S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 313–317 (2020) УДК 517.928
DOI 10.33048/semi.2020.17.020 MSC 34E05, 34K10

ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕЧЕНИЯ ВОДНОГО РАСТВОРА ПОЛИМЕРОВ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

А. Г. ПЕТРОВА

Abstract. We consider the boundary-value problem in a semibounded interval for a third-order integro-differential equation with the small parameter multiplies the product of the integral of unknown function vanishing on the boundary and its highest derivative. Such a problem arises in the description of the motion of weak solutions of polymers near a critical point. Unique solvability for the problem for all values of the parameter in [0,1] is proved in [1]. In this paper the representation of a solution as an asymptotic series in non-negative integer powers of the small parameter is established.

Keywords: flow of an aqueous solution of polymers, boundary-value problem in a semibounded interval, small parameter, asymptotic solution.

Рассмотрим краевую задачу на полубесконечном интервале для интегродифференциального уравнения с малым параметром [1]:

(1)

$$p'' + p'\int_0^y (1-p)ds + p(p-2) = \delta\Big(p'''\int_0^y (1-p)ds - p''(1-p)\Big), y > 0;\ p(0) = 1, p(\infty) = 0.$$

Задача описывает стационарное течение вблизи критической точки слабых водных растворов полимеров с учетом релаксационных свойств среды [2] и δ является малым положительным параметром, отвечающим малым значениям релаксационной вязкости В работе [1] можно найти краткий обзор литературы по задаче, также там доказана однозначная классическая разрешимость этой задачи при любых значениях

Petrova, A.G., Justification of asymptotic decomposition of a solution for the problem of the motion of weak solutions of polymers near a critical point.

© 2020 Петрова А.Г.

Работа поддержана РФФИ (грант19-01-00096).

Поступила 9 декабря 2019 г., опубликована 4 марта 2020 г.

параметра δ из промежутка [0,1], отмечено, что при $\delta = 0$ решение совпадает с решением Хименца, а при $\delta = 1$ решением является функция $p(y) = e^{-y}$. Особенностью задачи является "двойное вырождение": малый параметр в уравнении стоит перед произведением интеграла от искомой функции, обращающегося в ноль границе, и ее старшей производной. Тем не меннее в [1] приведены аргументы в пользу отсутствия погранслоя вблизи нуля и предположения [3] о возможности найти решение задачи (1) в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра

$$p = p_0 + \delta p_1 + ... + \delta^k p_k + ..., \tag{2}$$

где p_0 является решением задачи при $\delta = 0$ (решение Хименца).

Данная работа посвящена обоснованию представления решения в виде ряда (2). На этом пути необходимо доказать два утверждения: о разрешимости однородных краевых задач на полубесконечном интервале для интегродиффренциального линейного неоднородного уравнения и о том, что ряд (2) является асимптотическим.

Выпишем задачи для определения функций $p_k(y)$ из ряда (2):

$$p_k'' + p_k' \int_0^y (1 - p_0)ds - 2p_k(1 - p_0) - p_0' \int_0^y p_k(s)ds = F_k, \ p_k(0) = p_k(\infty) = 0. \tag{3}$$

Правая часть F этого линейного интегродифференциального является суммой произведений функций $p_i, \ \ i = 1, ...k - 1$ их интегралов с переменным верхним пределом и производных до 3-го порядка включительно. В частности, уравнение для p_1 выглядим следующим образом:

$$p_1'' + p_1' \int_0^y (1 - p_0)ds - 2p_1(1 - p_0) - p_0' \int_0^y p_1(s)ds = p_0''' \int_0^y (1 - p_0)ds - p_0''(1 - p_0).$$

Отметим, что краевые задачи на полубесконечном интервале типа (3) изучены явно недостаточно, по крайней мере, не удалось найти результатов о их разрешимости. Однако, нетрудно доказать следующий факт.

