S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 60-11

О СВОЙСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ИНВАРИАНТНЫМИ СВЯЗЯМИ

С.В. ЧЕБОТАРЕВ

Abstract. We considers some properties of finite sequences with invariant linkages, which are formed when constructing sequences with averaged relationships by the sums of random variables of the original sequence. We also investigate the properties of limit sequences with invariant linkages constructed for the original sequences with a nontrivial weak limit of sum of random variables.

Keywords: sequences of random variables, properties of sequences of random variables, limit sequences of random variables, properties of limit sequences of random variables.

1. Введение

Стационарные случайные процессы - это обширный активно развивающийся раздел теории вероятностей. Этой теме посвящено очень много различных публикаций. Отметим лишь некоторые из них: [1]-[7].

В этой статье рассматриваются подмножество стационарных в узком смысле последовательностей случайных величин, обозначенных автором последовательностями с инвариантными связями. В предыдущих работах автора (см. [8]-[12]) были введены в рассмотрение последовательности с усредненными связями, которые строились как последовательности, имеющие такое же распределение суммы случайных величин, что и исходная последовательность, но имеющая более равномерное распределение вероятностей среди полученных случайных величин. Здесь же эти последовательности выделены в отдельный класс и рассмотрены некоторые свойства последовательностей этого класса.

Chebotarev, S.V., On some properties of sequences of random variables with invariant linkages.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

Рассмотрим последовательности случайных величин $\xi = (\xi_t)_{t\in I}$ заданных на вероятностном пространстве $(\Omega_I,\ \mathfrak{A}_I,\ \mathbf{P}_{\xi_I})$ со значениями $\xi_t(\omega_t) \in \mathfrak{X}_t,\ \omega_t \in \Omega_t$, где $\mathfrak{X}_t$ - множество значений t-й случайной величины. Множество значений последовательности ξ будем обозначать как $\mathfrak{X}_I = \mathfrak{X}_{t_1} \times \mathfrak{X}_{t_2} \times \ldots \times \mathfrak{X}_{t_m}$, где $I = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$.

Будут рассматриваться последовательности случайных величин двух видов: абсолютно непрерывных и дискретных случайных величин. Причем дискретные случайные величины представлены двумя типами:

- случайные величины радемахеровского типа: $\mathfrak{X}_t = \mathfrak{X}(\theta) = \{-\theta; \theta\}$;
- решетчатые случайные величины: $\mathfrak{X}_t = \mathfrak{X}(\theta, s) = \{\theta(2k-s); k = 0, 1, \ldots, s\}$, где θ - шаг решетчатого распределения.

Как и прежде обозначим через v_I, где $I = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ и $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$, начальный смешанный момент m случайных величин $\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_m}$ порядка $|I| = m$:
$$v_I = \mathbf{M}\xi_{t_l}\xi_{t_2}\cdots\xi_{t_m}.$$
Кроме того введем в рассмотрение суммарный смешанный момент порядка m:
$$v_m = \sum_{|I|=m} v_I, \quad \forall m = 1, \ldots, n,\ \text{причем при } m = 0,\ \text{положим } v_0 = 1.$$
В дальнейшем будем также использовать два вида усредненных смешанных моментов порядка m:
$$\dot{v}_m = \frac{v_m}{C_n^m}, \quad \forall m = 1, \ldots, n;$$
а также
$$\ddot{v}_m = \frac{v_m}{\sqrt{C_n^m}}, \quad \forall m = 1, \ldots, n.$$
Здесь C_n^m – биномиальный коэффициент, число сочетаний из n по m, определяет число различных начальных смешанных моментов, входящих в суммарный смешанный момент порядка m. Когда необходимо будет в явном виде указать, что суммарный смешанный момент v_m или какой-либо из усредненных смешанных моментов $\dot{v}_m$, $\ddot{v}_m$ определен для последовательности ξ, то будем писать $v_m(\xi)$ или $\dot{v}_m(\xi)$, $\ddot{v}_m(\xi)$ соответственно.

