

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 260–299 (2020)
DOI 10.33048/semi.2020.17.018УДК 517.98, 517.955, 532.5
MSC 70E55, 35M33О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРЕХ СОЧЛЕНЕННЫХ
МАЯТНИКОВ С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ
ОДНОРОДНЫМИ ИДЕАЛЬНЫМИ ЖИДКОСТЯМИ

В.И. ВОЙТИЦКИЙ, Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

ABSTRACT. We study initial boundary value problem on small motions (and normal oscillations) of hydromechanics system consists of three joined pendulums connected with each other by the spherical hinges and filled with homogeneous ideal fluids. We consider two different cases: conservative systems (without any friction forces) and weak dissipative system (friction forces in some hinges are proportional to difference between angular velocities). Using theory of operators acting in Hilbert space we formulate the problem as a Cauchy problem for differential-operator equation of first order, formulate theorem on strong solvability of the problem on the finite time segment. Corresponding spectral problem has a discrete real spectrum (conservative case) or spectrum situated in the strip along the real axis (dissipative case). For the first case we prove new variational principles, and power asymptotic of the eigenvalues with property of orthogonal basis of eigen elements. For the second case we find some estimates of eigenvalues and Abel-Lidsii basis property for the corresponding system of root elements.

Keywords: boundary value problem, self-adjoint operator, Hilbert space, discrete spectrum, eigenvalues asymptotic.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблемы движения твердых тел с жидким наполнением изучаются с середины прошлого столетия многими известными математиками. В простейшем

VOYTITSKY, V.I., KOPACHEVSKY, N.D., ON SMALL OSCILLATIONS OF THREE JOINED PENDULUMS WITH CAVITIES FILLED WITH HOMOGENEOUS IDEAL FLUIDS.

© 2020 Войтицкий В.И., Копачевский Н.Д.

Работа частично поддержана грантом ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского», грант № VG12/2020.

Поступила 13 ноября 2019 г., опубликована 3 марта 2020 г.

случае, когда полость внутри твёрдого тела полностью заполнена идеальной несжимаемой жидкостью, движение системы (гиростата) эквивалентно движению твёрдого тела с изменёнными характеристиками. Данный результат принадлежит Н.Е. Жуковскому [1] и основан он на введении так называемых потенциалов Жуковского — стационарных функций, являющихся решениями вспомогательных краевых задач, зависящих лишь от формы полости.

Если полость внутри тела заполнена частично, то гидромеханическая система имеет подвижный центр масс, обусловленный наличием свободной движущейся поверхности, что существенно усложняет задачу описания движения. Такие проблемы изучались в линейной постановке, начиная с работ Н.Н. Моисеева (см., например, [2]), отметим также статьи Л.Н. Сретенского, Г.С. Нариманова, Д.Е. Охоцимского [3]–[6], а также более поздние монографии [7]–[10].

В работе С.Г. Крейна и Н.Н. Моисеева [11] для исследования проблемы малых движений твёрдого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью, впервые применялись методы функционального анализа и теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Результаты этой статьи отражены в более поздних монографиях [12]–[14].

Системы сочленённых маятников, соединённых сферическими шарнирами, (без наличия жидкостей) изучались в работах П.В. Харламова (см. [16], [?]), а также в работах Ю.Н. Кононова (см. [17], [18]), где исследованы вопросы устойчивости и стабилизации движения систем связанных твёрдых тел с полостями, содержащими жидкость. Отметим также работы Н.Д. Копачевского и Э.И. Батыра (см. [19], [20]), где изучались проблема малых движений сочленённых гиростатов с полостями, содержащими идеальную или вязкую жидкость.

Данная статья посвящена исследованию свойств гидромеханической системы, состоящей из трёх сочленённых маятников общего положения с полостями, заполненными идеальными жидкостями в консервативном случае (трение в шарнирах отсутствует), либо в слабо диссипативном случае (трение в некоторых шарнирах присутствует). Работа написана в продолжение предыдущих работ авторов [21]–[28] по материалам совместной лекции, прочитанной на международной конференции КРОМШ-2019 (см. [29]).

Отметим, что изучаемая в работе задача без учета сил трения в шарнирах ранее кратко рассматривалась в предыдущей статье авторов [28]. В данной работе проведен более детальный анализ свойств спектральной задачи, а также изучено влияние учёта трения на структуру спектра. Более простая задача для одного маятника с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью без учета силы трения в шарнире изучалась ранее в статье [21]. Результаты предшествующих работ приводятся в данной статье без доказательства.

Предлагаемый подход одинаково применим как для идеальных, так и для вязких жидкостей, частично либо целиком заполняющих полости, а также для систем несмешивающихся жидкостей в полостях. Весь класс описанных задач в операторной форме сводится к изучению абстрактной задачи Коши в сумме гильбертовых пространств $H = H_1 \oplus H_2$:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & gC_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$z_1(0) = z_1^0, \quad z_2(0) = z_2^0.$$

Здесь $z_1 \in H_1$ — набор динамических переменных; $z_2 \in H_2$ — набор кинематических переменных; $g > 0$ — ускорение силы тяжести; C_1 — оператор кинетической энергии системы, $0 \ll C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$; C_2 — оператор потенциальной энергии, $C_2 = C_2^* \in \mathcal{L}(H_2)$; $0 \leq A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subset H_1 \rightarrow H_1$ — оператор диссипации энергии, а $B_{12} : \mathcal{D}(B_{12}) \subset H_2 \rightarrow \mathcal{R}(B_{12}) = H_1$ и $B_{21} : \mathcal{D}(B_{21}) \subset H_1 \rightarrow \mathcal{R}(B_{21}) = H_2$ — компоненты матричного антидиагонального оператора обмена энергиями, $B_{12}^* = -B_{21}$; $f_1(t)$ — заданное малое поле внешних сил.

