

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxxУДК 519.716
MSC 08A99О ПОЗИТИВНОЙ ПОЛНОТЕ И ПОЗИТИВНО ЗАМКНУТЫХ
МНОЖЕСТВАХ МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА 2

И.К. ШАРАНХАЕВ

ABSTRACT. In article the problem of expressibility of multifunctions of rank 2 by positive closure operator is considered. A necessary and sufficient condition for the positive completeness of an arbitrary set of multifunctions and all positively closed sets of multifunctions are found.

Keywords: multifunction, positive closure, superposition, completeness, k -valued logic.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории функций k -значной логики традиционной проблемой является исследование решетки так называемых замкнутых классов. Число замкнутых классов булевых функций является счетным, а для функций k -значной логики при $k > 2$ и вовсе континуальным. Счетная решетка для булевых функций описана Э. Постом [1], при больших значениях k описание данной решетки вызывает серьезные трудности.

В связи с этим предлагается подход, при котором рассматриваются более сильные операторы замыкания в отличие от суперпозиции, которые позволяют «сжать» эту решетку до конечного множества. В работах [2] – [6] исследуется оператор положительного замыкания. Этот оператор рассматривался для таких классов дискретных функций как булевы функции, функции трехзначной логики, частичные булевы функции и гиперфункции ранга 2. В настоящей статье данный оператор удалось определить на множестве мультифункций. Автором

SHARANKHAEV, I.K. ON POSITIVE COMPLETENESS AND POSITIVELY CLOSED SETS OF MULTIFUNCTIONS OF RANK 2.

© 2021 ШАРАНХАЕВ И.К..

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22–21–20013, <https://rscf.ru/project/22-21-20013/> и Правительства Республики Бурятия.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

найден критерий положительной полноты произвольного множества мультифункций на двухэлементном множестве, описаны все положительно замкнутые множества мультифункций.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $E = \{0, 1\}$ и $F = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$$\begin{aligned} P_{2,n} &= \{f \mid f : E^n \rightarrow E\}, P_2 = \bigcup_n P_{2,n}; \\ P_{2,n}^* &= \{f \mid f : E^n \rightarrow E \cup \{\emptyset\}\}, P_2^* = \bigcup_n P_{2,n}^*; \\ P_{2,n}^- &= \{f \mid f : E^n \rightarrow F \setminus \{\emptyset\}\}, P_2^- = \bigcup_n P_{2,n}^-; \\ M_{2,n} &= \{f \mid f : E^n \rightarrow F\}, M_2 = \bigcup_n M_{2,n}. \end{aligned}$$

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из P_2^* – частичными функциями на E , из P_2^- – гиперфункциями на E , а из M_2 – мультифункциями на E (мультифункциями ранга 2). Очевидно, что $P_2 \subset P_2^* \subset M_2$, $P_2 \subset P_2^- \subset M_2$.

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)),$$

где $f, f_1, \dots, f_n \in M_2$, определяла мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$ определим значения мультифункции f на наборах из множества F следующим образом: если $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E^m$, то

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

На наборах, содержащих \emptyset , мультифункция принимает значение \emptyset .

Замыканием множества мультифункций K называется множество всех мультифункций, полученных из мультифункций множества K с помощью суперпозиции, добавления и удаления фиктивных переменных. Замыкание множества K обозначается через $[K]$. Множество мультифункций K называется замкнутым (замкнутым классом), если $K = [K]$.

Множество B называется полным, если $[B]$ совпадает с множеством всех мультифункций.

Для упрощения записи используется кодировка: $\{\emptyset\} \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0, 1\} \leftrightarrow -$, тогда $F = \{0, 1, *, -\}$.

Пусть R^s – s -местный предикат, заданный на множестве F . Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная на множестве F , сохраняет предикат R^s , если для любых наборов

$$(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{s1}), \dots, (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{sn}),$$

принадлежащих предикату R^s , набор

$$(f(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, f(\alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sn}))$$

принадлежит R^s .

Обозначим через S множество всех самодвойственных булевых функций.

Обозначим через S^* множество всех частичных функций, сохраняющих предикат

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Обозначим через S^- множество всех гиперфункций, сохраняющих предикат

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}.$$

Обозначим через K_8 множество всех мультифункций, сохраняющих предикат

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & - \\ 1 & 0 & * & - \end{pmatrix}.$$

Символами языка Pos являются переменные $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, символы f_i для обозначения мультифункций, символ включения \subseteq , логические связки конъюнкция $\&$ и дизъюнкция \vee , квантор существования \exists , левая и правая скобки, запятая.