Введем понятие последовательности (конечной или бесконечной) с инвариантными связями, основной особенностью которой является инвариантность совместных вероятностей от конечного набора случайных величин относительно их замены.

Определение 1. *Последовательность $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_t)_{t\in I}$, заданную на вероятностном пространстве $(\Omega_I,\ \mathfrak{A}_I, \mathbf{P}_{\hat{\xi}_I})$ со значениями $\hat{\xi}_t(\omega_t) \in \mathfrak{X}_t, \omega_t \in \Omega_t$ будем называть последовательностью с инвариантными связями, если для любых конечных подмножеств L и J множества I, таких, что $|L| = |J| = m$ и для любого измеримого множества $B \in \mathfrak{X}_{(m)}$ справедливо*

$$\mathbf{P}(\hat{\xi}_L \in B) = \mathbf{P}(\hat{\xi}_J \in B). \tag{1}$$

Из определения сразу следует, что вероятность различных событий для таких последовательностей зависит только от размерности и состава множества $B \in \mathfrak{X}_{(m)}$ и совершенно не зависит от набора и порядка следования номеров случайных величин, инициирующих эти значения. Если сравнивать данное определение с различными видами стационарности последовательностей случайных величин, то из определения видно, что оно усиливает свойство стационарности в узком смысле в том смысле, что если стационарность в узком смысле определяет инвариантность совместных вероятностей случайных величин относительно сдвига всех номеров на одну величину, то здесь инвариантность постулируется относительно произвольного изменения номера каждой переменной. Это как бы "совершенно стационарные последовательности". Существование таких последовательностей, их построение и использование рассматривались в статьях [8]-[12]. Там же показано, что для каждой исходной последовательности с конкретным распределением сумм существует последовательность с инвариантными связями, которая имеет такое же распределение сумм. Это позволяет использовать эти последовательности, как представителя последовательностей с таким распределением сумм. Целесообразность этого связано с тем, что в силу своих свойств в некоторых случаях это может упростить решение поставленных задач.

2. Основной результат

Свойство 1. *Пусть дана последовательность случайных величин с инвариантными связями* $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_t)_{t\in I}$*, заданная на вероятностном пространстве* $(\Omega_I,\ \mathfrak{A}_I, \mathbf{P}_{\hat{\xi}_I})$*, тогда она состоит из одинаково распределенных случайных величин.*

Доказательство: Прямо следует из определения при $m = 1$. □

Свойство 2. *Пусть задана последовательность дискретных случайных величин* $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_t)_{t\in I}$ *на вероятностном пространстве* $(\Omega_I,\ \mathfrak{A}_I, \mathbf{P}_{\hat{\xi}_I})$*. Тогда она является последовательностью с инвариантными связями тогда и только тогда, когда для любого конечного подмножества номеров* $L = \{t_{l_1}, t_{l_2}, \dots, t_{l_m}\} \subset I$ *и любого подмножества значений* $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathfrak{X}_{(m)}$ *справедливо*

$$\mathbf{P}(\hat{\xi}_{t_{l_1}} = x_1, \dots, \hat{\xi}_{t_{l_m}} = x_m) = \mathbf{P}(\hat{\xi}_{t_{l_1}} = x_{i_1}, \dots, \hat{\xi}_{t_{l_m}} = x_{i_m}), \tag{2}$$

где $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$ *– произвольная перестановка вектора* $(x_1, x_2, \dots, x_m)$*.*

Доказательство: В определении 1 возьмем в качестве $B \subset \mathfrak{X}_{(m)}$ одноэлементное множество $B = \{(x_1, x_2, \dots, x_m)\}$ значений случайных величин $\xi_{t_1}(\omega), \dots, \xi_{t_m}(\omega)$ на произвольном элементарном исходе $\omega \in \Omega_I$, положим в качестве $L = \{t_{l_1}, t_{l_2}, \dots, t_{l_m}\}$ а в качестве $J = \{t_{l_{i_1}}, t_{l_{i_2}}, \dots, t_{l_{i_m}}\}$. Учитывая, что совместная вероятность не зависит от порядка объявления случайных величин и согласно определению 1 получаем необходимый результат.

