S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.9
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35R11

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА КАПУТО ПО ВРЕМЕНИ

Е.Д. ФЕДОТОВ

Abstract. In this paper, we study the Cauchy problem for a system of partial differential equations with fractional Caputo derivative of order $\alpha \in (0,1)$. Existence and uniqueness theorems are obtained for the given Cauchy problem, as well as an estimate for the solution in a weighted Sobolev space. Moreover, similar theorems are obtained in the case when there is a lower term with variable coefficients.

Keywords: Cauchy problem, partial differential equations, fractional Caputo derivative, time-fractional equations, existence and uniqueness

1. Ведение

Обыкновенные и частные дифференциальные уравнения с дробными производными Римана-Лиувилля, Капуто, в последние годы разбудили значительный интерес, как в математике, так и в ее приложениях. В математических книгах[1],[2],[3],[4] по дробно-дифференциальным уравнениям подход Римана-Лиувилля к понятию дробной производной обычно используют так:

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{0t}\varphi(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{[\alpha]+1} \mathrm{I}^{1-\{\alpha\}}_{0t}\varphi(t),$$

где

$$\mathrm{I}^{\alpha}_{0y}\varphi(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^y (y-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau,\ \alpha > 0,$$

Fedotov, E.D., The Cauchy problem for some systems of partial differential equations with fractional Caputo order derivative with respect to time.

Работа поддержана Минобрнауки РФ, соглашение от 16.02.2023 № 075-02-2023-947.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

является оператором дробного интегрирования Римана-Лиувилля порядка α. При моделировании реальных процессов начальные условия, как правило, вводятся через заданное число ограниченных начальных значений, принимаемых аргументом и его производных целого порядка. В целях удовлетворения этих требований, Капуто ввел альтернативное определение дробной производной[5]:

$$\partial_{0t}^{\alpha}\varphi(t) = \mathrm{I}_{0y}^{1-\{\alpha\}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{[\alpha]+1}\varphi(t).$$

Схожая задача но для уравнения высокого порядка была исследована в работе [6] а также в работе [7] были получены результаты для краевой задачи на полу-оси для системы уравнений в дробной производной Капуто. В работах [9], [10] описывается операторный метод представления решения. В данной работе изучается задача Коши для некоторой системы дифференциальных уравнений в частных производных с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$. Получены теоремы существования и единственности для данной задачи Коши, а также оценка решения в весовом пространстве Соболева. Более того, аналогичные теоремы получаются и в случае, когда имеется младший член с переменными коэффициентами.

2. Вспомогательные сведения

2.1. **Предварительные сведения.** Введем некоторые обозначения:

- $\mathbb{R}_1^+ = \{t \,|\, t \in \mathbb{R}_1,\, t > 0\}$
- $\mathbb{R}_{n+1}^+ = \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_n$
- $\mathbb{L}_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right) = \{u(t,x) \,|\, e^{-\gamma t}u(t,x) \in \mathbb{L}_p\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)\}$
- $\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,\alpha}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)$ является замыканием $\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,1}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)$ по норме $\|u(t,x)\|_{\mathbb{L}_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)} + \sum_{k=1}^n \left\|\frac{\partial}{\partial x_k}u(t,x)\right\|_{\mathbb{L}_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)} + \|\partial_t^{\alpha}u(t,x)\|_{\mathbb{L}_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)}$.

Введем линейное нормированное пространство $\tilde{L}_2(\mathbb{C}_{\gamma}^+)$. Будем говорить что $v(\tau)$ определенная в комплексной полуплоскости $\mathbb{C}_{\gamma}^+ = \{\tau \in \mathbb{C} : Re\tau > \gamma\}$, принадлежит $\tilde{L}_2(\mathbb{C}_{\gamma}^+)$, если $v(\tau)$ аналитическая в $\mathbb{C}_{\gamma}^+$ и выполнено соотношение

$$\sup_{\sigma>\gamma}\int_{\mathbb{R}} |v(i\eta+\sigma)|^2 d\eta < \infty.$$

Лемма 1. *$C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)$ плотно в $\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1;\alpha}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)$ при $0 < \alpha < \frac{p-1}{p}$, $\gamma > 0$*

Доказательство леммы 1. Пусть $u(t,x) \in \mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,1}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)$ тогда

$$\|u(t,x)\|_{\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1;\alpha}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)} \le \|u(t,x)\|_{\mathbb{L}_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)} + \sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_k}\right\|_{\mathbb{L}_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)} + \|\partial_{0t}^{\alpha}u(t,x)\|_{\mathbb{L}_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)}$$

$$\|\partial_{0t}^{\alpha}u(t,x)\|_{\mathbb{L}_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{n+1}^+\right)} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_{\mathbb{R}_n}\int_0^{\infty} e^{-\gamma p t}\left|\int_0^t \frac{u_t'(\tau,x)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right|^p\right]^{1/p} dt dx.$$