Введем понятие термина:

- любая переменная есть терм;
- если x_{i_1}, \dots, x_{i_n} – переменные (возможно различные), а f – символ n -местной мультифункции, то $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ есть терм;
- если t_1, \dots, t_n – термы, f – символ n -местной мультифункции, то $f(t_1, \dots, t_n)$ есть терм.

Всякий терм t языка Pos определяет некоторую мультифункцию h . Если f_1, \dots, f_n – символы мультифункций, входящих в терм t , то будем говорить, что терм t выражает мультифункцию h через мультифункции f_1, \dots, f_n .

Понятие формулы определяется следующим образом:

- если t_1, t_2 – термы языка Pos , то выражение $(t_1 \subseteq t_2)$ называется элементарной формулой;
- если Φ_1, Φ_2 – формулы, а x_i – переменная, то $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\exists x_i)\Phi_1$ – формулы языка Pos (положительные формулы).

Любая формула языка Pos с n свободными переменными определяет n -местное отношение (предикат) на E . Пусть P – произвольное множество мультифункций, $[P]$ – замыкание P относительно суперпозиции, $f(x_1, \dots, x_n)$ – некоторая мультифункция, $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ – формула языка Pos со свободными переменными x_1, \dots, x_n, y , все функциональные символы которой являются обозначениями мультифункций из $[P]$, формула $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ определяет отношение $\rho(x_1, \dots, x_n, y)$ на множестве E . Будем говорить, что формула $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ позитивно выражает отношение $\rho(x_1, \dots, x_n, y)$ через мультифункции множества P .

Очевидно, что любая n -местная мультифункция $f(x_1, \dots, x_n)$ однозначно определяет $(n+1)$ -местное отношение, позитивно выраженное формулой $y \subseteq f(x_1, \dots, x_n)$, и наоборот. Будем говорить, что формула $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ позитивно выражает мультифункцию $f(x_1, \dots, x_n)$ через мультифункции множества P , если формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ и $y \subseteq f(x_1, \dots, x_n)$ позитивно выражают одно и то же отношение на E .

Заметим, что данное определение позитивной формулы применительно для булевых функций и гиперфункций совпадает с определениями из [2] и [6].

Множество всех мультифункций, позитивно выражимых через мультифункции множества P , назовем позитивным замыканием множества P и обозначим $Pos[P]$. Множество P , совпадающее со своим позитивным замыканием, называется позитивным замкнутым.

Множество B называется позитивно полным, если $Pos[B]$ совпадает с множеством всех мультифункций.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом разделе доказываются некоторые утверждения, необходимые при получении основных результатов.

Лемма 1. *Множество K_8 является позитивно замкнутым.*

Доказательство. Пусть позитивная формула $\Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ получена с помощью g_1, \dots, g_k из K_8 . Покажем, что если такая формула и $y \subseteq f(x_1, \dots, x_n)$ будут выражать одно и то же отношение, то $f(x_1, \dots, x_n)$ также принадлежит K_8 . Для этого покажем, что таблица истинности формулы Φ является симметричной, т. е. на противоположных наборах формула принимает одинаковые истинностные значения.

Доказательство проведем индукцией по построению формулы Φ .

Базис индукции. Рассмотрим элементарную формулу

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y) = g_1(z_1, \dots, z_p) \subseteq g_2(w_1, \dots, w_q),$$

где $\{z_1, \dots, z_p\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$, $\{w_1, \dots, w_q\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$ и $g_1, g_2 \in K_8$.

Построим для этой формулы таблицу истинности и определим истинность формулы на произвольном наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0)$ и его отрицании. Для этого на данном наборе рассмотрим возможные значения мультифункций g_1, g_2 . Будем считать, что

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) \subseteq g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q),$$

где $\{\beta_1, \dots, \beta_p\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0\}$ и $\{\gamma_1, \dots, \gamma_q\} \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0\}$.

1. Пусть $g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) = a$, где $a \in E$. Рассмотрим возможные значения g_2 . Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = a$, то в силу того, что $g_1, g_2 \in K_8$, получим $g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) = \bar{a}$ и $g_2(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_q) = \bar{a}$. В этом случае $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_0) = \text{И}$.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = \bar{a}$, то $g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) = \bar{a}$ и $g_2(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_q) = a$. Тогда $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_0) = \text{Л}$.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = -$, то $g_2(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_q) = -$. Тогда $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_0) = \text{И}$.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = *$, то $g_2(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_q) = *$. Тогда $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_0) = \text{Л}$.

2. Пусть $g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) = -$. Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) \in E$, то $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_0) = \text{Л}$.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = -$, то $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_0) = \text{И}$.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = *$, то $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_0) = \text{Л}$.

