может быть применена рекурсивно к самой этой части C^{L-1}. Следовательно, начальные коэффициенты могут быть представлены в виде иерархии грубых версий $C^3, C^4, ..., C^{L-1}$ и уточнений $D^3, D^4, ..., D^{L-1}$. Подобный рекурсивный процесс называется блок-фильтром [18, стр. 95]. И обратно, коэффициенты C^L можно восстановить из свернутой последовательности $C^3, D^3, D^4, ..., D^{L-1}$. Кроме того, по значениям вейвлет-коэффициентов $D^j, j = 3, 4, ..., L-1$, можно судить о значимости соответствующих деталей уточнения. Незначимые детали удаляются с целью сжатия информации.

Из представлений (1) – (3), (6), (7) видно, что матрицы $\left[P^L \mid Q^L\right]$ разрежены. Однако, матрицы, обратные к $\left[P^L \mid Q^L\right]$, теряют разреженную структуру. Суть подхода, предложенного в [18, стр. 96] для таких случаев, заключается в том, что C^{L-1} и D^{L-1} могут быть вычислены из C^L путем решения системы линейных уравнений (9). Более того, было предложено преобразовать матрицу $\left[P^L \mid Q^L\right]$ в ленточную матрицу $\left[P^L \mid Q^L\right]'$, изменив порядок неизвестных так, чтобы столбцы матриц P^L и Q^L чередовались. В нашем случае результирующая система уравнений выглядит следующим образом:

$$\left[P^L \mid Q^L\right]' = \frac{1}{32} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{36}{65} & \frac{50}{3} & 42 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{625}{36} & -65 & \frac{137}{12} & 0 & 1 & \cdots \\ \frac{5}{39} & \frac{15}{2} & 30 & \frac{37}{2} & 1 & 6 & \ddots \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 & \frac{59}{4} & -2 & 15 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 20 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{10}$$

причем каждые следующие два столбца получаются сдвигом двух предыдущих столбцов вправо и вниз на две позиции, а последние пять столбцов центросимметричны по отношению к первым столбцам.

Таким образом, операция вейвлет-разложения может выполняться без явного представления и использования блока фильтров. Тем не менее, хотя разрешимость полученной системы гарантируется линейной независимостью базисных функций, вопрос о ее хорошей обусловленности остается открытым. Например, система не имеет диагонального преобладания, что может усложнить вейвлет-анализ данных большого размера.

3. Алгоритм с применением редукции

Мы будем следовать методу неполной редукции [20, Гл.IV, §3], изученному в [14], для того, чтобы разделить систему (14) на четные и нечетные строки.

Пусть для масштабов $L \geq 4$ матрица G^L размера $\left(2^L-1\right) \times \left(2^L-1\right)$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
-\frac{36}{65} & 1 & 42 & 14628 & 0 & -48 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & -65 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{5}{39} & \frac{23575}{50412} & 30 & 48585 & 1 & 3078 & 0 & 1 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\
0 & \frac{325}{16804} & 0 & 21645 & 1 & 9257 & 1 & 28 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 780 & 0 & 3824 & 1 & 70 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 137 & 0 & 28 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix},$$

тогда как матрица R^L той же размерности имеет вид:

$$\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1040}{4201} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \frac{130}{4201} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \frac{625}{75618} & 1 & 274 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1560 & 0 & -24 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \frac{325}{16804} & 0 & 11505 & 1 & 1878 & 0 & 1 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 274 & 0 & 0 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 780 & 0 & 2043 & 1 & 15 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 137 & 0 & 15 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}.$$

Лемма 1. *Для любого масштаба $L \geq 4$, матрица вейвлет-разложения неэрмитовых сплайнов пятой степени удовлетворяет равенству*

$$32\left[P^L \mid Q^L\right]' R^L = G^L. \tag{11}$$

Доказательство. В силу конечного числа ненулевых элементов в каждой строке и в каждом столбце перемножаемых матриц доказательство выполняется непосредственной проверкой. □

