S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.716
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 08A99

О ПОЗИТИВНОЙ ПОЛНОТЕ И ПОЗИТИВНО ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА 2

И.К. ШАРАНХАЕВ

Abstract. In article the problem of expressibility of multifunctions of rank 2 by positive closure operator is considered. A necessary and sufficient condition for the positive completeness of an arbitrary set of multifunctions and all positively closed sets of multifunctions are found.

Keywords: multifunction, positive closure, superposition, completeness, k-valued logic.

1. Введение

В теории функций k-значной логики традиционной проблемой является исследование решетки так называемых замкнутых классов. Число замкнутых классов булевых функций является счетным, а для функций k-значной логики при $k > 2$ и вовсе континуальным. Счетная решетка для булевых функций описана Э. Постом [1], при больших значениях k описание данной решетки вызывает серьезные трудности.

В связи с этим предлагается подход, при котором рассматриваются более сильные операторы замыкания в отличие от суперпозиции, которые позволяют «сжать» эту решетку до конечного множества. В работах [2] – [6] исследуется оператор позитивного замыкания. Этот оператор рассматривался для таких классов дискретных функций как булевы функции, функции трехзначной логики, частичные булевы функции и гиперфункции ранга 2. В настоящей статье данный оператор удалось определить на множестве мультифункций. Автором

Sharankhaev, I.K. On positive completeness and positively closed sets of multifunctions of rank 2.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22–21–20013, https://rscf.ru/project/22-21-20013/ и Правительства Республики Бурятия.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

найден критерий позитивной полноты произвольного множества мультифункций на двухэлементном множестве, описаны все позитивно замкнутые множества мультифункций.

2. Основные понятия и определения

Пусть $E = \{0, 1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P_{2,n} = \{f | f : E^n \to E\}$, $P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}$;

$P^*_{2,n} = \{f | f : E^n \to E \cup \{\varnothing\}\}$, $P^*_2 = \bigcup\limits_n P^*_{2,n}$;

$P^-_{2,n} = \{f | f : E^n \to F \setminus \{\varnothing\}\}$, $P^-_2 = \bigcup\limits_n P^-_{2,n}$;

$M_{2,n} = \{f | f : E^n \to F\}$, $M_2 = \bigcup\limits_n M_{2,n}$.

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из P^*_2 – частичными функциями на E, из P^-_2 – гиперфункциями на E, а из M_2 – мультифункциями на E (мультифункциями ранга 2). Очевидно, что $P_2 \subset P^*_2 \subset M_2$, $P_2 \subset P^-_2 \subset M_2$.

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)),$$

где $f, f_1, \ldots, f_n \in M_2$, определяла мультифункцию $g(x_1, \ldots, x_m)$ определим значения мультифункции f на наборах из множества F следующим образом: если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E^m$, то

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

На наборах, содержащих $\varnothing$, мультифункция принимает значение $\varnothing$.

Замыканием множества мультифункций K называется множество всех мультифункций, полученных из мультифункций множества K с помощью суперпозиции, добавления и удаления фиктивных переменных. Замыкание множества K обозначается через $[K]$. Множество мультифункций K называется замкнутым (замкнутым классом), если $K = [K]$.

Множество B называется полным, если $[B]$ совпадает с множеством всех мультифункций.

Для упрощения записи используется кодировка: $\{\varnothing\} \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0, 1\} \leftrightarrow -$, тогда $F = \{0, 1, *, -\}$.

Пусть R^s – s-местный предикат, заданный на множестве F. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на множестве F, сохраняет предикат R^s, если для любых наборов

$$(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{s1}), \ldots, (\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{sn}),$$

принадлежащих предикату R^s, набор

$$(f(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \ldots, f(\alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sn}))$$

принадлежит R^s.

Обозначим через S^* множество всех частичных функций, сохраняющих предикат

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Обозначим через S^- множество всех гиперфункций, сохраняющих предикат

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}.$$

Обозначим через K_8 множество всех мультифункций, сохраняющих предикат

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & - \\ 1 & 0 & * & - \end{pmatrix}.$$

Символами языка Pos являются переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, символы f_i для обозначения мультифункций, символ включения $\subseteq$, логические связки конъюнкция & и дизъюнкция $\vee$, квантор существования $\exists$, левая и правая скобки, запятая.