Ниже будет доказано, что если диссипативные силы в системе обусловлены лишь наличием трения в шарнирах, то оператор A_1 является ограниченным. Сильная разрешимость задачи (1) в этом случае доказана в работе [23] как для положительно определённого, так и для не знакоопределённого оператора C_2 . Сопутствующие спектральные задачи исследовались ранее либо для случая $A_1 = 0$ (трение в шарнирах не учитывается), либо для случая неограниченного $A_1 \gg 0$ (все жидкости вязкие и трение в шарнире учитывается). В работе подробно изучается случай нулевого или неотрицательного ограниченного оператора диссипации A_1 , что соответствует консервативным либо слабо диссипативным системам. В частности, доказана дискретность спектра, получены асимптотические формулы для ветвей собственных значений, с использованием потенциалов Жуковского установлены общие вариационные принципы для нахождения собственных значений в консервативном случае, установлена локализация собственных значений в зависимости от свойств операторов потенциальной и кинетической энергии.

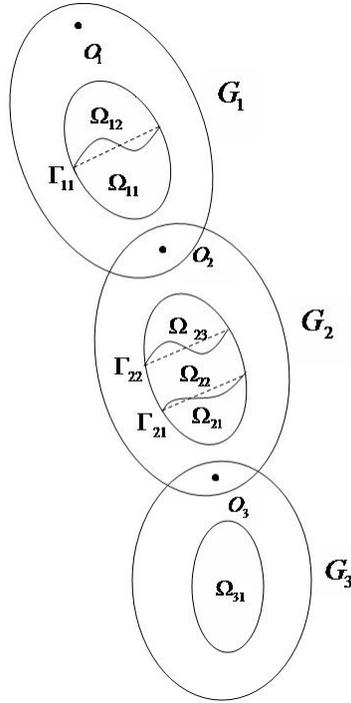
2. ПОСТАНОВКА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

2.1. Физическая постановка задачи. Итак, будем считать, что имеется система из трёх физических маятников G_k ($k = 1, 2, 3$), которые сочленены друг с другом: маятник G_1 имеет неподвижную точку O_1 , а маятники G_2 и G_3 — соответственно точки O_k , соединяющие G_k с G_{k-1} ($k = 2, 3$).

Полагаем, что внутри каждого тела G_k имеется одна полость, заполненная одной либо несколькими несмешивающимися однородными идеальными жидкостями. Для определенности считаем, что в теле G_1 полость Ω_1 целиком заполнена системой из двух жидкостей с плотностями $\rho_{11} > \rho_{12}$, занимающих в состоянии равновесия (когда система покоится) области Ω_{11} и Ω_{12} соответственно, разделённых равновесной поверхностью Γ_{11} . В теле G_2 полость Ω_2 целиком заполнена системой из трёх жидкостей с плотностями $\rho_{21} > \rho_{22} > \rho_{23}$, занимающих в состоянии равновесия области Ω_{21} , Ω_{22} и Ω_{23} соответственно и разделённых равновесными границами раздела Γ_{21} и Γ_{22} . Наконец тело G_3 имеет полость Ω_{31} , целиком заполненную одной идеальной жидкостью с плотностью $\rho_{31} > 0$. Обозначим твёрдые границы областей Ω_{kj} через S_{kj} , а их подвижные границы раздела — соответственно через $\Gamma_{kj}(t)$ (см. рисунок).

Будем считать также, что в точках O_k соединения тел имеются сферические шарниры и потому тела могут совершать малые колебания друг относительно друга, причём в каждом шарнире момент силы трения пропорционален разности угловых скоростей примыкающих тел G_k и G_{k-1} с коэффициентом пропорциональности $\alpha_k \geq 0$.

Для описания малых движений данной гидромеханической системы около состояния равновесия введем неподвижную систему координат $O_1 x^1 x^2 x^3$ с ортами \vec{e}^j ($j = 1, 2, 3$), так, чтобы ускорение силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}^3$. Выберем



также в каждой точке O_k подвижные системы координат $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$ с ортами \vec{e}_k^j ($j = 1, 2, 3$), жёстко связанные с телами G_k так, чтобы в состоянии покоя $\vec{e}^j = \vec{e}_1^j = \vec{e}_2^j = \vec{e}_3^j$, $j = 1, 2, 3$. При этом предполагаем, что в указанном состоянии равновесия центры масс C_k тел G_k , а также точки подвеса маятников O_k находятся на одной оси $O_1 x^3$, а равновесные границы Γ_{kj} раздела жидкостей горизонтальны.