Заметим что

$$(1)\qquad \left|\int_0^t \frac{u_t'(\tau,x)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right| \le \left(\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha q}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t |u_t'(\tau,x)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Тогда в силу (1) выходит, что

$$\|\partial_{0t}^{\alpha} u(t,x)\|_{\mathbb{L}_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)} \leq c\,\|u_t'(t,x)\|_{\mathbb{L}_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)},\; c>0$$

или же

$$\|u(t,x)\|_{\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,\alpha}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)} \leq c\,\|u(t,x)\|_{\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,1}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)}.$$

Отсюда следует, что $\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,1}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right) \subseteq \mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,\alpha}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)$ плотно и непрерывно.

Следовательно, для любой вектор -функции $u(t,x)$ из $\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,\alpha}$ будем иметь

$$\forall\epsilon\,\exists v \in \mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,1}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right) : \|u-v\|_{\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,\alpha}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)} \leq \epsilon$$

$$\exists v_\epsilon \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right) : \|v-v_\epsilon\|_{\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,1}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)} \leq \epsilon.$$

Тогда

$$\|u-v_\epsilon\|_{\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,\alpha}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)} \leq \|u-v\|_{\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,\alpha}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)} + \|v-v_\epsilon\|_{\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,\alpha}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)} \leq (1+c)\epsilon$$

отсюда следует, что $C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)$ плотно в $\mathbb{W}_{p,\gamma}^{1,\alpha}\left(\mathbb{R}_{n+1}^{+}\right)$

Лемма 2. [8] *Пусть $v(\tau) \in \tilde{L}_2(\mathbb{C}_\gamma^+)$. Обозначим через $w(t,\sigma), \sigma > \gamma$ прообраз преобразования Фурье функции $v(i\eta+\sigma)$ по η. Тогда справедливо, что функция $w(t,\sigma)e^{\sigma t}$ не зависит от $\sigma > \gamma$, т.е.*

$$w(t,\sigma_1)e^{\sigma_1 t} = w(t,\sigma_2)e^{\sigma_2 t},\; \sigma_1,\sigma_2 > \gamma.$$

3. Однозначная разрешимость задачи Коши для некоторой системы в частных производных первого порядка с производной Капуто

3.1. **Существование и единственность решения.** Рассмотрим задачу Коши для некоторой системы с дробным производным по времени.

$$^{C}L[u] \equiv A_0\partial_{0t}^{\alpha}u + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = f(t,x),\; t>0,\; x\in\mathbb{R}_n,\; 0<\alpha<\frac{p-1}{p},\; p>1,$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

где A_k постоянная $m\times m$-матрица $k=\overline{0,n}$. Также выполняются условия

$$det\left(\tau^{\alpha}A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k i y_k\right) \neq 0,\; Re\,\tau \geq 0,\; y\in\mathbb{R}_n,\; |\tau|^{\alpha}+|y| \neq 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Для любой правой части $f(t,x) \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^{+})$, $\gamma>0$, задача Коши (2) имеет единственное решение $u(t,x) \in W_{p,\gamma}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_{n+1}^{+})$, и справедлива оценка*

$$\|u(t,x)\|_{W_{p,\gamma}^{1,\alpha}(\mathbb{R}_{n+1}^{+})} \leq c\|f(t,x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^{+})}, \tag{4}$$

где константа $c>0$ не зависит от $f(t,x)$.

Доказательство теоремы 1. Сначала установим существование решения задачи Коши. Пусть $f(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1}^+)$. Рассмотрим систему уравнений, которая получается формальным применением оператора Фурье-Лапласа к задаче (2) $(\tau^\alpha A_0 + \sum_{k=1}^n A_k i y_k)\,\omega(\tau,y) = \tilde{f}(\tau,y)$, $Re\,\tau > 0$, $y \in \mathbb{R}_n$, где $\tilde{f}(\tau,y)$ образ Фурье-Лапласа $f(t,x)$. По условию (3) существует обратная матрица $\left(\tau^\alpha A_0 + \sum_{k=1}^n A_k i y_k\right)^{-1}$, элементы которой являются аналитическими функциями по (τ,y), $Re\,\tau > 0$, $y \in \mathbb{R}_n$. Эту матрицу можно представить в виде

$$\left(\tau^\alpha A_0 + \sum_{k=1}^n A_k i y_k\right)^{-1} = \Delta^{-1}\left(\frac{\tau^\alpha}{\Delta}A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \frac{i y_k}{\Delta}\right)^{-1}, \tag{5}$$

где $\Delta = |\tau|^\alpha + |y|$. Следовательно, для любого $\gamma_0 > 0$ элементы матрицы $\left(\tau^\alpha A_0 + \sum_{k=1}^n A_k i y_k\right)^{-1}$ являются ограниченными функциями при $Re\,\tau \ge \gamma_0$, $y \in \mathbb{R}_n$.