Введем понятие терма:

– любая переменная есть терм;

– если $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ – переменные (возможно различные), а f – символ n-местной мультифункции, то $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ есть терм;

– если $t_1, \ldots, t_n$ – термы, f – символ n-местной мультифункции, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ есть терм.

Всякий терм t языка Pos определяет некоторую мультифункцию h. Если $f_1, \ldots, f_n$ – символы мультифункций, входящих в терм t, то будем говорить, что терм t выражает мультифункцию h через мультифункции $f_1, \ldots, f_n$.

Понятие формулы определяется следующим образом:

– если t_1, t_2 – термы языка Pos, то выражение $(t_1 \subseteq t_2)$ называется элементарной формулой;

– если Φ_1, Φ_2 – формулы, а x_i – переменная, то $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\exists x_i)\Phi_1$ – формулы языка Pos (позитивные формулы).

Любая формула языка Pos с n свободными переменными определяет n-местное отношение (предикат) на E. Пусть P – произвольное множество мультифункций, $[P]$ – замыкание P относительно суперпозиции, $f(x_1, \ldots, x_n)$ – некоторая мультифункция, $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ – формула языка Pos со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n, y$, все функциональные символы которой являются обозначениями мультифункций из $[P]$, формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ определяет отношение $\rho(x_1, \ldots, x_n, y)$ на множестве E. Будем говорить, что формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ позитивно выражает отношение $\rho(x_1, \ldots, x_n, y)$ через мультифункции множества P.

Очевидно, что любая n-местная мультифункция $f(x_1, \ldots, x_n)$ однозначно определяет $(n+1)$-местное отношение, позитивно выраженное формулой $y \subseteq f(x_1, \ldots, x_n)$, и наоборот. Будем говорить, что формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ позитивно выражает мультифункцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ через мультифункции множества P, если формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ и $y \subseteq f(x_1, \ldots, x_n)$ позитивно выражают одно и тоже отношение на E.

Заметим, что данное определение позитивной формулы применительно для частичных функций и гиперфункций совпадает с определениями из работ [4] и [6].

Множество всех мультифункций, позитивно выразимых через мультифункции множества P, назовем позитивным замыканием множества P и обозначим $Pos[P]$. Множество P, совпадающее со своим позитивным замыканием, называется позитивным замкнутым.

Множество B называется позитивно полным, если $Pos[B]$ совпадает с множеством всех мультифункций.

3. Вспомогательные утверждения

В этом разделе доказываются некоторые утверждения, необходимые при получении основных результатов.

Лемма 1. *Множество K_8 является позитивно замкнутым.*

Доказательство. Пусть позитивная формула $\Phi(x_1,\dots,x_n,y)$ получена с помощью $g_1,\dots,g_k$ из K_8. Покажем, что если такая формула и $y\subseteq f(x_1,\dots,x_n)$ будут выражать одно и то же отношение, то $f(x_1,\dots,x_n)$ также принадлежит K_8. Для этого покажем, что таблица истинности формулы Φ является симметричной, т. е. на противоположных наборах формула принимает одинаковые истинностные значения.

Доказательство проведем индукцией по построению формулы Φ.

Базис индукции. Рассмотрим элементарную формулу

$$\Phi(x_1,\dots,x_n,y)=g_1(z_1,\dots,z_p)\subseteq g_2(w_1,\dots,w_q),$$

где $\{z_1,\dots,z_p\}\subseteq\{x_1,\dots,x_n,y\}$, $\{w_1,\dots,w_q\}\subseteq\{x_1,\dots,x_n,y\}$ и $g_1,g_2\in K_8$.

Построим для этой формулы таблицу истинности и определим истинность формулы на произвольном наборе $(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)$ и его отрицании. Для этого на данном наборе рассмотрим возможные значения мультифункций g_1,g_2. Будем считать, что

$$\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=g_1(\beta_1,\dots,\beta_p)\subseteq g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q),$$

где $\{\beta_1,\dots,\beta_p\}\subseteq\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0\}$ и $\{\gamma_1,\dots,\gamma_q\}\subseteq\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0\}$.

