

Рецензия на работу

И.К. Шаранхаева "О позитивной полноте и позитивно замкнутых множествах мультифункций ранга 2"

Представлены результаты исследования дискретных функций, получивших название мультифункции. Мультифункциями называют функции, определенные на конечном множестве E , со значениями на множестве подмножеств E , мощность E называют рангом мультифункции. В данном случае рассматриваются мультифункции на множестве $E = \{0, 1\}$. Для мультифункций необходимо определить понятие суперпозиции, доопределив возможность нахождения значений мультифункции на наборах с элементами, являющимися подмножествами E .

В работе используется следующее определение. Пусть $f, f_1, \dots, f_n$ — мультифункции $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in E^m$, тогда суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)),$$

определяет мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$:

- 1) если для некоторого i имеет место $\alpha_i = \emptyset$, то $g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \emptyset$;
- 2) $g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_1, \dots, \beta_n; \beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Замыкание множества K мультифункций определяется как множество всех мультифункций, полученных из мультифункций множества K с помощью суперпозиции, добавления и удаления фиктивных переменных. Множество мультифункций K называется замкнутым, если K совпадает со своим замыканием $[K]$. Множество K называется полным, если $[K]$ совпадает с множеством всех мультифункций.

Для мультифункций известно, что множество замкнутых классов имеет континуальную мощность. Это стимулирует рассмотрение дополнительных, более сильных по сравнению с суперпозицией, операторов замыкания.

Одним из таких операторов является оператор позитивного замыкания. Используется язык исчисления предикатов первого порядка. Термами языка являются мультифункции, элементарные формулы содержат операцию включения множеств, в формулах используются только конъюнкция, дизъюнкция и квантор существования (поэтому и использован термин - позитивное). Любая формула с n свободными переменными однозначно определяет n -местное отноше-

ние на E . Любая мультифункция $f(x_1, \dots, x_n)$ однозначно определяет $n + 1$ -местное на E . Таким образом любая позитивная формула определяет мультифункцию и можно корректно говорить о множестве мультифункций, определяемых множеством формул над каким-либо множеством мультифункций, позитивном замыкании, позитивной полноте.

Для подмножеств мультифункций на двухэлементном множестве достаточно давно получены критерии позитивной полноты, найдены позитивно замкнутые классы (Марченков - булевы функции, 2000г.; Марченков, Попова - частичные булевы функции, 2008г.; Рябец - гиперфункции, 2016г.). В настоящей работе получены результаты по оператору позитивного замыкания для всего класса мультифункций. Результаты работы являются в какой-то мере завершающими для мультифункций на двухэлементном множестве. В работе определен оператор позитивного замыкания на множестве мультифункций, ограничения которого на подмножества совпадают с операторами позитивного замыкания на указанных выше подмножествах. Относительно этого замыкания найден критерий позитивной полноты, а также описаны позитивно замкнутые классы мультифункций. Интересно, что строение позитивно замкнутых классов мультифункций схоже с аналогичным результатом в классе гиперфункций. Однако авторы использовали в доказательствах совершенно разные идеи.

Считаю, что работа И.К. Шаранхаева "О позитивной полноте и позитивно замкнутых множествах мультифункций ранга 2" может быть опубликована в журнале "Сибирские электронные математические известия" после устранения замечаний.

Замечания

1. На стр. 145 дано определение функции, сохраняющей предикат. Но далее в конкретных предикатах указаны наборы значений аргументов, которые не входят в область определения функции. Необходимо либо изменить определение такой функции, возможно с привлечением определения суперпозиции, либо дать пояснения по корректности использования такого определения совместно с определением мультифункций (частичных функций, гиперфункций).

2. На стр. 148 используется позитивное замыкание $Pos[\emptyset]$. Здесь возможна неоднозначная трактовка: замыкание пустого множества

или замыкание одноэлементного множества, состоящего из функции " $*$ ". Если это замыкание пустого множества, то нужно дать пояснение, что означает позитивное замыкание пустого множества. Из контекста следует, что в этом случае множество мультифункций может быть любым, однако опять же - пустым.

Рецензент