Обозначим T ортогональную матрицу, соответствующую указанной в (10) перестановке столбцов. Тогда справедливо представление [21]

$$\left[P^L \mid Q^L\right]' = \left[P^L \mid Q^L\right] T. \tag{12}$$

Из соотношений (11), (12) мы находим

$$[P^L \mid Q^L]^{-1} = T\left([P^L \mid Q^L]'\right)^{-1} = 32TR^L\left(G^L\right)^{-1}. \tag{13}$$

Таким образом, вместо того, чтобы непосредственно решать систему вида (9), мы можем решить систему

$$G^L \Xi^L = C^L \tag{14}$$

относительно значений Ξ^L и после этого просто вычислить значения C^{L-1} и D^{L-1} с использованием обратной перестановки неизвестных

$$\left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}}\right] = 32TR^L\Xi^L. \tag{15}$$

Тем не менее, нам еще нужно разделить систему (14) на четные и нечетные строки, чтобы свести алгоритм к решению пятидиагональной системы уравнений, обеспечив строгое диагональное преобладание, что предпочтительно для устойчивости вычислений.

Воспользовавшись тем, что в каждой четной строке матрицы G^L содержится лишь один ненулевой элемент, будем начинать процедуру решения системы (14) с вычисления четных неизвестных из явных выражений:

$$\frac{C_i^L}{\xi_i} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = -2, 2^L-4; \\ -65, & i = 0, 2^L-5; \\ -2, & i = 2, 4, \ldots, 2^L-6. \end{cases}$$

После подстановки найденных значений в (14) решается система линейных уравнений относительно нечетных неизвестных:

$$\begin{aligned}
\xi_{-1} + 14628\xi_1 - 48\xi_3 &= C_{-1}^L + \frac{36}{65}\xi_{-2} - 42\xi_0, \\
\frac{23575}{50412}\xi_{-1} + 48585\xi_1 + 3078\xi_3 + \xi_5 &= C_1^L - \frac{5}{39}\xi_{-2} - 30\xi_0 - \xi_2, \\
\frac{325}{16804}\xi_{-1} + 21645\xi_1 + 9257\xi_3 + 28\xi_5 + \xi_7 &= C_3^L - \xi_2 - \xi_4, \\
780\xi_1 + 3824\xi_3 + 70\xi_5 + 28\xi_7 + \xi_9 &= C_5^L - \xi_4 - \xi_6, \\
137\xi_3 + 28\xi_5 + 70\xi_7 + 28\xi_9 + \xi_{11} &= C_7^L - \xi_6 - \xi_8, \\
\xi_{i-4} + 28\xi_{i-2} + 70\xi_i + 28\xi_{i+2} + \xi_{i+4} &= C_i^L - \xi_{i-1} - \xi_{i+1}, \\
& \quad i = 9, 11, \ldots, 2^L-9, \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{16}$$

Последние пять строк системы центросимметричны по отношению к первым строкам.

Теорема 1. *Решение (14), (15) системы (9) существует, единственно и определяется устойчивым образом.*

Доказательство. Заметим, что матрица в системе (16) имеет строгое диагональное преобладание во всех столбцах. Следовательно, метод исключения устойчив в применении к данной системе [20, Гл.II, §1], а решение существует и определяется единственным образом. □

4. Рекомендации для практического использования

В реальной ситуации вейвлет-анализа дискретного сигнала однородные граничные условия, необходимые для построения вейвлет-разложения, не выполняются. Поэтому перед применением описанного выше алгоритма рекомендуется вычесть из сеточных значений $f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, 2^L - 1$, значения интерполяционного многочлена Эрмита пятой степени [17]

$$(17)\quad P^5(v) = \sum_{i=0}^{2}(b-a)^i\left[f^{(i)}(a)\varphi_i(1-v) + f^{(i)}(b)\varphi_i(v)\right],\ v = \frac{x-a}{b-a},$$

где

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} t^3(6t^2 - 15t + 10), & i = 0, \\ -t^3(3t^2 - 7t + 4), & i = 1, \\ \dfrac{t^3}{2}(t^2 - 2t + 1), & i = 2. \end{cases}$$

Далее по полученным разностям $y_i = f(x_i) - P^5(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, 2^L - 1$, решается интерполяционная задача (5). После вейвлет-анализа и реконструкции по полученным вейвлет-коэффициентам аппроксимирующего сплайна пятой степени к нему добавляются значения многочлена (17).