Положение подвижной системы координат $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$ относительно неподвижной системы $O_1 x^1 x^2 x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$(2) \quad \vec{\delta}_k(t) = \sum_{j=1}^3 \delta_k^j(t) \vec{e}_k^j, \quad k = 1, 2, 3.$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_k будет равна $d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение – величине $d^2\vec{\delta}_k/dt^2 = d\vec{\omega}_k/dt$. Малые отклонения искомого границ раздела $\Gamma_{kj}(t)$ от равновесных плоскостей Γ_{kj} вдоль направленных вверх нормалей \vec{n}_{kj} к Γ_{kj} будем задавать функциями $\zeta_{kj}(t, x)$, $x \in \Gamma_{kj}$. Кроме того через $\vec{u}_{kj}(t, x)$, $p_{kj}(t, x)$, $x \in \Omega_{kj}$, обозначим поля малых относительных скоростей жидкостей в областях Ω_{kj} и отклонения полей давлений в этих областях от равновесных давлений.

Для удобства дальнейших записей введём также следующие краткие обозначения:

$$(3) \quad \begin{aligned} \int_{G_1} (\cdot) dm_1 &:= \int_{\Omega_{10}} (\cdot) \rho_{10} d\Omega_{01} + \int_{\Omega_{11}} (\cdot) \rho_{11} d\Omega_{11} + \int_{\Omega_{12}} (\cdot) \rho_{12} d\Omega_{12}, \\ \int_{G_2} (\cdot) dm_2 &:= \int_{\Omega_{20}} (\cdot) \rho_{20} d\Omega_{02} + \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_{2j}} (\cdot) \rho_{2j} d\Omega_{2j}, \\ \int_{G_3} (\cdot) dm_3 &:= \int_{\Omega_{30}} (\cdot) \rho_{30} d\Omega_{30} + \int_{\Omega_{31}} (\cdot) \rho_{31} d\Omega_{31}, \end{aligned}$$

где Ω_{k0} — область, занятая твёрдой частью тела G_k и имеющая плотность $\rho_{k0} > 0$, $k = 1, 2, 3$.

В процессе малых движений будем считать, что на данную систему маятников действует возмущённое силовое поле $\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t, x)$, где $\vec{f}(t, x)$ — малая динамическая добавка к однородному гравитационному полю $\vec{g} = -g\vec{e}^3$. Тогда через \vec{f}_k и \vec{f}_{kj} далее будем обозначать поля, действующие в областях G_k и Ω_{kj} соответственно: $\vec{f}_k = \vec{f}|_{G_k}$, $\vec{f}_{kj} = \vec{f}|_{\Omega_{kj}}$.

2.2. Математическая постановка начально-краевой задачи. Сформулируем полную постановку линеаризованной задачи математической физики о малых движениях системы из трёх сочленённых маятников с жидкостями. Она состоит из нескольких групп уравнений, а также кинематических, динамических и начальных условий (вывод данных уравнений можно найти в [25]).

Малые движения маятников описываются уравнениями изменения кинетических моментов системы тел относительно точек подвеса маятников O_k ($k = 1, 2, 3$). Эти уравнения обладают следующими свойствами (см., например, [20], с. 10, 76-83): левые и правые части последующего уравнения (при переходе от уравнения относительно O_1 к уравнению относительно O_2 , а также для соответствующих уравнений относительно O_2 и O_3) целиком входят в левые и правые части предыдущего уравнения. Отсюда, вычитая левые и правые части последующего и предыдущего уравнения, получаем следующее преобразованные уравнения изменения моментов количества движения сочленённых маятников.

Первое преобразованное уравнение (с учётом обозначений (3)):

$$(4) \quad \begin{aligned} \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) dm_1 + \rho_{11} \int_{\Omega_{11}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{11}}{\partial t} d\Omega_{11} + \rho_{12} \int_{\Omega_{12}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{12}}{\partial t} d\Omega_{12} + \\ + \int_{G_2} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) dm_2 + \sum_{j=1}^3 \rho_{2j} \int_{\Omega_{2j}} \vec{h}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{2j}}{\partial t} d\Omega_{2j} + \\ + \int_{G_3} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) dm_3 + \end{aligned}$$

$$+ \rho_3 \int_{\Omega_{31}} \vec{h}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{31}}{\partial t} d\Omega_{31} + \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + g(m_1 l_1 + h_1 m_2 + h_1 m_3) P_2 \vec{\delta}_1 - \\ - g(\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \zeta_{11} d\Gamma_{11} = \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \sum_{k=2}^3 \int_{G_k} \vec{h}_1 \times \vec{f}_k dm_k =: \vec{M}_1(t).$$

Второе преобразованное уравнение:

$$(5) \quad \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) dm_2 + \sum_{j=1}^3 \rho_{2j} \int_{\Omega_{2j}} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_{2j}}{\partial t} d\Omega_{2j} + \\ + \int_{G_3} \vec{h}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) dm_3 + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \vec{h}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_{31}}{\partial t} d\Omega_{31} + \\ + \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - \alpha_3 (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g(m_2 l_2 + h_2 m_3) P_2 \vec{\delta}_2 - \\ - g \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_2) \zeta_{2j} d\Gamma_{2j} = \\ = \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 dm_2 + \int_{G_3} \vec{h}_2 \times \vec{f}_3 dm_3 =: \vec{M}_2(t),$$