Обратно: Пусть выполнено (2) покажем что тогда выполняется и соотношение (1). Возьмем произвольные конечные подмножества номеров $L, J \subset I$, такие, что $|L| = |J| = m$ и выберем некоторое одноэлементное множество значений $B = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathfrak{X}_{(m)}\}$. Проверим справедливость

$$\mathbf{P}(\hat{\xi}_{l_1} = x_1, \hat{\xi}_{l_2} = x_2, \dots, \hat{\xi}_{l_m} = x_m) = \mathbf{P}(\hat{\xi}_{j_1} = x_1, \hat{\xi}_{j_2} = x_2, \dots, \hat{\xi}_{j_m} = x_m).$$

Для упрощения изложения предположим, что $L \cap J = \emptyset$. Сформируем множество $LJ = L \cup J$ и $BB = (x_1, \dots, x_m, x_1, \dots, x_m)$ и рассмотрим

$$\mathbf{P}(\hat{\xi}_{l_1} = x_1, \dots, \hat{\xi}_{l_m} = x_m, \hat{\xi}_{j_1} = x_1, \dots, \hat{\xi}_{j_m} = x_m).$$

Из того, что

$$\mathbf{P}(\hat{\xi}_{l_1} = x_1, \ldots, \hat{\xi}_{l_m} = x_m, \hat{\xi}_{j_1} = x_1, \ldots, \hat{\xi}_m = x_m) =$$
$$= \quad \mathbf{P}(\hat{\xi}_{j_1} = x_1, \ldots, \hat{\xi}_m = x_m, \hat{\xi}_{l_1} = x_1, \ldots, \hat{\xi}_{l_m} = x_m),$$

суммируя по всем значениям первых m переменных обеих частей соотношения получаем нужный результат. □

Свойство 3. *Пусть дана последовательность абсолютно непрерывных случайных величин $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_t)_{t \in I}$, на вероятностном пространстве $(\Omega_I,\ \mathfrak{A}_I, \mathbf{P}_{\hat{\xi}_I})$. Она будет являться последовательностью случайных величин с инвариантными связями тогда и только тогда, когда для любого конечного m и произвольно заданного набора номеров $L = \{t_{l_1}, t_{l_2}, \ldots, t_{l_m}\} \subset I$ почти всюду на $\mathfrak{X}_{(m)}$ для плотности распределения вероятностей будет выполняться соотношение*

$$(3) \qquad \boldsymbol{p}(\hat{\xi}_{t_{l_1}} = x_1, \ldots, \hat{\xi}_{t_{l_m}} = x_m) = \boldsymbol{p}(\hat{\xi}_{t_{l_1}} = x_{i_1}, \ldots, \hat{\xi}_{t_{l_m}} = x_{i_m}),$$

где $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ – произвольная перестановка вектора $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathfrak{X}_{(m)}$.

Доказательство: Пусть задана последовательность с инвариантными связями $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_t)_{t \in I}$. Тогда выполняется соотношение (1) из определения 1. Покажем, что в этом случае соотношение (3) будет выполняться для любого конечного m почти всюду на $\mathfrak{X}_{(m)}$. Возьмем в качестве $B \subset \mathfrak{X}_{(m)}$ m-мерный прямоугольный параллелепипед $B = \{[a_1, b_1), [a_2, b_2), \ldots, [a_m, b_m)\}$, где $a_1 = a_2 = \ldots = a_m < b_1 = b_2, \ldots, = b_m$ - произвольные числа. Выберем произвольный набор индексов $L = \{t_{l_1}, t_{l_2}, \ldots, t_{l_m}\}$, а также некоторую его перестановку в качестве $J = \{t_{l_{i_1}}, t_{l_{i_2}}, \ldots, t_{l_{i_m}}\}$. Имеем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\hat{\xi}_L \in B) &= \int\limits_{a_1}^{b_1} \ldots \int\limits_{a_m}^{b_m} \boldsymbol{p}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_m}) dx_{t_1} \cdots dx_{t_m} = \mathbf{P}(\hat{\xi}_J \in B) = \\ &= \int\limits_{a_1}^{b_1} \ldots \int\limits_{a_m}^{b_m} \boldsymbol{p}(x_{t_{i_1}}, \ldots, x_{t_{i_m}}) dx_{t_{i_1}} \cdots dx_{t_{i_m}}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для таким образом сформированных множеств B соотношение (3) выполняется. Этот результат можно распространить на произвольные наборы чисел $a_i < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$, откуда несложно распространить полученный результат на любые измеримые множества из $\mathfrak{X}_{(m)}$.