Поскольку $f(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1}^+)$, то к вектор-функции $w(\tau,y) = (\tau^\alpha A_0 + \sum_{k=1}^n A_k i y_k)^{-1}\tilde{f}(\tau,y)$ применима лемма 2. Следовательно, вектор-функция

$$v(t,y) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta+\gamma)t} w(i\eta+\gamma,y)\,d\eta \tag{6}$$

не зависит от $\gamma \ge \gamma_0$. При этом она является решением задачи Коши $A_0\partial_{0t}^\alpha v(t,y) + \sum_{k=1}^n A_k i y_k v(t,y) = \hat{f}(t,y)$, $t > 0$, $v|_{t=0} = 0$.

Поскольку $f(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1}^+)$, из свойств матрицы $\left(\tau^\alpha A_0 + \sum_{k=1}^n A_k i y_k\right)^{-1}$ следует, что к вектор-функции (6) можно применить обратный оператор Фурье по y и полученная функция

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{ixy} v(t,y)\,dy \tag{7}$$

является бесконечно дифференцируемым решением задачи Коши (2).

Установим L_p-оценки решения задачи Коши используя представление (7). Поскольку для любого $\gamma_0 > 0$ вектор-функция не зависит от $\gamma \ge \gamma_0$, имеем

$$\left\|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_k}\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^+)} = (2\pi)^{-(n+1)/2}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{\mathbb{R}_1} e^{(i\eta+\gamma)t+ixy}(iy_k)\right.$$
$$\left.\times\left((i\eta+\gamma)^\alpha A_0 + \sum_{k=1}^n A_k i y_k\right)^{-1}\tilde{f}(i\eta+\gamma,y)\,d\eta\,dy\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^+)}, \quad k = \overline{1,n}.$$

По теореме Лизоркина о мультипликаторах [8] элементы матрицы $(iy_n)((i\eta+\gamma)^\alpha A_0 + \sum_{k=1}^n A_k i y_k)^{-1}$, являются мультипликаторами, и в силу (5) получим

$$\left\|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_k}\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^+)} \le c_1\,\|f(t,x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^+)},$$
$$\|u(t,x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^+)} \le \frac{c_1}{\gamma}\,\|f(t,x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n+1}^+)},$$

где $1 < p < \infty$, $\gamma \ge \gamma_0 > 0$ и константа $c_1 > 0$ не зависит от $f(t,x), \gamma$. Далее, оценим

$$\|\partial_{0t}^{\alpha}u(t,x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} = \frac{(2\pi)^{-(n+1)/2}}{\Gamma(1-\alpha)}\left\|\int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{\mathbb{R}_1} e^{(i\eta+\gamma)s+ixy}(i\eta)\left((i\eta+\gamma)^{\alpha}\right.\right.$$

$$\left.\left. A_0+\sum_{k=1}^n A_k iy_k\right)^{-1}\tilde{f}(i\eta+\gamma,y)d\eta dy\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \le c_2\left\|\int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{\mathbb{R}_1} e^{(i\eta+\gamma)t+ixy}(i\eta)^{\alpha}\right.$$

$$\left.\left((i\eta+\gamma)^{\alpha}A_0+\sum_{k=1}^n A_k iy_k\right)^{-1}\tilde{f}(i\eta+\gamma,y)d\eta dy\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \le c_3\|f(t,x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})}.$$

Из формул (6),(7) следует что для $f(t,x)\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^+_{n+1})$ мы построили решения в операторном виде $u(t,x)=Sf(t,x)$. В силу полученных оценок и плотности $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^+_{n+1})$ в $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$ оператор S можно продолжить на все пространство $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$ с сохранением нормы. Продолженный оператор будем обозначать $\overline{S}$, т.е.

$$\overline{S}: L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1}) \to W^{1,\alpha}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1}),\ 1<p<\infty,\ \gamma>0 \tag{8}$$

Для $\overline{S}$ справедливы оценки

$$\left\|\partial_{0t}^{\alpha}\overline{S}f(t,x)\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \le c_3\left\|f(t,x),\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \tag{9}$$

$$\left\|\frac{\partial\overline{S}f(t,x)}{\partial x_k}\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \le c_1\left\|f(t,x)\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})},\ k=\overline{1,n} \tag{10}$$

где $1<p<\infty$, $\gamma>0$.