Лемма 1. *В случае $F_k \equiv 0$ задача (3) имеет только тривиальное классическое решение.*

Доказательство. В случае существования положительного максимума в точке $y^0 \in (0, \infty)$ или отрицательного минимума в точке $y^* \in (0, \infty)$ имеем:

$$0 \geq p_k''(y^0) = 2p_k(y^0)(1 - p_0(y^0)) + p_0'(y^0) \int_0^{y^0} p_k(s)ds \geq p_k(y^0)(2(1 - p_0(y^0)) + p_0' y^0)$$

или

$$0 \leq p_k''(y^*) = 2p_k(y^*)(1 - p_0(y^*)) + p_0'(y^*) \int_0^{y^*} p_k(s)ds \leq p_k(y^*)(2(1 - p_0(y^*)) + p_0'(y^*)).$$

Убеждаясь в том, что функция $2(1 - p_0(y)) + p_0'(y)$ положительна при положительных значениях аргумента, приходим к заключению о невозможности существования положительного максимума или отрицательного минимума у решения однородного уравнения $p_k(y)$. Таким образом, лемма доказана. □

Далее воспользуется теоремой Фредгольма.Для этого введем нормированные пространства быстро убывающих функций

$$C_0^{0,1}([0, \infty)) = \{\phi(y) : [0, \infty) \to R : ||\phi||_{C_0^{0,1}} = \sup_{0 \leq y < \infty} |(1+y^2)\phi(y)|, \ \lim_{y \to \infty} |(1+y^2)\phi(y)| = 0\}$$

и $C_0^{k,1}([0, \infty)), k \in N$ такие, что $\phi, \phi', ..., \phi^(k) \in C_0^{0,1}([0, \infty))$ и $||\phi||_{C_0^{k,1}} + ||\phi'||_{C_0^{0,1}} + ... + ||\phi^{(k)}||_{C_0^{0,1}}$. Эти пространства являются полными [4].

Лемма 2. *Задача (3) для* $F_k \in C_0^{0,1}$ *эквивалента уравнению*

$$p_k = Ap_k + \Phi_k, \tag{4}$$

где

$$Ap = -(1+y^2)\frac{\int_0^y e^{-s^2/2}(s^2+1)^{-2}ds}{\int_0^\infty e^{-s^2/2}(s^2+1)^{-2}ds}\cdot$$

$$\cdot\Big(\int_0^\infty e^{-t^2/2}(t^2+1)^{-2}\int_0^t (p(s)p_0(t)+p(t)p_0(s)-4p(s)p_0(s))(s^2+1)e^{s^2/2}dsdt\Big)+$$

$$+\int_0^y e^{-t^2/2}(t^2+1)^{-2}\int_0^t (p(s)p_0(t)+p(t)p_0(s)-4p(s)p_0(s))(s^2+1)e^{s^2/2}dsdt, \tag{5}$$

$$\Phi = -(1+y^2)\frac{\int_0^y e^{-s^2/2}(s^2+1)^{-2}ds}{\int_0^\infty e^{-s^2/2}(s^2+1)^{-2}ds}\cdot\cdot\Big(\int_0^\infty e^{-t^2/2}(t^2+1)^{-2}\int_0^t F_k(s))(s^2+1)e^{s^2/2}dsdt\Big)+$$

$$+\int_0^y e^{-t^2/2}(t^2+1)^{-2}\int_0^t F_k(s)(s^2+1)e^{s^2/2}dsdt, \tag{6}$$

Доказательство. Представление (4) получено путем интегрирования уравнения

$$p_k'' + p_k'y - 2p = p_0'\int_0^y p_k(s)ds + p_k'\int_0^y p_0(s)ds - 2pp_0 + F_k,$$

полученного из (3) переносом некоторых слагаемых в правую часть с учетом краевых условий. Решение получено методом вариации постоянный с использованием общего решения однородного уравнения (все, что справа от знака равенства, считается правой частью) в виде

$$p_k = c_1(y^2+1)\int_0^y e^{-s^2/2}(s^2+1)^{-2}ds + c_2(y^2+1).$$

Нетрудно заметить, что при $p_k, F_k \in C_0^{0,1}$ значение Ap и функция Φ принадлежат пространству $C_0^{2,1}$, следовательно, решения (4) принадлежат $C_0^{n,1}, n \in N$. □

Утверждение 1. *Задача (3) имеет единственное классическое решение и это решение принадлежит пространству* $C_0^{3,1}([0,\infty))$.