Третье исходное уравнение (относительно O_3):

$$(6) \quad \int_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) dm_3 + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \vec{r}_3 \times \frac{\partial \vec{u}_{31}}{\partial t} d\Omega_{31} + \\ + \alpha_3 (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 = \int_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3 dm_3 =: \vec{M}_3(t).$$

В уравнениях (4)–(6) введены следующие обозначения. Через $m_k > 0$ обозначены массы маятников, \vec{r}_k — радиус-вектор произвольной точки тела G_k , исходящий из точки O_k , $\vec{h}_k := \overrightarrow{O_k O_{k+1}}$, $h_k := |\vec{h}_k|$, $P_2 \vec{\delta}_k = \sum_{j=1}^2 \delta_k^j \vec{e}_k^j$ — проектор на плоскость $O_k x_k^1 x_k^2$, $l_k = |\overrightarrow{O_k C_k}|$ — расстояние от точки подвеса маятника G_k до его центра масс C_k (в состоянии покоя).

Вторая группа уравнений в формулируемой задаче — это линеаризованные уравнения Эйлера, описывающие малые движения идеальных жидкостей в полостях, а также уравнения неразрывности каждой жидкости, записанные в подвижной системе координат, жёстко связанной с соответствующим маятником.

Для первого маятника имеем уравнения в областях Ω_{11} и Ω_{12} :

$$(7) \quad \frac{\partial \vec{u}_{1j}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 = -\rho_{1j}^{-1} \nabla p_{1j} + \vec{f}_{1j}, \quad \operatorname{div} \vec{u}_{1j} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1j}), \quad j = 1, 2.$$

Для второго маятника — уравнения в областях Ω_{21} , Ω_{22} , Ω_{23} :

$$(8) \quad \frac{\partial \vec{u}_{2j}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 = -\rho_{2j}^{-1} \nabla p_{2j} + \vec{f}_{2j}, \quad \operatorname{div} \vec{u}_{2j} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{2j}), \quad j = 1, 2, 3.$$

Для третьего маятника имеем одно уравнение в области Ω_{31} :

$$(9) \quad \frac{\partial \vec{u}_{31}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 = -\rho_{31}^{-1} \nabla p_{31} + \vec{f}_{31}, \quad \operatorname{div} \vec{u}_{31} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{31}).$$

На твёрдых стенках полостей, занятых жидкостями, выполнены условия непротекания

$$(10) \quad \vec{u}_{11} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_{11}), \quad \vec{u}_{12} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_{12});$$

$$(11) \quad \vec{u}_{2j} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_{2j}), \quad j = 1, 2, 3;$$

$$(12) \quad \vec{u}_{31} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_{31}),$$

где \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к твёрдой стенке.

Следующая группа условий — это кинематические и динамические связи на границах раздела жидкостей в полостях маятников. Кинематические условия имеют вид:

$$(13) \quad \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial t} = \vec{u}_{11} \cdot \vec{n}_{11} = \vec{u}_{12} \cdot \vec{n}_{11}, \quad (\text{на } \Gamma_{11}),$$

$$(14) \quad \frac{\partial \zeta_{2j}}{\partial t} = \vec{u}_{2j} \cdot \vec{n}_{2j} = \vec{u}_{2,j+1} \cdot \vec{n}_{2j}, \quad (\text{на } \Gamma_{2j}), \quad j = 1, 2.$$

Динамические условия на равновесных границах раздела выражают тот факт, что разность напряжений для соприкасающихся жидкостей равна гравитационному скачку давлений. Имеем

$$(15) \quad -p_{11} + p_{12} = -(\rho_{11} - \rho_{12})g(\zeta_{11} + (P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3) \quad (\text{на } \Gamma_{11});$$

$$(16) \quad -p_{21} + p_{22} = -(\rho_{21} - \rho_{22})g(\zeta_{21} + (P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^3) \quad (\text{на } \Gamma_{21}),$$

$$-p_{22} + p_{23} = -(\rho_{22} - \rho_{23})g(\zeta_{22} + (P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^3) \quad (\text{на } \Gamma_{22}).$$

В процессе колебаний однородных жидкостей объем каждой жидкости сохраняется. Этот факт приводит к соотношениям

$$(17) \quad \int_{\Gamma_1} \zeta_{11} d\Gamma_{11} = 0, \quad \int_{\Gamma_{2j}} \zeta_{2j} d\Gamma_{2j} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Для полной постановки формулируемой начально-краевой задачи необходимо задать ещё механические условия связи

$$(18) \quad \frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_k = P_2 \vec{\omega}_k, \quad \frac{d}{dt} \vec{\delta}_k^3 = \vec{\omega}_k^3, \quad k = 1, 2, 3,$$

а также начальные условия для искомых функций:

$$(19) \quad \vec{u}_{kj}(0, x) = \vec{u}_{kj}^0(x), \quad x \in \Omega_{kj}, \quad \zeta_{kj}(0, x) = \zeta_{kj}^0(x), \quad x \in \Gamma_{kj}, \\ \vec{\omega}_k(0) = \vec{\omega}_k^0, \quad \vec{\delta}_k(0) = \vec{\delta}_k^0.$$

Таким образом, задача о малых движениях трёх сочленённых маятников с выбранным вариантом заполнения полостей жидкостями состоит в нахождении искомых функций, удовлетворяющих уравнениям движения (4)–(6) системы маятников, уравнениям (7)–(9) движения каждой жидкости в полостях маятников, условиям непротекания на твёрдых стенках (10)–(12), кинематическим условиям (13)–(14) на границах раздела жидких сред, а также динамическим условиям (15)–(16) на этих границах. Наконец, должны выполняться условия (17) сохранения объёмов жидкостей, механические условия связи (18) для угловых скоростей и угловых перемещений маятников, а также начальные условия (19).

3. ОПЕРАТОРНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

3.1. Применение метода ортогонального проектирования. Будем считать, что поля скоростей в каждой жидкости при любом $t \geq 0$ имеют конечную кинетическую энергию, т.е. являются элементами соответствующего гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega_{ij})$ (в диссипативном случае комплексного) со скалярным произведением

$$(20) \quad (\vec{u}_{ij}, \vec{v}_{ij})_{\vec{L}_2(\Omega_{ij})} := \int_{\Omega_{ij}} \vec{u}_{ij} \cdot \overline{\vec{v}_{ij}} \, d\Omega_{ij},$$

где $i = 1, 2, 3$ определяется номером маятника, а j — номером слоя жидкости в полости.

Рассмотрим сначала уравнения, описывающие движение третьего маятника, а именно уравнение движения идеальной жидкости в его полости (9), а также уравнение движения этого маятника (6).

Поскольку жидкость полностью заполняет полость третьего маятника, то в силу условия соленоидальности поле скорости \vec{u}_{31} является элементом подпространства

$$(21) \quad \vec{J}_0(\Omega_{31}) = \left\{ \vec{u}_{31} \in \vec{L}_2(\Omega_{31}) : \operatorname{div} \vec{u}_{31} = 0 \text{ (в } \Omega_{31}), \quad \vec{u}_{31} \cdot \vec{n}_{31} = 0 \text{ (на } S_{31} = \partial\Omega_{31}) \right\},$$

при этом имеет место разложение Вейля

$$(22) \quad \vec{L}_2(\Omega_{31}) = \vec{J}_0(\Omega_{31}) \oplus \vec{G}(\Omega_{31}),$$

где

$$(23) \quad \vec{G}(\Omega_{31}) = \left\{ \nabla p_{31} \in \vec{L}_2(\Omega_{31}) : \int_{S_{31}} p_{31} \, dS_{31} = 0 \right\}.$$

Введём ортопроекторы, соответствующие разложению (22):

$$(24) \quad P_{0,3} : \vec{L}_2(\Omega_{31}) \rightarrow \vec{J}_0(\Omega_{31}), \quad P_{G,3} : \vec{L}_2(\Omega_{31}) \rightarrow \vec{G}(\Omega_{31}).$$

Согласно постановке задачи элемент \vec{u}_{31} является функцией переменной t со значениями в $\vec{J}_0(\Omega_{31})$, а ∇p_{31} — функция t со значениями в $\vec{G}(\Omega_{31})$.

Применяя операторы $P_{0,3}$ и $P_{G,3}$ к обеим частям уравнения (9), получим соотношения

$$(25) \quad \frac{d\vec{u}_{31}}{dt} + P_{0,3} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{31} \right) = P_{0,3} \vec{f}_{31},$$

$$(26) \quad P_{G,3} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{31} \right) + \rho_{31}^{-1} \nabla p_{31} = P_{G,3} \vec{f}_{31}.$$

Из (25) выражаем поле скорости

$$(27) \quad \frac{d\vec{u}_{31}}{dt} = -P_{0,3} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{31} \right) + P_{0,3} \vec{f}_{31},$$

а из (26) — поле давлений, если известны угловые скорости в каждом маятнике. Подставляя (27) в (6), приходим к уравнению движения третьего маятника в

следующем виде:

$$\begin{aligned}
(28) \quad & \left(\vec{J}_{\tau,3} + \vec{J}_{\text{пр},3} \right) \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} + \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} \left(\vec{r}_{30} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 \right) \right) d\Omega_{30} + \\
& + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \left(\vec{r}_{31} \times P_{G,3} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 \right) \right) d\Omega_{31} + \alpha_3 (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + gm_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 = \\
& = \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times \vec{f}_{30}) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31} \times P_{G,3} \vec{f}_{31}) d\Omega_{31} =: \vec{M}_{3,\text{пр}}(t),
\end{aligned}$$

где $\vec{J}_{\tau,3}$ — момент инерции третьего маятника, отвечающий его твёрдой части Ω_{30} :

$$(29) \quad \vec{J}_{\tau,3} \vec{\omega}_3 := \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30})) d\Omega_{30},$$

а $\vec{J}_{\text{пр},3}$ — приведенный момент инерции, отвечающий его жидкой части Ω_{31} :

$$(30) \quad \vec{J}_{\text{пр},3} \vec{\omega}_3 := \rho_{31} \int_{\Omega_3} (\vec{r}_{31} \times P_{G,3} (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31})) d\Omega_{31}.$$

Таким образом, движение третьего маятника при полном заполнении области Ω_{31} идеальной жидкостью приводится к его движению как твёрдого тела с видоизменёнными характеристиками: приведённому моменту инерции $\vec{J}_{\text{пр},3}$ и приведённому внешнему полю $\vec{M}_{3,\text{пр}}(t)$ (теорема Н.Е. Жуковского).

