

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том ??, стр. ??-?? (2020)
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx

УДК 517.956
MSC 35L05,35K03,35J05,35J10

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ
ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В.И. Качалов, Д.А. Маслов

ABSTRACT. Currently, the theory of disturbances of linear operators has become the completed section of functional analysis, and all the main cases are considered when the initial and disturbing operators can be both limited and unlimited. The decisions are looking in the form of rows along the degrees of the small parameter and the question arises of the nature of the convergence of these ranks. In the presented work, the conditions for the existence of the holomorphic according to the parameter of the solutions were found in the case when the indignant operator is bilinear.

Keywords: asymptotic convergence, analytical families of operators, Banach theorem on a closed schedule.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих случаях задача линейной теории возмущений выглядит следующим образом:

$$(1) \quad Au + \varepsilon Lu = f,$$

где A и L — линейные операторы, а ε — малый комплексный параметр. В предположении существования решения у невозмущенного уравнения

$$(2) \quad Au = f$$

строится решение уравнения в виде ряда по степеням малого параметра. Вопрос о характере сходимости таких рядов изучен достаточно полно: сходимость

KACHALOV, V.I., MASLOV, D.A., ON THE ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE PROBLEMS OF THE NONLINEAR THEORY OF DISTURBANCES.

© 2023 Качалов В.И., Маслов Д.А.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00496).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

может быть асимптотической, так и в обычном смысле [1]. Особо следует подчеркнуть важность понятий аналитических семейств операторов типа Като и типа (A) [2], дающих условия голоморфной зависимости от малого параметра решений уравнений вида (1), что гарантировало предельный переход, т.е. стремление решения $u(\varepsilon)$ уравнения (1) к решению уравнения (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Если же оператор L является нелинейным, то здесь требуется решить три задачи:

- 1) построить решение в виде ряда по степеням ε ;
- 2) исследовать ряд на сходимость;
- 3) в случае обычной сходимости ряда установить действительно ли его сумма является решением уравнения (1).

Метод малого параметра заложен в трудах Пуанкаре и вопрос голоморфной зависимости решения от малого параметра в нелинейном случае был решен им же для систем дифференциальных уравнений с помощью теорем о разложении [3].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$(3) \quad Au = \varepsilon B(u, Hu) + f,$$

где A — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E ; $B: E \times E \rightarrow E$ — билинейный ограниченный оператор; H — линейный оператор, который может быть как ограниченным, так и неограниченным; правая часть $f \in E$.

Условие (α). Оператор A является замкнутым неограниченным с областью определения D_A и имеет непрерывный обратный оператор A^{-1} .

Будем искать решение уравнения (3) в виде ряда по степеням малого параметра

$$(4) \quad u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^n u_n + \dots$$

Коэффициенты этого ряда удовлетворяют следующей серии уравнений (в соответствии с методом неопределенных коэффициентов):

$$(5) \quad \begin{aligned} Au_0 &= f, \\ Au_1 &= B(u_0, Hu_0), \\ &\dots\dots\dots \\ Au_n &= \sum_{k=0}^{n-1} B(u_k, Hu_{n-k-1}), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Для построения серии уравнений (5) мы воспользовались билинейностью оператора B и правилом Коши перемножения рядов. Пользуясь условием (α),

можно найти коэффициенты ряда (4):

$$\begin{aligned}
 & u_0 = A^{-1}f, \\
 & u_1 = A^{-1}B(u_0, Hu_0), \\
 & \dots\dots\dots \\
 (6) \quad & u_n = A^{-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} B(u_k, Hu_{n-k-1}) \right], \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

В дальнейшем будет использована следующая

Лемма. Пусть последовательность задана рекуррентным образом: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$; $a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \dots + a_{n-2}a_1 + a_{n-1}a_0$, $n = 2, 3, \dots$. Тогда, производящая функция этой последовательности будет голоморфной в круге радиуса $1/4$.

Доказательство. Имеем,

$$(7) \quad \varphi(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$$

— производящая функция данной последовательности.