Обратно: Возьмем произвольные конечные подмножества L и J множества I, такие, что $|L| = |J| = m$ и некоторое измеримое множество $B \in \mathfrak{X}_{(m)}$. Покажем справедливость соотношения

$$\mathbf{P}(\hat{\xi}_L \in B) = \mathbf{P}(\hat{\xi}_J \in B),$$

при условии что выполняется (3) почти всюду на $\mathfrak{X}_{(m)}$ для любого конечного m. Опять же для простоты изложения предположим, что что $L \cap J = \emptyset$. Сформируем множество $LJ = L \cup J$ и $BB = B \times B \subset \mathfrak{X}_{(2m)}$ и рассмотрим

$$\boldsymbol{p}(\hat{\xi}_{l_1} = x_1, \ldots, \hat{\xi}_{l_m} = x_m, \hat{\xi}_{j_1} = x_1, \ldots, \hat{\xi}_{j_m} = x_m).$$

Из того, что

$$\boldsymbol{p}(\hat{\xi}_{l_1} = x_1, \dots, \hat{\xi}_{l_m} = x_m, \hat{\xi}_{j_1} = x_1, \dots, \hat{\xi}_m = x_m) = \\ = \quad \boldsymbol{p}(\hat{\xi}_{j_1} = x_1, \dots, \hat{\xi}_{j_m} = x_m, \hat{\xi}_{l_1} = x_1, \dots, \hat{\xi}_{l_m} = x_m)$$

По аналогии с предыдущим свойством, проинтегрируем обе части этого соотношения по всем возможным значениям первых m переменных и получим, что почти всюду на $\mathfrak{X}_{(m)}$ будем иметь

$$\boldsymbol{p}(\hat{\xi}_{j_1} = x_1, \dots, \hat{\xi}_{j_m} = x_m) = \boldsymbol{p}(\hat{\xi}_{l_1} = x_1, \dots, \hat{\xi}_{l_m} = x_m).$$

Откуда и следует

$$\mathbf{P}(\hat{\xi}_L \in B) = \mathbf{P}(\hat{\xi}_J \in B)$$

для произвольного измеримого $B \in \mathfrak{X}_{(m)}$. $\square$

В [8] было рассмотрен случай построения последовательности абсолютно непрерывных случайных величин с инвариантными связями по исходному распределению $\mu(x)$ суммы абсолютно непрерывных случайных величин. Там же показано, что совместная плотность распределения вероятностей для такой последовательности будет иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{p}_{\hat{\xi}_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{2n\pi}}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2 - \frac{x^2}{n}\right)} \mu(x), \tag{4}$$

где $x = \sum\limits_{t=1}^{n} x_t$, $\quad \mu = \mu_{S_n}$ - плотность распределения суммы случайных величин

$$S_n = \sum_{t=1}^{n} \xi_t.$$

Заметим, что из выражения этой функции видно, что она инвариантна относительно перестановки любых переменных.

Рассмотрим пример построения последовательности с инвариантными связями по распределению суммы этих случайных величин. Пусть

$$\mu_{S_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}}$$

- то есть нормальное распределение с параметрами $\mathbf{M}S_n = 0, \quad \mathbf{D}S_n = n$. Тогда

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_{\hat{\xi}_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\sqrt{2n\pi}}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2 - \frac{x^2}{n}\right)} \mu(x) = \\ &= \frac{\sqrt{2n\pi}}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2 - \frac{x^2}{n}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2} = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_t^2}{2}} = \prod_{t=1}^{n} \varphi(x_t), \end{aligned}$$

где φ - плотность стандартного нормального распределения, а в качестве последовательности с инвариантными связями для этой суммы получили последовательность независимых нормальных стандартно распределенных случайных величин. Пример построения и моделирования последовательности с инвариантными связями и зависимыми случайными величинами приведен в [12].