Перейдём теперь к рассмотрению уравнений движения жидкостей в первом маятнике и уравнению движения этого маятника (7), (4). Уравнения для жидкостей (7) можно переписать в виде соотношения для пар

$$(31) \quad \frac{d}{dt} \{ \vec{u}_{1k} \}_{k=1}^2 + \left\{ \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k} \right\}_{k=1}^2 + \{ \rho_{1k}^{-1} \nabla p_{1k} \}_{k=1}^2 = \{ \vec{f}_{1k} \}_{k=1}^2.$$

При этом уравнение движения первого маятника (4) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
(32) \quad & \rho_{10} \int_{\Omega_{10}} \left(\vec{r}_{10} \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{10} \right) \right) d\Omega_{10} + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} \left(\vec{r}_{1k} \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k} \right) \right) d\Omega_{1k} + \\
& + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} \left(\vec{r}_{1k} \times \frac{d\vec{u}_{1k}}{dt} \right) d\Omega_{1k} + \rho_{20} \int_{\Omega_{20}} \left(\vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_{20} \right) \right) d\Omega_{20} + \\
& + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} \left(\vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_{2k} \right) \right) d\Omega_{2k} + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} \left(\vec{h}_1 \times \frac{d\vec{u}_{2k}}{dt} \right) d\Omega_{2k} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} \left(\vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{30} \right) \right) d\Omega_{30} + \\
& + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \left(\vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{31} \right) \right) d\Omega_{31} + \\
& + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \left(\vec{h}_1 \times \frac{d\vec{u}_{31}}{dt} \right) d\Omega_{31} + \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + \\
& + g(m_1 l_1 + h_1(m_2 + m_3)) P_2 \vec{\delta}_1 - g(\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_{11}) \zeta_{11} d\Gamma_{11} = \\
& = \int_{G_1} (\vec{r}_1 \times \vec{f}_1) dm_1 + \int_{G_2} (\vec{h}_1 \times \vec{f}_2) dm_2 + \int_{G_3} (\vec{h}_1 \times \vec{f}_3) dm_3 =: \vec{M}_1(t).
\end{aligned}$$

Поля скоростей \vec{u}_{11} и \vec{u}_{12} должны иметь конечную кинетическую энергию, отсюда набор таких полей $\vec{u}_1 = \{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2$ следует считать элементом гильбертова пространства

$$(33) \quad \vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{L}_2(\Omega_{11}) \oplus \vec{L}_2(\Omega_{12}),$$

в котором скалярное произведение введено по закону

$$(34) \quad (\vec{u}_1, \vec{v}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} := \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_{1k}} \vec{u}_{1k} \cdot \vec{v}_{1k} d\Omega_{1k}.$$

Аналогично разложению (22) получаем разложение

$$(35) \quad \begin{aligned} \vec{L}_2(\Omega_1) &= \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}(\Omega_1), \\ \vec{J}_0(\Omega_1) &:= \vec{J}_0(\Omega_{11}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_{12}), \quad \vec{G}(\Omega_1) := \vec{G}(\Omega_{11}) \oplus \vec{G}(\Omega_{12}). \end{aligned}$$

Элементы из $\vec{J}_0(\Omega_1)$ имеют нормальные компоненты поля, равные нулю на всей границе, т.е. на $\partial\Omega_{11}$ и $\partial\Omega_{12}$, в частности, на Γ_{11} . Однако кинематическое условие (13) на границе раздела Γ_{11} показывает, что для набора полей $\vec{u}_1 = \{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2$ эти нормальные компоненты должны лишь совпадать. В связи с этим введем пространство потенциальных элементов

$$(36) \quad \begin{aligned} \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1) &:= \left\{ \left\{ \rho_k^{-1} \nabla \Phi_k \right\}_{k=1}^2 : \Delta \Phi_k = 0 \text{ (в } \Omega_k), \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{1k}), k = 1, 2, \right. \\ &\quad \left. \rho_1^{-1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} = \rho_2^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_1} \text{ (на } \Gamma_1), \vec{n}_1 := \vec{e}_1^3 \right\}, \end{aligned}$$

которое следует добавить для полного описания полей скоростей в исследуемой проблеме.

Лемма 1. *Ортогональным дополнением к подпространству $\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$ в пространстве $\vec{G}(\Omega_1)$ является подпространство*

$$(37) \quad \vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) := \left\{ \left\{ \rho_k^{-1} \nabla \psi_k \right\}_{k=1}^2 \in \vec{G}(\Omega_1) : \psi_1 - \psi_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_1) \right\}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $\vec{G}(\Omega_1)$ состоит из наборов $\{\rho_k^{-1} \nabla \psi_k\}_{k=1}^2$ потенциальных полей из пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$.