Вычислим ее квадрат:

$$\begin{aligned}
 \varphi^2(z) = & a_0^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)z + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)z^2 + \dots + \\
 & + (a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \dots + a_{n-2}a_1 + a_{n-1}a_0)z^{n-1} + \dots,
 \end{aligned}$$

или

$$\varphi^2(z) = a_1 + a_2z + a_3z^2 + \dots + a_nz^{n-1} + \dots$$

Отсюда вытекает уравнение для $\varphi(z)$:

$$z\varphi^2(z) - \varphi(z) + 1 = 0,$$

решая которое получим, что

$$\varphi(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}.$$

Голоморфность производящей функции в круге $|z| < 1/4$ очевидна. Разложение функции $\varphi(z)$ в ряд совпадает с рядом (7):

$$\varphi(z) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + 42z^5 + 132z^6 + 429z^7 + \dots$$

Лемма доказана. □

Сформулируем и докажем утверждение о голоморфной зависимости от параметра ε решения уравнения (3).

Теорема 1. Если выполнено условие (α) и оператор H является ограниченным, то уравнение (3) имеет единственное голоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение.

Доказательство. Пусть $\|A^{-1}\| = q$, $\|B\| = b$, $\|H\| = h$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$(8) \quad \begin{aligned} \|u_1\| &\leq qbh\|u_0\|^2, \\ \|u_2\| &\leq \|A^{-1}\| (\|B(u_0, Hu_1)\| + \|B(u_1, Hu_0)\|) \leq 2(qbh)^2\|u_0\|^3, \\ &\dots\dots\dots \\ \|u_n\| &\leq \|A^{-1}\| (\|B(u_0, Hu_{n-1})\| + \|B(u_1, Hu_{n-2})\| + \dots + \\ &\quad + \|B(u_{n-2}, Hu_1)\| + \|B(u_{n-1}, Hu_0)\|) \leq a_n(qbh)^n\|u_0\|^{n+1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Таким образом, в соответствии с оценками (8), ряд (4) с коэффициентами (6) мажорируется рядом

$$(9) \quad \|u_0\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r^n |\varepsilon|^n),$$

где $r = qbh\|u_0\|$, который сходится, в соответствии с леммой, при каждом фиксированном ε таком, что $|\varepsilon| < 1/(4r)$. А это и означает голоморфность суммы $u(\varepsilon)$ ряда (4) в круге радиуса $1/(4r)$. Далее, так как оператор A^{-1} существует, то $u_n \in D_A$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Также из равенств (6) следует, что ряд

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (Au_n)\varepsilon^n$$

сходится в указанном круге, поскольку мажорируется рядом типа ряда (9). Итак, ряд (4) сходится, ряд (10) также сходится, что ввиду замкнутости оператора A означает, что $u(\varepsilon) \in D_A$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} (Au_n)\varepsilon^n = A \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n.$$

Следовательно, $u(\varepsilon)$ является решением уравнения (3), голоморфным в точке $\varepsilon = 0$. Единственность такого решения вытекает из способа построения ряда (4).

Теорема доказана. \square

Замечание 1. Как правило, уравнения вида (3) описывают стационарные процессы.

Пример 1. В параллелепипеде

$$\Pi = \{(x, y, z) : 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c\}$$

задано уравнение

$$(11) \quad \Delta u = -f(x, y, z) + \varepsilon \iiint_{\Pi} \mathcal{K}(x, y, z, x', y', z') u^2(x', y', z') dx' dy' dz',$$

с однородными краевыми условиями

$$(12) \quad u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0.$$

Здесь, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ — оператор Лапласа. Если $f(x, y, z) \in C(\overline{\Pi}) \cap C^1(\Pi)$, ядро интегрального оператора $\mathcal{K}(x, y, z, x', y', z') \in C(\overline{\Pi} \times \overline{\Pi})$, то задача (11), (12) имеет единственное классическое решение $u(x, y, z, \varepsilon)$, голоморфное в точке $\varepsilon = 0$.

Действительно, билинейный оператор

$$B(u, v) \equiv \iiint_{\Pi} \mathcal{K}(x, y, z, x', y', z') u(x', y', z') v(x', y', z') dx' dy' dz',$$

действующий из $C(\overline{\Pi} \times \overline{\Pi})$ в $C(\overline{\Pi})$, является ограниченным; оператор Δ допускает непрерывное обращение с помощью функции Грина [4]

$$\begin{aligned} G(x, y, z, x', y', z') &= \\ &= \frac{8}{abc} \sum_{k, m, n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi n x'}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} \sin \frac{\pi m y'}{b} \sin \frac{\pi k z}{c} \sin \frac{\pi k z'}{c}}{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2}. \end{aligned}$$