1. Пусть $g_1(\beta_1,\dots,\beta_p)=a$, где $a\in E$. Рассмотрим возможные значения g_2. Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=a$, то в силу того, что $g_1,g_2\in K_8$, получим $g_1(\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_p)=\bar a$ и $g_2(\bar\gamma_1,\dots,\bar\gamma_q)=\bar a$. В этом случае $\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=\Phi(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n,\bar\alpha_0)=$И.

Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=\bar a$, то $g_1(\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_p)=\bar a$ и $g_2(\bar\gamma_1,\dots,\bar\gamma_q)=a$. Тогда $\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=\Phi(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n,\bar\alpha_0)=$Л.

Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=-$, то $g_2(\bar\gamma_1,\dots,\bar\gamma_q)=-$. Тогда $\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=\Phi(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n,\bar\alpha_0)=$И.

Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=*$, то $g_2(\bar\gamma_1,\dots,\bar\gamma_q)=*$. Тогда $\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=\Phi(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n,\bar\alpha_0)=$Л.

2. Пусть $g_1(\beta_1,\dots,\beta_p)=-$. Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)\in E$, то $\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=\Phi(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n,\bar\alpha_0)=$Л.

Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=-$, то $\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=\Phi(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n,\bar\alpha_0)=$И.

Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=*$, то $\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=\Phi(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n,\bar\alpha_0)=$Л.

3. Пусть $g_1(\beta_1,\dots,\beta_p)=*$. Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)\in E$, то $\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=\Phi(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n,\bar\alpha_0)=$И.

Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=-$, то $\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=\Phi(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n,\bar\alpha_0)=$И.

Если $g_2(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=*$, то $\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_0)=\Phi(\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n,\bar\alpha_0)=$И.

Шаг индукции. Рассмотрим формулу вида $(\Phi_1\&\Phi_2)$ или $(\Phi_1\vee\Phi_2)$. В силу индуктивного предположения формулы Φ_1, Φ_2 на противоположных наборах принимают одинаковые истинностные значения. Таким образом, рассматриваемая формула на противоположных наборах также принимает одинаковые истинностные значения.

Рассмотрим формулу вида $(\exists x_1)\Phi_1$. В силу индуктивного предположения формула Φ_1 на противоположных наборах принимает одинаковые истинностные значения. Очевидно, что $(\exists x_1)\Phi_1$ на противоположных наборах также принимает одинаковые истинностные значения. $\square$

Лемма 2. *Любое позитивно замкнутое множество мультифункций замкнуто относительно суперпозиции.*

Доказательство. Полностью аналогично доказательству утверждения 1 из [7]. $\square$

В [8] доказана следующая

Лемма 3. *Множество $U \cup \{h\}$, где U – множество всех одноместных мультифункций, $h = (*0000000)$, полно.*

В [6] доказано, что $S^- \subseteq Pos[\varnothing]$, т. е. любая мультифункция из S^- позитивно выражается из любого множества мультифункций. В работе [4] доказано, что $S^* \subseteq Pos[\bar{x}]$. Таким образом, имеет место

Лемма 4. *Верно, что $S^* \cup S^- \subseteq Pos[\varnothing]$.*

Лемма 5. *Любая из мультифункций (00), (11), $(*0)$, $(*1)$, $(0*)$, $(1*)$, $(*-)$, $(-*)$, (-0), (-1), $(0-)$, $(1-)$ дает одноэлементное позитивно полное множество.*

Доказательство. Как следует из [6], каждая из (00), (11), (-0), (-1), $(0-)$, $(1-)$ дает все мультифункции из P^-. Так как в [4] доказано, что $P^* \subseteq Pos[0,1]$, то в силу лемм 2, 3 доказываемое утверждение верно в этих случаях.

В случаях $(*0)$, $(*1)$, $(0*)$, $(1*)$ с помощью $(--)$, которую имеем по лемме 4, опять получим константу 0 или 1.

В случаях $(*-)$, $(-*)$ заметим сначала, что с помощью (10), которую имеем по лемме 4, в любом варианте получим $(*-)$.