Пусть теперь $\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^2$ — произвольный элемент из $\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$, при этом $\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2$ — элемент из $\vec{G}(\Omega_1)$, ортогональный к $\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^2$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2, \{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^2 \right)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \\ & = \rho_1 \int_{\Omega_{11}} \rho_1^{-1}\nabla\psi_1 \cdot \rho_1^{-1}\overline{\nabla\varphi_1} d\Omega_{11} + \rho_2 \int_{\Omega_{12}} \rho_2^{-1}\nabla\psi_2 \cdot \rho_2^{-1}\overline{\nabla\varphi_2} d\Omega_{12} = 0. \end{aligned}$$

Для областей Ω_{11} и Ω_{12} имеют место обобщённые формулы Грина (см. [30])

$$(38) \quad \int_{\Omega_{1k}} \nabla\Psi_{1k} \cdot \overline{\nabla\Phi_{1k}} d\Omega_{1k} = \langle \Psi_{1k}, -\Delta\Phi_{1k} \rangle_{L_2(\Omega_{1k})} + \langle \gamma_{S_{1k}}\Psi_{1k}, \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n} \rangle_{L_2(S_{1k})} - \\ - (-1)^k \langle \gamma_{\Gamma_{11}}\Psi_{1k}, \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n_1} \rangle_{L_2(\Gamma_{11})}, \quad k = 1, 2,$$

где $\gamma_{S_{1k}}\Psi_{1k}$ — след функции Ψ_{1k} на S_{1k} , $\gamma_{\Gamma_{11}}\Psi_{1k}$ — след Ψ_{1k} на Γ_{11} , \vec{n} — соответствующая внешняя нормаль. При этом косыми скобками обозначены значения функционалов, стоящих на втором месте в соответствующих полуторалинейных формах, на элементах, стоящих на первом месте. Используя эти формулы и вспоминая определение (36) элементов из $\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$, приходим к выводу, что

$$\langle \psi_1 - \psi_2, \rho_1^{-1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma_1)} = 0, \quad \forall \rho_1^{-1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{11}} \in \tilde{H}_{\Gamma_{11}}^{-1/2},$$

где $\tilde{H}_{\Gamma_{11}}^{-1/2} := (H_{\Gamma_{11}}^{1/2})^*$, $H_{\Gamma_{11}}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma_{11}) \cap L_{2,\Gamma_{11}}$. Отсюда следует, что $\psi_1 - \psi_2 = \text{const} = 0$ на Γ_{11} . \square

Таким образом, имеет место ортогональное разложение

$$(39) \quad \vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1).$$

По постановке задачи набор полей скоростей в первом маятнике $\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2$ является функцией t со значениями в $\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$, а набор полей давлений $\{\rho_{1k}^{-1}\nabla p_{1k}\}_{k=1}^2$ — функцией t со значениями в $\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1)$. Будем искать эти поля в виде

$$(40) \quad \begin{aligned} \{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2 &= \{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 + \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2, \\ \{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 &\in \vec{J}_0(\Omega_1), \quad \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \end{aligned}$$

$$(41) \quad \begin{aligned} \{\rho_{1k}^{-1}\nabla p_{1k}\}_{k=1}^2 &= \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\varphi_{1k}\}_{k=1}^2 + \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\}_{k=1}^2, \\ \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\varphi_{1k}\}_{k=1}^2 &\in \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \quad \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1). \end{aligned}$$

Введём теперь ортопроекторы

$$(42) \quad \begin{aligned} P_{0,1} : \vec{L}_2(\Omega_1) &\rightarrow \vec{J}_0(\Omega_1), \quad P_{h,S_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \rightarrow \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \\ P_{0,\Gamma_{11}} : \vec{L}_2(\Omega_1) &\rightarrow \vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1), \end{aligned}$$

отвечающие разложению (39), и подействуем ими на обе части уравнения (31). Отсюда получим соотношения

$$(43) \quad \frac{d}{dt} \{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{0,1} \left\{ \frac{d\vec{w}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k} \right\}_{k=1}^2 = P_{0,1} \left\{ \vec{f}_{1k} \right\}_{k=1}^2,$$

(44)

$$\frac{d}{dt} \{ \rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k} \}_{k=1}^2 + P_{h,S_1} \left\{ \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k} \right\}_{k=1}^2 + \{ \rho_{1k}^{-1} \nabla \varphi_{1k} \}_{k=1}^2 = P_{h,S_1} \{ \vec{f}_{1k} \}_{k=1}^2,$$

(45)

$$P_{0,\Gamma_{11}} \left\{ \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k} \right\}_{k=1}^2 + \{ \rho_{1k}^{-1} \nabla \psi_{1k} \}_{k=1}^2 = P_{0,\Gamma_{11}} \{ \vec{f}_{1k} \}_{k=1}^2.$$

Заметим, что поле $\{ \rho_{1k}^{-1} \nabla \psi_{1k} \}_{k=1}^2$ находится из (45) по известному полю скорости $\vec{\omega}_1$ и полю внешних сил \vec{f}_1 . Поэтому далее рассматриваем лишь соотношения (43)–(44).