Из выше перечисленного вытекает, что $u(t,x)=\overline{S}f(t,x)$-решение задачи Коши (2) из класса $W^{1,\alpha}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$ и справедлива оценка (4).

Докажем единственность решения. Пусть вектор-функция $u(t,x)$ класса $W^{1,\alpha}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$ с компактным носителем по x является решением задачи (2) с нулевой правой частью. Очевидно, что $A_0\partial_{0t}^{\alpha}\hat{u}(t,y)+\sum_{k=0}^n A_k iy_k\hat{u}(t,y)=0$, $t>0$, и $\hat{u}|_{t=0}=0$. Поэтому $\hat{u}(t,y)=0$, $y\in\mathbb{R}_n$, откуда $u(t,x)=0$. Следовательно решение задачи Коши (2) с компактным носителем по x определяется единственным образом.

Из проведенных выше рассуждений вытекает, что для любой вектор функции $u(t,x)\in W^{1,\alpha}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$ с компактным носителем по x такой, что $u|_{t=0}=0$, справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^n\left\|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \le c\left\|\left(A_0\partial_{0t}^{\alpha}+\sum_{k=1}^n A_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)u(t,x)\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})}, \tag{11}$$

где $c>0$-абсолютная константа.

Пусть $u(t,x)\in W^{1,\alpha}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$-произвольное решение задачи Коши с нулевой правой частью. В силу леммы 2 для произвольного $\epsilon>0$ найдем вектор-функцию $u_{\epsilon}(t,x)\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^+_{n+1})$ такую, что

$$\|u(t,x)-u_{\epsilon}(t,x)\|_{W^{1,\alpha}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \le \epsilon. \tag{12}$$

В силу (11) для $u_\epsilon(t,x)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{k}\left\|\frac{\partial u_\epsilon(t,x)}{\partial x_k}\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \le c\left\|\left(A_0\partial^\alpha_{0t}+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)u_\epsilon(t,x)\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})}$$
$$= c\left\|\left(A_0\partial^\alpha_{0t}+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)(u_\epsilon(t,x)-u(t,x))\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})}$$
$$\le c_1\left\|A_0\partial^\alpha_{0t}(u_\epsilon(t,x)-u(t,x))\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})}+$$
$$c_2\left\|\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial}{\partial x_k}(u_\epsilon(t,x)-u(t,x))\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})},$$

где константы $c_i>0$ не зависят от ϵ, $u_\epsilon(t,x)$, $u(t,x)$. В силу (12)

$$\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial u_\epsilon(t,x)}{\partial x_k}\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \le (c_1+c_2)\epsilon$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_k}\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \le \sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial u_\epsilon(t,x)}{\partial x_k}\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_k}(u(t,x)-u_\epsilon(t,x))\right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \le (c_1+c_2+1)\epsilon.$$

Поскольку $\epsilon>0$ произвольно, имеем $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_k}=0$, $k=\overline{1,n}$. Следовательно $u(t,x)=0$, т.е. решение задачи Коши (2) из класса $W^{1,\alpha}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$ определяется единственным образом.

3.2. **Случай с младшим членом.** Рассмотрим задачу Коши для некоторой системы с дробной производной по времени.

$$A_0\partial^\alpha_{0t}u+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+C(x)u(t,x)=f(t,x),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}_n,\ 0<\alpha<\frac{p-1}{p},\ p>1$$

$$u|_{t=0}=0, \tag{13}$$

где A_0 невырожденная $m\times m$-матрица. Также выполняются условия

$$det\left(\tau^\alpha A_0+\sum_{k=1}^{n}A_k iy_k\right)\ne 0,\ Re\,\tau>0,\ y\in\mathbb{R}_n,\ |\tau|^\alpha+|y|\ne 0, \tag{14}$$

$$|det\,(C(x))|<\infty,\ det\,(E+C(x))\ne 0,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}_n. \tag{15}$$

Теорема 2. *Для любой правой части $f(t,x)\in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$, $\gamma>0$, задача Коши (13) имеет единственное решение $u(t,x)\in W^{1,\alpha}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$, и справедлива оценка*

$$\|u(t,x)\|_{W^{1,\alpha}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})}\le c\,\|f(t,x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})}, \tag{16}$$

где константа $c>0$ не зависит от $f(t,x)$.