Рассмотрим свойства предельных последовательностей с инвариантными связями, построенными по суммам исходных последовательностей случайных величин.

В [10] показано, что в случае радемахеровских случайных величин $\xi = (\xi_t)_{t\in I}$, при условии, что существует нетривиальный слабый предел сумм $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, существует последовательность случайных величин радемахеровского типа с инвариантными связями $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_t)_{t\in I}$ с такой же предельной суммой η

$$\eta \overset{\textbf{сл.}}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\xi_t \overset{\textbf{сл.}}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\hat{\xi}_t,$$

и плотность распределения этой случайной величины будет

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\ddot{v}_m(\hat{\xi})\cdot h_m(x),\ \forall x\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

где $\ddot{v}_m$ - смешанные моменты последовательности $\hat{\xi}$, которые совпадают со смешанными моментами последовательности ξ, то есть $\ddot{v}_m(\hat{\xi}) = \ddot{v}_m(\xi)\ \forall m \geqslant 1$. Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть дана последовательность случайных величин радемахеровского типа $\xi = (\xi_t)_{t\in I}$ на вероятностном пространстве $(\Omega_I,\ \mathfrak{A}_I, \mathbf{P}_{\xi_I})$ и для этой последовательности существует нетривиальный слабый предел сумм $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, тогда существует последовательность случайных величин радемахеровского типа с инвариантными связями $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_t)_{t\in I}$ с такой же предельной суммой и единственная последовательность с инвариантными связями, которая удовлетворяет этим условиям - это последовательность с некоррелированными связями. Все многообразие предельных распределений порождено только этой последовательностью. Причем если $\forall m \geqslant 2$ выполняются соотношения*

1. $\dot{v}_m(\hat{\xi}_{(n)}) = o\Big(\sqrt{C_n^m}\Big)$, *то предельное распределение нормально;*
2. $\dot{v}_m(\hat{\xi}_{(n)}) = \mathcal{O}\Big(\sqrt{C_n^m}\Big)$, *то предельное распределение отлично от нормального.*

Доказательство. Рассмотрим предельное распределение этой последовательности. Из (5) видно, что коэффициенты в разложении функции распределения предельной случайной величины суть

$$\ddot{v}_m(\hat{\xi}) = \lim_{n\to\infty}\frac{v_m(\hat{\xi}_{(n)})}{\sqrt{C_n^m}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{C_n^m}\frac{v_m(\hat{\xi}_{(n)})}{C_n^m} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{C_n^m}\dot{v}_m(\hat{\xi}_{(n)}),\ m\geqslant 1.$$

Из сходимости ряда (5) следует конечность $\ddot{v}_m(\hat{\xi})\ \forall m \geqslant 1$ (согласно предположению всегда $\ddot{v}_0(\hat{\xi}) = 1$).

Отсюда становится очевидным, что эти соотношения могут иметь место тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\dot{v}_m(\hat{\xi}_{(n)}) = 0$. Причем коэффициенты $\sqrt{C_n^m} \sim \sqrt{\frac{n^m}{m!}}$ здесь выступают в роли эталона скорости сходимости. Если $\dot{v}_m(\hat{\xi}_{(n)}) = \mathcal{O}\Big(\sqrt{C_n^m}\Big)$, то получаем в пределе распределение отличное от нормального. Если $\dot{v}_m(\hat{\xi}_{(n)}) =$

$o\Big(\sqrt{C_n^m}\Big)$, то получим нормальное распределение. А если скорость меньше, то предельного распределения не существует. □