Доказательство. В силу леммы 1 однородное уравнение (4) имеет только тривиальное решение. Для того, чтобы применить теорему Фредгольма для вполне непрерывных операторов в банаховом пространстве [5] необходимо доказать компактность оператора А. Поскольку, как показано в лемме 2, результат действия А на функцию из пространства $C_0^{0,1}$ принадлежит пространству $C_0^{2,1}$, достаточно воспользоваться аналогом теоремы Арцела-Асколи [6]. □

Утверждение 2. *Решение задачи (1) представимо с виде асимптотического ряда (2), где функции* p_k *являются решениями задач (3).*

Доказательство. Предстоит доказать, что

$$\sup_{y\in[0,\infty)} |p(y) - \sum_{i=0}^k \delta^i p_i(y)| \le \delta^{k+1}M_k, \ \ \delta \to 0 \tag{7}$$

где постоянная M_k не зависит от δ. Доказательство проводится индукцией по k. Покажем, что

$$|p(y) - p_0(y)| \le \delta M \forall y \in [0,\infty). \tag{8}$$

Обозначим $z = p - p_0$. Для новой функции получим задачу:

$$z'' + z'\int_0^y (1-p_0-z)ds - 2z(1-p_0)+$$

$$+z^2 - p_0' \int_0^y z ds = \delta\Big(p''' \int_0^y (1-p)ds + p''(1-p)\Big), z(0) = z(\infty) = 0. \tag{9}$$

Эта задача имеет единственное классическое решение при любом $\delta \in [0, \infty)$, причем $|z| \leq 1$. Обозначим правую часть уравнения (9) через $G(y)$. Из результатов [1] следует, что $G(y) \leq \delta M_1$ [1]. Предположим существование отрицательного минимума в точке $y^* > 0$. Тогда $z'(y^*) = 0,\ \ z''(y^*) \geq 0$. С другой стороны, используя очевидное неравенство

$$p_0'(y^*) \int_0^{y^*} z ds \leq p_0'(y^*) \cdot z(y^*) \cdot y^*,$$

оценим $z''(y^*)$ сверху следующим образом:

$$z''(y^*) \leq 2z(y^*)(1 - p_0(y^*)) - z^2(y^*) + y^* p_0'(y^*) z(y^*) + \delta G(y^*),$$

откуда непосредственно следует, что $z(y^*)(2(1-p_0(y^*))+y^*p_0'(y^*)) \geq -\delta G(y^*)$. Учитывая отрицательность $z(y^*)$ и положительность выражения $2(1 - p_0(y^*)) + y^*p_0'(y^*))$, которая легко проверяется исходя из того, что это выражение представляет собой строго монотонно возрастающую функцию, получаем оценку

$$z(y^*) \geq -\delta G(y^*)/(2(1 - p_0(y^*)) + y^* p_0'(y^*)).$$

Заметим, что $G(0) = 0$, причем $\lim_{y\to 0} G(y)/(2(1 - p_0(y)) + p_0'(y)) < \infty$, поэтому $z \geq -\delta M_0$.

Получим оценку сверху для z. Теперь допустим существование положительного максимума в точке $y^0 > 0$. Тогда $z'(y^0) = 0,\ \ z''(y^0) \leq 0$. Используя оценку

$$p_0'(y^0) \int_0^{y^0} z ds \geq p_0'(y^0) \cdot y^0 z(y^0),$$

оценим $z''(y^0)$ снизу следующим образом:

$$z''(y^0) \geq 2z(y^0)(1 - p_0(y^0)) - z^2(y^0) + y^0 p_0'(y^0) z(y^0) + \delta G(y^0.,$$