5. Результаты численных экспериментов

Пусть $L = 4$ и дискретный сигнал представляется в виде 17 значений аналитической функции $f(x) = (x^2 - 16)^3$, заданных в точках $\Delta^4 : x = -4, -3.5, \ldots, 4$. Поскольку в точках ± 4 выполнены необходимые для построения вейвлет-разложения однородные краевые условия, есть все для того, чтобы исследовать применение построенного алгоритма к задаче вейвлет-анализа.

После предварительной обработки исходного цифрового материала в виде решения интерполяционной задачи (5) и последующего однократного выполнения процедуры вейвлет-анализа, на этапе $L = 3$ ограничимся отбраковкой всех полученных к этому моменту коэффициентов вейвлет-разложения, достигая этим сжатие поступившего цифрового сигнала с коэффициентом $K = 17/7 = 2.4$. Восстановление аппроксимационного сплайна осуществляется применением формулы (4):

$$(18)\qquad \begin{aligned} S^3(v) \quad = \quad & C^3_{-2}\varphi_{b2}(v) + C^3_{-1}\varphi_{b1}(v) + \sum_{i=0}^{2} C^3_i \varphi_5(v-i) + \\ & + C^3_3\varphi_{b1}(8-v) + C^3_4\varphi_{b2}(8-v),\ 0 \le v \le 8. \end{aligned}$$

С учетом выражения (18) получаем, что среднеквадратическая ошибка аппроксимации функции и соответствующих производных оценивается выражениями

$$\text{СКО}_r = \left(\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}\left(f^{(r)}(x_i) - (S^3)^{(r)}(x_i + 4)\right)^2\right)^{1/2}.$$

В Табл. 1 в столбце, помеченном символами "5:2" , представлены результаты расчетов по представленной схеме; для сравнения, в столбцах, помеченных символами "3:2" , представлены результаты расчетов по ранее известному быстрому алгоритму дискретного вейвлет-преобразования с использованием неэрмитовых кубических сплайн-вейвлетов с двумя нулевыми моментами [22].

Таблица 1. Сравнительные характеристики алгоритмов вейвлет-обработки.

Тип вейвлета	"5:2"	"3:2"	
L	3	3	2
$СКО_0$	0.025	4.211	75.655
$СКО_1$	0.032	10.364	295.974
$СКО_2$	0.919	110.912	1356.542
$СКО_3$	0.298	–	–
K	2.4	2.4	5.7

Таким образом, использование сплайн-вейвлетов более высокой степени приводит к повышению точности аппроксимации. Но для алгоритма "3:2" [22], построенного на основе неэрмитовых кубических сплайн-вейвлетов с двумя нулевыми моментами, за счет уменьшения носителей базисных функций становится доступным масштаб $L = 2$ и, в итоге, выше коэффициент сжатия, чем у изученного в статье алгоритма. Из сравнения аппроксимации производных дискретно заданных функций видно, что у исследованной в статье схемы, несомненно, более высокий потенциал ввиду наличия четырех вместо двух непрерывных производных.

6. Заключение

В данной статье исследуется применение авторской процедуры неполной редукции для определения системы многомасштабного вейвлет-разложения на основе B-сплайновых функций пятой степени. Процедура, специально разработанная для вейвлетов Эрмита, может быть использована для аппроксимации дискретно определенных функций, не требуя ввода значений производных - ценное преимущество в практических приложениях. Предлагаемый подход может быть распространен на сплайны более высокой степени и использование нулевых моментов более высокого порядка, открывая новые возможности для разработки устойчивых алгоритмов построения и применения сплайн-вейвлетов.