Доказательство теоремы 2. Построим решение задачи Коши (13) для системы с младшим членом методом возмущений. Будем искать решение в виде

$$u(t,x) = \overline{S}\phi(t,x). \tag{17}$$

Для неизвестной вектор-функции $\phi(t,x)$ получаем уравнение

$$\phi(t,x) + C(x) \circ \overline{S}\phi(t,x) = f(t,x). \tag{18}$$

В силу (15) и (10)

$$\left\| C(x) \circ \overline{S}\phi(t,x) \right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \leq c(\gamma) \left\| \phi(t,x) \right\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})},$$

где константа $c(\gamma) > 0$ не зависит от $\phi(t,x)$, при этом $c(\gamma) \to 0$, если $\gamma \to +\infty$. Следовательно, существует $\gamma_0 > 0$ такое, что норма оператора $C(x) \circ \overline{S} : L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1}) \to L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$, $\gamma \geq \gamma_0$, строго меньше единицы. Тогда уравнение (18) однозначно разрешимо: $\phi(t,x) = \left(E + C(x) \circ \overline{S}\right)^{-1} f(t,x) \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$. При этом

$$\|\phi(t,x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})} \leq (1 - \|C(x) \circ \overline{S}\|)^{-1} \|f(t,x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})}.$$

Подставляя найденную вектор-функцию в (17), получаем решение задачи Коши (13) в виде: $\overline{S} \circ (E + C(x) \circ \overline{S})^{-1} f(t,x) \in W^{1,\alpha}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^+_{n+1})$, $1 < p < \infty$, $\gamma \geq \gamma_0$. Так же данное решение удовлетворяет неравенству (16).

Докажем единственность решения. Пусть $u(t,x)$ является решением задачи Коши (13) с нулевой правой частью. Тогда выходит что $(E + C(x) \circ \overline{S})\phi(t,x) = 0$ откуда очевидно что $\phi(t,x) = 0$ или же $u(t,x) = 0$. Следовательно, решение задачи Коши (13) определяется единственным образом.

References

[1] Pshu, A.V, *Fractional Partial Differential Equation*, Research Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the RAS. — M.:Nauka, 2005. — 199p. — ISBN 5-02-033721-8

[2] Nakhushev A.M., *Fractional calculus and its application*, M.:FIZMATLIT, 2003. — 272p. — ISBN 5-9221-0440-3

[3] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications* Gordon and Breach Science Publishers, Yveron, 1993. 1012 p.

[4] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations* Academic press, San Diego

[5] Caputo M., *Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent-II*, Geophysical Journal International. 13 (5): 529–539. doi:10.1111/j.1365-246x.1967.tb02303.x – via Oxford University Press.

[6] Ivan E. Egorov and Egor D. Fedotov, *The Cauchy problem for high-order equations with a Caputo derivative*, AIP Conference Proceedings 2328, 020013 (2021) https://doi.org/10.1063/5.0043886

[7] I. E. Egorov and E. D. Fedotov, *A boundary value problem on the semi-axis for a system of differential equations with a fractional Caputo derivative*, AIP Conference Proceedings 2505, 050001 (2022) https://doi.org/10.1063/5.0100723

[8] Demidenko G. V., Uspensky S. V., *Equations and systems not resolved with respect to the highest derivative : On the 90th anniversary of academician S.L.Sobolev*, Novosibirsk : Nauchnaya kniga, 1998 . – 438 p. - ISBN 5-88119-018-1.

[9] R. Ashurov, A. Cabada, B. Turmetov, *Operator method for construction of solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients*, Fractional Calculus and Applied Analysis, Volume 19, Issue 1, Pages 229–252, ISSN (Online) 1314-2224, ISSN (Print) 1311-0454, DOI: https://doi.org/10.1515/fca-2016-0013.

[10] Gomoyunov, M. I. *On representation formulas for solutions of linear differential equations with Caputo fractional derivatives.* Fractional Calculus and Applied Analysis, 23(4), 1141–1160. DOI: https://doi.org/10.1515/fca-2020-0058.

[11] Mamchuev M. O., *Nonlocal boundary value problem for a system of partial differential equations of fractional order* Mathematical notes of NEFU. 2019. T.26. №1 P.25-31. https://doi.org/10.25587/SVFU.2019.101.27244

Egor Dmitrievich Fedotov
Yakutsk branch of Far Eastern Center of Mathematical Research,
58 Belinsky str,
677027, Yakutsk, Russia
Email address: egorfedotov2011@gmail.com