Далее с помощью этой мультифункции, леммы 4 и следующих суперпозиций

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ - \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & - \\ - & 0 \\ - & 1 \\ 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & - \\ 1 & - \\ 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

получим мультифункцию $(*001)$. Из нее отождествлением переменных имеем мультифункцию $(*1)$, а этот случай рассмотрен. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. *Верно, что $K_8 \subseteq Pos[\varnothing]$.*

Доказательство. В силу лемм 2, 4 достаточно показать, что любую мультифункцию из K_8 можно выразить с помощью мультифункций из $S^* \cup S^-$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – произвольная мультифункция из K_8. Обозначим через $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ гиперфункцию такую, что для любого набора $\tilde{\alpha}$ верно, что $f_1(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha})$, если $f(\tilde{\alpha}) \neq *$, и $f_1(\tilde{\alpha}) = -$, если $f(\tilde{\alpha}) = *$. Очевидно, что $f_1 \in S^-$.

Рассмотрим $f_1(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_n))$, где $g(x_1, \dots, x_n)$ такая, что на всех наборах верно, что $g(x_1, \dots, x_n) = x_n$ кроме тех наборов β таких, что $f(\tilde{\beta}) = *$, в этих случаях $g(\tilde{\beta}) = *$. Очевидно, что $g \in S^*$ и

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_n)).$$

Лемма доказана.

□

4. Основные результаты

В этом разделе предлагается теорема, дающая необходимое и достаточное условие позитивной полноты произвольного множества мультифункций, и доказано, что существует ровно 2 позитивно замкнутых множества мультифункций.

Теорема 1. *Множество мультифункций B является позитивно полным тогда и только тогда, когда выполнено условие, что $B \not\subseteq K_8$.*

Доказательство. Необходимость. От противного. Пусть $B \subseteq K_8$. Тогда

$$Pos[B] = M_2 \subseteq K_8.$$

Противоречие в силу леммы 1.

Достаточность. Пусть $f \notin K_8$. Заметим, что по лемме 6 отрицание позитивно выражается из любого множества мультифункций. Тогда с помощью f, отождествления переменных и отрицаний получим одну из (00), (11), $(*0)$, $(*1)$, $(0*)$, $(1*)$, $(*-)$, $(-*)$, (-0), (-1), $(0-)$, $(1-)$. В силу леммы 5 утверждение доказано.
□

Теорема 2. *Существует ровно 2 позитивно замкнутых множества K_8 и M_2.*

Доказательство. Следует из леммы 6 и теоремы 1.

□

References

[1] E.L. Post, *Introduction to a General Theory of Elementary Proposition*, Amer. J. Math., **43**:4 (1921),163–185.

[2] S.S. Marchenkov, *Closed classes of Boolean functions*, Fizmatlit, M., 2000.

[3] S.S. Marchenkov, *A criterion for positive completeness in ternary logic*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **1**:4 (2007), 481–488. https://www.mathnet.ru/links/0e3caeff4c253e43a89c45ca37c95e25/da34.pdf

[4] S.S. Marchenkov, A.A. Popova *Positively closed classes of partial Boolean functions*, Vestnik of Moscow university. Ser. 15. Computational math. and cybern., **3** (2008), 30–34.

[5] S.S. Marchenkov, *Positive closed classes in the three-valued logic*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **8**:2 (2014), 256–266. https://www.mathnet.ru/links/22d1239ac1926c78710a2a8f7843946e/da761.pdf

[6] L.V. Riabets, *Operators of parametric and positive closure on the set of hyperfunctions of rank 2*, Intelligent systems. Theory and applications, **20**:3 (2016), 79–84. https://www.mathnet.ru/links/7364b7e5fc1a1d8c5b36cc43e7a70d4a/ista93.pdf

[7] L.V. Riabets, *Parametric closed classes of hyperfunctions of rank 2*, Izvestiya Irk. Gos. Univ. Ser. Matematika, **17** (2016), 46–61. https://www.mathnet.ru/links/d4e7c0f49d3fa403f81a9d80b4aa2739/iigum272.pdf

[8] V.I. Panteleyev, *Completeness criterion for sub-defined partial Boolean functions*, Vestnik Novosibir. Gos. Univ. Ser.: Matem., Mechan., Inform., **9**:3 (2009), 95–114. https://www.mathnet.ru/links/03c6afc79775397933f75cd6323509a6/vngu185.pdf

Ivan Konstantinovich Sharankhaev
Dorzhi Banzarov Buryat State University,
24a, Smolina str.,
670000, Ulan-Ude, Russia
E-mail address: goran5@mail.ru