References

[1] M.A. Unser, *Ten good reasons for using Spline Wavelets*, Wavelet Applications in Signal and Image Processing V, eds. A. Aldroubi, A.F. Laine, M.A. Unser, Proc. SPIE, Vol.3169, 1997, pp. 422-431.

[2] C.K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York, London,1992.

[3] C. Chui, J. Wang, *On compactly supported spline wavelets and a duality principle*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.330, 1992, 903-915.

[4] A. Cohen, I. Daubechies, J.C. Feauveau, *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol.45, 1992, pp. 485-560.

[5] H. Demirel, G. Anbarjafari, *Image resolution enhancement by using discrete and stationary wavelet decomposition*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol.20, No.5, pp. 1458-1460.

[6] J. Wang, *Cubic spline wavelet bases of sobolev spaces and multilevel interpolation*, Applied and Computational Harmonic Analysis, Vol.3, No.2, 1996, pp. 154-163.

[7] M. Lyche, K. Mørken, E. Quak, *Theory and algorithms for non-uniform spline wavelets*, Multivariate Approximation and Applications, eds. N. Dyn, D. Leviatan, D. Levin, A. Pinkus, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, pp. 152-187.

[8] K. Koro, K. Abe, *Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.25, 2001, pp. 149-164.
[9] I.Y. Novikov, M.A. Skopina, V.Y. Protasov, *Wavelet Theory, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 239*, American Mathematical Society, Providence (RI), 2011.
[10] M. Jansen, *Non-equispaced B-spline wavelets*, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, Vol.14, No.6, 2016, 1650056.
[11] D. Ĉerná, V. Finêk, *Cubic spline wavelets with complementary boundary conditions*, Applied Mathematics and Computation, Vol.219, 2012, pp. 1853-1865.
[12] D. Ĉerná, V. Finêk, *Cubic spline wavelets with short support for fourth-order problems*, Applied Mathematics and Computation, Vol.243, 2014, pp. 44-56.
[13] B.M. Shumilov, *Multiwavelets of the third-degree hermitian splines orthogonal to cubic polynomials*, Mathematical Models and Computer Simulations, Vol.5, No.6, 2013, pp. 511-519.
[14] B.M. Shumilov, *Cubic multiwavelets orthogonal to polynomials and a splitting algorithm*, Numerical Analysis and Applications, Vol.6, No.3, 2013, pp. 247-259.
[15] B.M. Shumilov, E.A. Esharov, A. Zh. Kuduev, Y.S. Ymanov, *Quintic multi-wavelet*, Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, Vol.323, No.2, 2013, pp. 11-15.
[16] F. Aràndiga, A. Baeza, R. Donat, *Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol.9, 2004, pp. 263-273.
[17] C. De Boor, *A Practical Guide to Splines, Applied Mathematical Sciences, Vol.27*, Springer-Verlag, New York, 1978.
[18] E.J. Stollnitz, T.D. DeRose, D.H. Salesin, *Wavelets for Computer Graphics*, The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics, 1996.
[19] M. El-Mikkawy, F. Atlan, *On Solving Centrosymmetric Linear Systems*, Applied Mathematics, Vol.4, 2013, pp. 21-32.
[20] A.A. Samarskii, E.S. Nikolaev, *Methods of Solving Grid Equations*, Nauka, Moscow, 1978. (in Russian) / A.A. Samarskii, E.S. Nikolaev, *Numerical Methods for Grid Equations, Vol.I Direct Methods*, Birkhauser, Basel, 1989.
[21] S. Pissanetzky, *Sparse Matrix Technology*, Academic Press, London, 1984.
[22] B.M. Shumilov, *Splitting algorithm for cubic spline-wavelets with two vanishing moments on the interval*, Siberian Electronic Mathematical Reports, Vol. 17, 2020, pp. 2105-2121.

Boris Mihailovich Shumilov
Tomsk State University of Architecture and Building,
Solyanaya sq., 2,
634003 Tomsk, Russia
Email address: sbm@tsuab.ru