Рассмотрим последовательности центрированных абсолютно непрерывных случайных величин $\xi = (\xi_t)_{t\in I}$ с нетривиальным слабым пределом сумм $\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. Для таких последовательностей согласно [9],[11] также существует последовательность абсолютно непрерывных случайных величин с инвариантными связями $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_t)_{t\in I}$, которая имеет такой же предел сумм $\hat{\eta}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{\xi}_i$. Для рассмотрения свойств этой последовательности воспользуемся соотношением (4) из [8]. Но предварительно приведем это соотношение в удобное для этой цели вид. Покажем следующий результат:

Теорема 2. *Пусть задана последовательность центрированных абсолютно непрерывных случайных величин $\xi = (\xi_t)_{t\in I_n}$ с нетривиальным слабым пределом сумм $\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, причем η_n - это абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения вероятностей μ_{η_n}. Тогда можно построить последовательность центрированных абсолютно непрерывных случайных величин с инвариантными связями $\hat{\xi}_n = (\hat{\xi}_t)_{t\in I_n}$ такую, что для нее справедливы следующие соотношения:*

1. *Функции распределения случайных величин η_n и $\hat{\eta}_n$ совпадают:*

$$\mathbf{F}_{\eta_n}(x) = \mathbf{F}_{\hat{\eta}_n}(x) \quad \forall x \in \Re;$$

2. *Совместная плотность распределения случайных величин $\hat{\xi}_{t\in I_n}$ удовлетворяет следующему соотношению:*

$$\boldsymbol{p}_{\hat{\xi}_n}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\mu_{\eta_n}(y_n)}{\varphi(y_n)}\prod_{t=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_t^2}{2}} \tag{6}$$

где $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{t=1}^{n}x_t, \quad \varphi_(y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_n^2}{2}}$.

Доказательство: Для доказательства второго пункта воспользуемся доказательством формулы (4), изложенным в теореме 3.3 [8]. Там для получения формулы многомерного распределения n абсолютно непрерывных случайных величин используется распределение суммы этих случайных величин $S\xi_{(n)} = \sum\limits_{t\in I}\xi_t$ с плотностью μ. Диапазон значений этой суммы рабивается на $nm+1$ частей: $\Delta x(k) = [\frac{2k-nm}{\sqrt{m}}, \frac{2(k+1)-nm}{\sqrt{m}})$ для $k = 1,\dots,nm-1$, а для $k = 0$ и $k = nm$ положим $\Delta x(0) = \big(-\infty, -n\sqrt{m}+\frac{2}{\sqrt{m}}\big)$,$\Delta x(nm) = \big[n\sqrt{m}, \infty\big)$. Образуются $\mathbf{P}_n(k) = \mathbf{P}(S\xi_{(n)} \in \Delta x(k))$ и далее рассматривается процесс преобразования приведенных там выражений для многомерного распределения последовательности решетчатых случайных величин с инвариантными связями, аппроксимирующих распределение искомой последовательности. В нашем случае нам дано распределение случайной величины $\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. Если для значений этой случайной величины воспользоваться разбиением $\Delta y(k) = [\frac{2k-nm}{\sqrt{mn}}, \frac{2(k+1)-nm}{\sqrt{mn}})$ для $k = 1,\dots,nm-1$, а для $k = 0$ и $k = nm$ положить $\Delta y(0) = \big(-\infty, -\sqrt{mn}+$

$\frac{2}{\sqrt{mn}}),\Delta y(nm)=\big[\sqrt{mn},\infty\big)$. Тогда $\mathbf{P}_n(k)=\mathbf{P}(S\xi_{(n)}\in\Delta x(k))=\mathbf{P}(\eta_n\in\Delta y(k))$. То есть можно воспользоваться выводами теоремы 3.3 [8], представив результат в нужном нам виде.

В результате преобразований в теореме 3.3 [8] получим, что

$$\mathbf{P}_n(k)\approx\mu(x)\Delta x=\mu_{\eta_n}(y_n)\Delta y_n,$$

где $y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{t=1}^{n}x_t=\frac{x}{\sqrt{n}}$ и $\Delta y_n=\frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$. Если также представить

$$\varphi_n(x)\Delta x=(2\pi n)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2n}}\Delta x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2n}}\frac{\Delta x}{\sqrt{n}}\ \text{ в виде }\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_n^2}{2}}\Delta y_n=\varphi(y_n)\Delta y_n,$$

то получим требуемое соотношение (6).