3. Пусть $g_1(\beta_1, \dots, \beta_p) = *$. Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) \in E$, то $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_0) = \text{И}$.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = -$, то $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_0) = \text{И}$.

Если $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = *$, то $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_0) = \Phi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_0) = \text{И}$.

Шаг индукции. Рассмотрим формулу вида $(\Phi_1 \& \Phi_2)$ или $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$. В силу индуктивного предположения формулы Φ_1, Φ_2 на противоположных наборах принимают одинаковые истинностные значения. Таким образом, рассматриваемая формула на противоположных наборах также принимает одинаковые истинностные значения.

Рассмотрим формулу вида $(\exists x_1)\Phi_1$. В силу индуктивного предположения формула Φ_1 на противоположных наборах принимает одинаковые истинностные значения. Очевидно, что $(\exists x_1)\Phi_1$ на противоположных наборах также принимает одинаковые истинностные значения. \square

Лемма 2. Любое позитивно замкнутое множество мультифункций замкнуто относительно суперпозиции.

Доказательство. Полностью аналогично доказательству утверждения 1 из [7]. \square

В [8] доказана следующая

Лемма 3. Множество $U \cup \{h\}$, где U – множество всех одноместных мультифункций, $h = (*000000)$, полно.

Лемма 4. Верно, что $P_2^* \subseteq Pos[\{0, 1\}]$ и $S^* \subseteq Pos[\{\bar{x}\}]$.

Доказательство. Докажем, что $P_2^* \subseteq Pos[\{0, 1\}]$. В [4] доказано, что $\{0, 1\}$ позитивно порождает P_2 , т. е.

$$P_2 \subseteq Pos[\{0, 1\}].$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^*$. Определим булевы функции f_0 и f_1 следующим образом: если для набора (a_1, \dots, a_n) верно, что $f(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}$, то

$$f(a_1, \dots, a_n) = f_0(a_1, \dots, a_n) = f_1(a_1, \dots, a_n),$$

а если $f(a_1, \dots, a_n) = *$, то

$$f_0(a_1, \dots, a_n) \neq f_1(a_1, \dots, a_n).$$

Тогда $f(x_1, \dots, x_n)$ позитивно выражается формулой

$$(f_0(x_1, \dots, x_n) \subseteq f_1(x_1, \dots, x_n)) \& (y \subseteq f_0(x_1, \dots, x_n)).$$

Докажем, что $S^* \subseteq Pos[\{\bar{x}\}]$. В [4] доказано, что $S \subseteq Pos[\{\bar{x}\}]$. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in S^*$. Определим булевы функции f_0 и f_1 следующим образом: если для набора (a_1, \dots, a_n) верно, что $f(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}$, то

$$f(a_1, \dots, a_n) = f_0(a_1, \dots, a_n) = f_1(a_1, \dots, a_n),$$

а если $f(a_1, \dots, a_n) = *$, то

$$f_0(0, a_2, \dots, a_n) = 0, f_1(0, a_2, \dots, a_n) = 1,$$

$$f_0(1, a_2, \dots, a_n) = 1, f_1(1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

Тогда $f(x_1, \dots, x_n)$ позитивно выражается формулой

$$(f_0(x_1, \dots, x_n) \subseteq f_1(x_1, \dots, x_n)) \& (y \subseteq f_0(x_1, \dots, x_n)).$$

\square

Лемма 5. Верно, что $S^* \cup S^- \subseteq Pos[\emptyset]$.

Доказательство. В [6] доказано, что $S^- \subseteq Pos[\emptyset]$, т. е. любая мультифункция из S^- позитивно выражается из любого множества мультифункций. По лемме 4 имеем $S^* \subseteq Pos[\{\bar{x}\}]$. Поскольку $\bar{x} \in S^-$ имеем $S^* \cup S^- \subseteq Pos[\emptyset]$. \square

Лемма 6. Любая из мультифункций (00) , (11) , $(*0)$, $(*1)$, $(0*)$, $(1*)$, $(*-)$, $(-*)$, (-0) , (-1) , $(0-)$, $(1-)$ дает одноэлементное позитивно полное множество.

Доказательство. Как следует из [6], каждая из (00), (11), (−0), (−1), (0−), (1−) дает все мультифункции из P_2^- . Так как по лемме 4 имеем $P_2^* \subseteq Pos\{0, 1\}$, то в силу лемм 2, 3 доказываемое утверждение верно в этих случаях.

В случаях (*0), (*1), (0*), (1*) с помощью (−−), которую имеем по лемме 5, опять получим константу 0 или 1.

В случаях (*−), (−*) заметим сначала, что с помощью (10), которую имеем по лемме 5, в любом варианте получим (*−).