Имеем,

$$\begin{aligned} u(x, y, z, \varepsilon) &= \iiint_{\Pi} G(x, y, z, x', y', z') f(x', y', z') dx' dy' dz' - \\ &- \varepsilon \iiint_{\Pi} G(x, y, z, x', y', z') \left[\iiint_{\Pi} \mathcal{K}(x', y', z', x'', y'', z'') \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left(\iiint_{\Pi} G(x'', y'', z'', x''', y''', z''') \cdot \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot f(x''', y''', z''') dx''' dy''' dz''' \right)^2 dx'' dy'' dz'' \right] dx' dy' dz' + \dots \end{aligned}$$

— искомое решение.

3. СЛУЧАЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ БИЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим в банаховом пространстве E уравнение

$$(13) \quad Av = f + \varepsilon B(v, Hv)$$

в случае, когда оператор H неограничен. Сформулируем и докажем соответствующее утверждение.

Теорема 2. *Если выполнено условие (α) и оператор H является замкнутым неограниченным с областью определения $D_H \supset D_A$, то уравнение (13) имеет единственное аналитическое в точке $\varepsilon = 0$ решение $v(\varepsilon)$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор $T = HA^{-1}$. Он является замкнутым, как произведение замкнутого оператора на ограниченный, определен на всем пространстве E ввиду выполнения условия (α) и того факта, что $\text{Im } A^{-1} \subset D_H$. По теореме Банаха о замкнутом графике, оператор $T : E \rightarrow E$ является непрерывным [5].

Так же, как и в предыдущем случае, будем искать решение уравнения (13) в виде ряда по степеням ε :

$$(14) \quad v(\varepsilon) = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots + \varepsilon^n v_n + \dots$$

После подстановки ряда (14) в это уравнение, с учетом оператора T , получим следующую серию уравнений:

$$(15) \quad \begin{aligned} Av_0 &= f, \\ Av_1 &= B(A^{-1}(Av_0), T(Av_0)), \\ &\dots\dots\dots \\ Av_n &= \sum_{k=0}^{n-1} B(A^{-1}(Av_k), T(Av_{n-k-1})), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Докажем методом математической индукции, что при $n = 1, 2, \dots$

$$(16) \quad \|Av_n\| \leq a_n \|T\|^n b^n q^n \|f\|^{n+1}.$$

Здесь $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность из леммы, $b = \|B\|$, $q = \|A^{-1}\|$.

При $n = 1$ неравенство (16), очевидно, выполняется. Предположим, что неравенство выполняется при $n = m$. Получим оценку для Av_{m+1} :

$$\begin{aligned} \|Av_{m+1}\| &\leq \|A^{-1}\| \|B\| \|T\| \sum_{k=0}^m \|Av_k\| \|Av_{m-k}\| \leq \\ &\leq qb \|T\| \sum_{k=0}^m a_k a_{m-k} \|T\|^k \|T\|^{m-k} b^k b^{m-k} \|f\|^{k+1} \|f\|^{m-k+1} q^k q^{m-k} = \\ &= a_{m+1} q^{m+1} b^{m+1} \|T\|^{m+1} \|f\|^{m+2}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (16) при $n = m + 1$ выполнено и, следовательно, доказано.

Из формул (16) вытекает оценка для коэффициентов v_n :

$$\|v_n\| \leq a_n b^n q^{n+1} \|T\|^n \|f\|^{n+1},$$

а, значит, ряд (14) сходится в окрестности радиуса $1/(4bq\|T\|\|f\|)$ точки $\varepsilon = 0$. Теорема доказана. \square

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} y^{(m)} + p_1(x)y^{(m-1)} + \dots + p_{m-2}(x)y'' + \varepsilon y y' + p_m(x)y &= f(x), \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(m-1)}(0) &= 0, \quad x \in [0, X], \end{aligned}$$

в предположении, что функции $p_1(x), \dots, p_{m-2}(x), p_m(x), f(x)$ непрерывны на отрезке $[0, X]$. С помощью оператора

$$L_m = \frac{d^m}{dx^m} + p_1(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + p_{m-2}(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_m(x),$$

действующего в пространстве $C[0, X]$, с областью определения $D_{L_m} = \{w(x) \in C^m[0, X], w(0) = w'(0) = \dots = w^{(m-1)}(0) = 0\}$, данное уравнение примет следующий вид:

$$(17) \quad L_m y = \tilde{B}(y, \tilde{H}y) + f,$$

где $\tilde{B}(u, v) = -uv$ — билинейный оператор, определенный на $C[0, X] \times C[0, X]$, $\tilde{H} = \frac{d}{dx}$ — неограниченный оператор, с областью определения $D_{\tilde{H}} = \{w(x) \in C^1[0, X], w(0) = 0\} \supset D_{L_m}$.