Доказательство первого пункта утверждения теоремы следует из способа построения последовательности $\hat{\xi}_{(n)}$. По аналогии с доказательством этого пункта в теореме 3.3 [8] имеем:

$$\mathbf{F}_{\hat{\eta}_n}\left(y=\frac{x}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{m\to\infty}\mathbf{P}\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{2k_t-mn}{\sqrt{mn}}<\frac{x}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{m\to\infty}\mathbf{P}\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{2k_t-m}{\sqrt{m}}<x\right)=$$
$$=\mathbf{F}_{\hat{S}_n}(x)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k<k'}\mathbf{P}_{\hat{S}_n}(k)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k<k'}\mathbf{P}_{S_n}(k)=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\mathbf{F}_{S_n}\left(\frac{2k'-nm}{\sqrt{m}}\right)=\mathbf{F}_{S_n}(x)=\mathbf{F}_{\eta_n}\left(y=\frac{x}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\sum\limits_{t=1}^{n}k_t=k$, а $k'=\max\limits_{k}\{\frac{2k-nm}{\sqrt{m}}<x\}$.

Тот факт, что полученная последовательность $\hat{\xi}_{(n)}$ является последовательностью с инвариантными связями, следует из утверждения 3 теоремы 3.3 [8] или того, что плотность распределения этой последовательности удовлетворяет условиям **свойства 3** $\square$

Рассмотрим выражение $\frac{\mu_{\eta_n}(y_n)}{\varphi(y_n)}$ в соотношении (6), где $y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{t=1}^{n}x_t,\quad\varphi_(y_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_n^2}{2}}$. Плотность распределения случайной величины $y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{t=1}^{n}x_t$, на основании изложенного в [11] и [10], можно представить в следующем виде

$$\mu(y_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_n^2}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\ddot{v}_m(\hat{\gamma}_{n,N})\cdot h_m(y_n),\ \forall y_n\in\mathbb{R},$$

где $\hat{\gamma}_{n,N}$ - это последовательность радемахеровского типа с инвариантными связями, в которую можно разложить нашу исходную последовательность $\xi_{(n)}$ таким образом, что распределение сумм будут совпадать.

Отсюда следует что, учитывая выражение для $\varphi_(y_n)$ и тот факт, что $v_0(\hat{\gamma}_{n,N})=1$ и $v_1(\hat{\gamma}_{n,N})=0$, имеем

$$\frac{\mu_{\eta_n}(y_n)}{\varphi(y_n)}=1+\sum_{m=2}^{\infty}\ddot{v}_m(\hat{\gamma}_{n,N})\cdot h_m(y_n)>0,\ \forall y_n\in\mathbb{R}.$$

Обозначим через $K_n(x)=\sum\limits_{m=2}^{\infty}\ddot{v}_m(\hat{\gamma}_{n,N})\cdot h_m(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Покажем следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $\xi = (\xi_t)_{t\in I}$ *последовательность центрированных абсолютно непрерывных случайных величин, заданная на вероятностном пространстве* $(\Omega_I,\ \mathfrak{A}_I,\ \mathbf{P}_{\xi_I})$ *и для этой последовательности существует случайная величина* η*, являющаяся нетривиальным слабым пределом сумм* $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$.

Предположим что

1. *начиная с некоторого* $n = n'$ *почти для всех* $x \in \mathbb{R}$ *выполняется условие:* $|K_n(x)| \leqslant M_n$ *(т.е* $K_n -$ *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$*);*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

Тогда последовательность с инвариантными связями, которая удовлетворяет этим условиям - это последовательность независимых стандартно нормально распределенных случайных величин.