Следовательно,

$$2z(y^0)(1 - p_0(y^0)) - z^2(y^0) + y^0 p_0'(y^0) z(y^0) \leq -\delta G(y^0).$$

Решая квадратное неравенство, получим:

$$z(y^0) \leq z_1 = -2\delta G(y^0)\Big(2(1-p_0(y^0))+y^0p_0'(y^0)+\sqrt{(2(1 - p_0(y^0)) + y^0 p_0'(y^0))^2 + 4\delta G(y^0)}\Big)^{-1}$$

или

$$z(y^0) \geq z_2 = \Big(2(1 - p_0(y^0)) + y^0 p_0'(y^0) + \sqrt{(2(1 - p_0(y^0)) + y^0 p_0'(y^0))^2 + 4\delta G(y^0)}\Big)/2$$

Второе неравенство невозможно, т.к. $z_2 \geq 1-p_0$ при малых δ, а $z(y^0) = p(y^0)-p_0(y_0) < 1-p_0$. Первое неравенство $z(y^0) \leq z_1$ и приводит к требуемой оценке $z \leq \delta M_0$. Теперь обозначим

$$z_k = p - \sum_{i=0}^{k} \delta^i p_i. \tag{10}$$

Для новой функции получим краевую задачу с нулевыми значениями в нуле и бесконечности для уравнения

$$z_k'' + z_k' \int_0^y (1 - \sum_{i=0}^{k} \delta^i p_i) ds - 2z_k(1 - \sum_{i=0}^{k} \delta^i p_i) + z_k u^2 - p_0' \int_0^y \sum_{i=0}^{k} \delta^i p_i ds = \delta G$$

с той же самой функцией G, что в правой части (9). Используя представление (10) и индукционное предположение

$$\sup_{y\in[0,\infty)} |p(y) - \sum_{i=0}^{k-1} \delta^i p_i(y)| \leq \delta^k M_{k-1},\ \ \delta \to 0$$

вытекающее из (7), можно представить G в виде $\delta^{k+1}H(y)$. Доказательство оценки $|z_k| \leq \delta^{k+1}M_k$ при малых δ проводится аналогично доказательству оценки для z с учетом неравенств

$$z_k \leq 1 - \sum_{i=0}^{k} \delta^i p_i, \quad \sum_{i=0}^{k} \delta^i p'' = p_0'' + \sum_{i=1}^{k} \delta^i p_i'' \geq 0,$$

справедливых при малых δ. □

В заключение отметим, что в работе [3] можно найти некоторые численные результаты построения асимптотического приближения решения рассматриваемой задачи.

References

[1] A.G. Petrova, *On the Unique Solvability of the Problem of the Flow of an Aqueous Solution of Polymers near a Critical Point*, Mathematical Notes, **106**:5 (2019), 91–100.

[2] V.A. Pavlovskii, *On theoretical description of weak aqueous solutions of polymers,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, **200**:4 (1971), 809–812.

[3] T.P. Pukhnacheva, *The problem of the axially symmetric flow of an aqueous solution of polymers near a critical point,* Trudy Sem. Geom. i Mat. Model. (Altai Gos. Univ., Barnaul, 2016), **2** (2016), 75–80. (in Russian)

[4] A.V. Pechkurov, *On invertibility in the Schwartz space of the operator generated by a tempered pencil*, Vestn. Voronezh. Gos. Univ., Ser. Fiz. Mat., **2** (2011), 122–128. Zbl 1321.47024

[5] L.A. Lusternik, V.J. Sobolev, *Elements of Functional Analysis,* Frederick Ungar Publishing Company, Constable and Co., New York, London, 1961. Zbl 0096.07802

[6] A.G. Petrova, V.V. Pukhnachev, O.A. Frolovskaya, *Analytical and numerical investigation of unsteady flow near a critical point*, J. Appl. Math. Mech., **80**:3 (2016), 215–224. Zbl 07141106

Anna Georgievna Petrova
Altai State Unuversity,
61, Lenina ave.,
Barnaul, 630090, Russia
E-mail address: annapetrova07@mail.ru