Далее с помощью этой мультифункции, леммы 5 и следующих суперпозиций

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ - \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & - \\ - & 0 \\ - & 1 \\ 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & - \\ 1 & - \\ 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

получим мультифункцию (*011). Из нее отождествлением переменных имеем мультифункцию (*1), а этот случай рассмотрен. Лемма доказана. □

Лемма 7. *Верно, что $K_8 \subseteq Pos[\emptyset]$.*

Доказательство. В силу лемм 2, 5 достаточно показать, что любую мультифункцию из K_8 можно выразить с помощью мультифункций из $S^* \cup S^-$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная мультифункция из K_8 . Обозначим через $f_1(x_1, \dots, x_n)$ гиперфункцию такую, что для любого набора $\tilde{\alpha}$ верно, что $f_1(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha})$, если $f(\tilde{\alpha}) \neq *$, и $f_1(\tilde{\alpha}) = -$, если $f(\tilde{\alpha}) = *$. Очевидно, что $f_1 \in S^-$.

Рассмотрим $f_1(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_n))$, где $g(x_1, \dots, x_n)$ такая, что на всех наборах верно, что $g(x_1, \dots, x_n) = x_n$ кроме тех наборов β таких, что $f(\tilde{\beta}) = *$, в этих случаях $g(\tilde{\beta}) = *$. Очевидно, что $g \in S^*$ и

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_n)).$$

Лемма доказана. □

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе предлагается теорема, дающая необходимое и достаточное условие положительной полноты произвольного множества мультифункций, и доказано, что существует ровно 2 positively замкнутых множества мультифункций.

Теорема 1. *Множество мультифункций B является положительно полным тогда и только тогда, когда выполнено условие, что $B \not\subseteq K_8$.*

Доказательство. Необходимость. От противного. Пусть $B \subseteq K_8$. Тогда

$$Pos[B] = M_2 \subseteq K_8.$$

Противоречие в силу леммы 1.

Достаточность. Пусть $f \notin K_8$. Заметим, что по лемме 7 отрицание позитивно выражается из любого множества мультифункций. Тогда с помощью f , отождествления переменных и отрицаний получим одну из (00), (11), (*0), (*1), (0*), (1*), (*-), (-*), (-0), (-1), (0-), (1-). В силу леммы 6 утверждение доказано. \square

Теорема 2. *Существует ровно 2 позитивно замкнутых множества K_8 и M_2 .*

Доказательство. Следует из леммы 7 и теоремы 1. \square

REFERENCES

- [1] E.L. Post, *Introduction to a General Theory of Elementary Proposition*, Amer. J. Math., **43**:4 (1921), 163–185.
- [2] S.S. Marchenkov, *Closed classes of Boolean functions*, Fizmatlit, M., 2000.
- [3] S.S. Marchenkov, *A criterion for positive completeness in ternary logic*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **1**:4 (2007), 481–488. <https://www.mathnet.ru/links/0e3caeff4c253e43a89c45ca37c95e25/da34.pdf>
- [4] S.S. Marchenkov, A.A. Popova *Positively closed classes of partial Boolean functions*, Vestnik of Moscow university. Ser. 15. Computational math. and cybern., **3** (2008), 30–34.
- [5] S.S. Marchenkov, *Positive closed classes in the three-valued logic*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **8**:2 (2014), 256–266. <https://www.mathnet.ru/links/22d1239ac1926c78710a2a8f7843946e/da761.pdf>
- [6] L.V. Riabets, *Operators of parametric and positive closure on the set of hyperfunctions of rank 2*, Intelligent systems. Theory and applications, **20**:3 (2016), 79–84. <https://www.mathnet.ru/links/7364b7e5fc1a1d8c5b36cc43e7a70d4a/ista93.pdf>
- [7] L.V. Riabets, *Parametric closed classes of hyperfunctions of rank 2*, Izvestiya Irk. Gos. Univ. Ser. Matematika, **17** (2016), 46–61. <https://www.mathnet.ru/links/d4e7c0f49d3fa403f81a9d80b4aa2739/iigum272.pdf>
- [8] V.I. Panteleyev, *Completeness criterion for sub-defined partial Boolean functions*, Vestnik Novosibir. Gos. Univ. Ser.: Matem., Mechan., Inform., **9**:3 (2009), 95–114. <https://www.mathnet.ru/links/03c6afc79775397933f75cd6323509a6/vngu185.pdf>

IVAN KONSTANTINOVICH SHARANKHAEV
 DORZHI BANZAROV BURYAT STATE UNIVERSITY,
 24A, SMOLINA STR.,
 670000, ULAN-UDE, RUSSIA
E-mail address: goran5@mail.ru