Доказательство: Предварительно отметим, что под последовательностью независимых стандартно нормально распределенных случайных величин мы будем понимать твкую последовательность, для которой для произвольного конечного n и произвольного вектора $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} < x_2, \dots \xi_{t_n} < x_n) = \mathbf{P}(\xi_{t_1} < x_1)\cdot\mathbf{P}(\xi_{t_2} < x_2)\cdots\mathbf{P}(\xi_{t_n} < x_n)$$

Причем здесь

$$\mathbf{P}(\xi_{t_i} < x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x_i} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

В теореме 2 показано, что совместная плотность распределения случайных величин $\hat{\xi}_{t\in I_n}$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\boldsymbol{p}_{\hat{\xi}_n}(x_1,\dots,x_n) = (1 + K_n(y_n))\prod_{t=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_t^2}{2}},\ \text{где } y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}x_t.$$

Покажем, что в этом случае мы имеем последовательность независимых стандартно нормально распределенных случайных величин. Рассмотрим конкретное соотношение

$$\mathbf{P}(\xi_2 < x_1, \xi_3 < x_2) = \mathbf{P}(\xi_2 < x_1)\cdot\mathbf{P}(\xi_3 < x_2).$$

В случае произвольного конечного n и произвольного вектора $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ доказательство аналогично. Используя вышеизложенное, можем утверждать, что начиная с $n = 4$ имеет место соотношение

$$\boldsymbol{p}_{\hat{\xi}_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{t=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_t^2}{2}} + K_n(y_n)\prod_{t=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_t^2}{2}},\ \text{где } y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}x_t.$$

Или, переходя к вероятностям,

$$\mathbf{P}(\xi_2 < x_1, \xi_3 < x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{p}_{\hat{\xi}_n}(u_1,\dots,u_n)du_1du_2du_3\dots du_n =$$

$$= \mathbf{P}(\xi_2 < x_1)\cdot\mathbf{P}(\xi_3 < x_2) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\dots\int_{-\infty}^{\infty} K_n(z_n)\prod_{t=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u_t^2}{2}}du_1du_2du_3\dots du_n$$

Здесь $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} u_t$. Для последнего слагаемого имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\dots\int_{-\infty}^{\infty} K_n(z_n)\prod_{t=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u_t^2}{2}}du_1du_2du_3\dots du_n\right| \leqslant M_n$$

Откуда при $n \to \infty$ получаем требуемое утверждение. $\square$

References

[1] Rozanov J. A., Stationary stochastic processes, M., 1963

[2] Doob J. I. Stochastic Processes. 1953. 599p.

[3] Cramer H., Leadbetter M. R. Stationary and Related Stochastic Processes. M., Mir, 1969, 392p

[4] Ibragimov I.A., Linnik J.V. Independent and Stationarily Related Quantities. M.: Science, 1965, 524 p.

[5] Hannan E., J., Multiple Time Series, M., Mir 1974, 576p.

[6] Grin' A.G. On strong attraction of stationary sequences to a normal law. - Theory of Probability & Its Applications., **44**(1999) **N** 4, 846-852.

[7] Grin' A.G. On Minimal Conditions of the Weak Dependence in Limit Theorems for Stationary Sequences. - Theory of Probability & Its Applications Vol. **т. 54**(2009) **N** 2, 344-354.

[8] S. V. Chebotarev. On the equivalence of finite sums of random variables. - Vestnik BGPU, series: natural and exact sciences, 4(2004), 108-116(in Russian).

[9] S. V. Chebotarev. On sequences of random variables with averaged relationsships. - Vestnik AltGPA, series: natural and exact sciences, 7(2011), 28-37(in Russian).

[10] S. V.Chebotarev. About limit distribution of sums of random variables. - Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2016, 1, 319-327 p.

[11] S. V.Chebotarev. On the limit distribution of sums of real random variables. - Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2017, 10(3), 310-313 p.

[12] S. V.Chebotarev. On Distribution of sums of Random Variables with Invariant Links and their Modeling. - Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, 12(5), 628-636 p.

Sergey Vsevolodovich Chebotarev
Altay State Pedagogical University,
Molodeznaja st., 55,
656031, Barnaul, Russia
Email address: svcheb@gmail.com