Как известно, оператор L_m непрерывно обратим и

$$L_m^{-1}g = \int_0^x \mathcal{K}(x, \xi)g(\xi) d\xi,$$

где ядро $\mathcal{K}(x, \xi)$ построено по фундаментальной системе решений однородного уравнения $L_m y = 0$ [6]. В итоге, имеем решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) = & \int_0^x \mathcal{K}(x, x_1)f(x_1) dx_1 - \\ & - \varepsilon \left[\int_0^x \mathcal{K}(x, x_1)\mathcal{K}(x_1, x_1)f(x_1) \left(\int_0^{x_1} \mathcal{K}(x_1, x_2)f(x_2) dx_2 \right) dx_1 + \right. \\ & \left. + \int_0^x \mathcal{K}(x, x_1) \left(\int_0^{x_1} \mathcal{K}'_{x_1}(x_1, x_2)f(x_2) dx_2 \int_0^{x_1} \mathcal{K}(x_1, x_2)f(x_2) dx_2 \right) dx_1 \right] + \dots \end{aligned}$$

Замечание 2. Если не выполнено условие $D_H \supset D_A$, то уравнение (13) является сингулярно возмущенным и в общем случае его решение не является аналитическим по ε . Для решения таких уравнений разработаны различные методы [7, 8, 9, 10], но все они являются асимптотическими в том смысле, что ряды, представляющие решения сходятся асимптотически при $\varepsilon \rightarrow 0$. Более того они, как правило, имеют следующий вид:

$$(18) \quad v(\varepsilon) = v_0(\varepsilon^{-1}) + \varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}) + \dots + \varepsilon^n v_n(\varepsilon^{-1}) + \dots$$

Среди основных методов выделяется метод регуляризации С.А. Ломова [11, 12], в рамках которого впервые найдены условия обычной сходимости рядов вида (18). При этом $v(\varepsilon)$ называется псевдоаналитическим (псевдоголоморфным) решением.

REFERENCES

- [1] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV*, Academic Press, New York etc., 1978. Zbl 0401.47001.
- [2] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Zbl 0836.47009.
- [3] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Inc., New York, 1955.
- [4] A.V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1976.
- [5] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1965.
- [6] V.A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka, Moscow, 1980.
- [7] S.A. Lomov, *Introduction to the General Theory of Singular Perturbations. Translations of Mathematical Monographs, 112*, AMS, Providence, 1992. Zbl 0782.34063.
- [8] A.B. Vasilieva, V.F. Butuzov, *Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed problems*, Nauka, Moscow, 1973. Zbl 0364.34038.
- [9] S. Malek, *On Boundary Layer Expansions For a Singularly Perturbed Problem With Confluent Fuchsian Singularities*, Mathematics, **8**:2 (2020), 189.
- [10] V.Y. Glizer, *Asymptotic Analysis of Spectrum and Stability for One Class of Singularly Perturbed Neutral-Type Time Delay Systems*, Axioms, **10**:4 (2021), 325.
- [11] S.A. Lomov, I.S. Lomov, *Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer*, Moscow Publishing House University, Moscow, 2011.

- [12] V.I. Kachalov, S.A. Lomov, *Smoothness of the solutions of differential equations with respect to a singularly entering parameter*, Sov. Math. Dokl., **37**:2 (1988), 465–467. Zbl 0703.34063.

VASILIIY IVANOVICH KACHALOV
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY «MPEI»,
ST. KRASNOKAZARMENNAYA, 14,
111250, MOSKOW, RUSSIA
E-mail address: `vikachalov@rambler.ru`

DMITRY ALEXANDROVICH MASLOV
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY «MPEI»,
ST. KRASNOKAZARMENNAYA, 14,
111250, MOSKOW, RUSSIA
E-mail address: `maslovdma@mpei.ru`