Подставляя выражение для $d\vec{u}_{31}/dt$ из (27) в (32), а также используя разложение (40) и определение момента инерции для первого маятника

$$(46) \quad \vec{J}_1 \vec{\omega}_1 := \rho_{10} \int_{\Omega_{10}} (\vec{r}_{10} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{10})) d\Omega_{10} + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})) d\Omega_{1k},$$

получим преобразованное уравнение (32):

$$(47) \quad \begin{aligned} & \vec{J}_1 \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times \frac{d}{dt} (\vec{w}_{1k} + \rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k})) d\Omega_{1k} + \\ & + \int_{G_2} (\vec{h}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2)) dm_2 + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} (\vec{h}_1 \times \frac{d\vec{\omega}_{2k}}{dt}) d\Omega_{2k} + \\ & + \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{30})) d\Omega_{30} + \\ & + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3} (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{31})) d\Omega_{31} + \\ & + \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + g(m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_1) P_2 \vec{\delta}_1 - \\ & - g(\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_{11}) \zeta_{11} d\Gamma_{11} = \int_{G_1} (\vec{r}_1 \times \vec{f}_1) dm_1 + \int_{G_2} (\vec{h}_1 \times \vec{f}_2) dm_2 + \\ & + \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times \vec{f}_{30}) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3} \vec{f}_{31}) d\Omega_{31} =: \vec{M}_{1,np}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, движение первого маятника с двумя идеальными жидкостями описывается преобразованными уравнениями (43), (44) и (47).

Аналогичным образом можно получить преобразованные уравнения движения второго маятника. Для этого воспользуемся ортогональным разложением

$$(48) \quad \vec{L}_2(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2),$$

где

$$(49) \quad \vec{J}_0(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_{21}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_{22}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_{23}),$$

$$(50) \quad \begin{aligned} \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) &:= \left\{ \vec{u}_2 = \{\bar{u}_{2k}\}_{k=1}^3 : \bar{u}_{2k} = \rho_{2k}^{-1} \nabla \varphi_{2k}, \quad \Delta \varphi_{2k} = 0 \text{ (в } \Omega_{2k}), \right. \\ &\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{2k}), \quad \rho_{21}^{-1} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial n} = \rho_{22}^{-1} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_{21}), \\ &\left. \rho_{22}^{-1} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial n} = \rho_{23}^{-1} \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_{22}), \quad \vec{n} = \vec{e}_2^3 \right\}, \end{aligned}$$

$$(51) \quad \begin{aligned} \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2) &:= \left\{ \{\rho_{2k}^{-1} \nabla \psi_{2k}\}_{k=1}^3 \in \vec{L}_2(\Omega_2) : \psi_{21} - \psi_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_{21}), \right. \\ &\left. \psi_{22} - \psi_{23} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}) \right\}. \end{aligned}$$

Будем искать набор полей скоростей $\{\bar{u}_{2k}\}_{k=1}^3$ в форме

$$(52) \quad \{\bar{u}_{2k}\}_{k=1}^3 = \{\bar{w}_{2k}\}_{k=1}^3 + \{\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2),$$

а набор полей давлений в виде

$$(53) \quad \{\rho_{2k}^{-1} \nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 = \{\rho_{2k}^{-1} \nabla \varphi_{2k}\}_{k=1}^3 + \{\rho_{2k}^{-1} \nabla \psi_{2k}\}_{k=1}^3 \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2).$$

Отсюда, действуя ортопроекторами

$$(54) \quad \begin{aligned} P_{0,2} &: \vec{L}_2(\Omega_2) \rightarrow \vec{J}_0(\Omega_2), \\ P_{h,S_2,\Gamma} &: \vec{L}_2(\Omega_2) \rightarrow \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2), \\ P_{0,2,\Gamma} &: \vec{L}_2(\Omega_2) \rightarrow \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2), \end{aligned}$$

на уравнение

$$(55) \quad \left\{ \frac{d\bar{u}_{2k}}{dt} \right\}_{k=1}^3 + \left\{ \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} \times \bar{h}_1 \right\}_{k=1}^3 + \left\{ \frac{d\bar{\omega}_2}{dt} \times \bar{r}_{2k} \right\}_{k=1}^3 + \{\rho_{2k}^{-1} \nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 = \{\vec{f}_{2k}\}_{k=1}^3$$

(сгруппированные уравнения (8)), получаем три соотношения для проекций:

$$(56) \quad \left\{ \frac{d\bar{w}_{2k}}{dt} \right\}_{k=1}^3 + P_{0,2} \left\{ \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} \times \bar{h}_1 \right\}_{k=1}^3 + P_{0,2} \left\{ \frac{d\bar{\omega}_2}{dt} \times \bar{r}_{2k} \right\}_{k=1}^3 = P_{0,2} \{\vec{f}_{2k}\}_{k=1}^3,$$

$$(57) \quad \begin{aligned} \left\{ \frac{d}{dt} (\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}) \right\}_{k=1}^3 + P_{h,S_2,\Gamma} \left\{ \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} \times \bar{h}_1 \right\}_{k=1}^3 + P_{h,S_2,\Gamma} \left\{ \frac{d\bar{\omega}_2}{dt} \times \bar{r}_{2k} \right\}_{k=1}^3 + \\ + \{\rho_{2k}^{-1} \nabla \varphi_{2k}\}_{k=1}^3 = P_{h,S_2,\Gamma} \{\vec{f}_{2k}\}_{k=1}^3, \end{aligned}$$

$$(58) \quad P_{0,2,\Gamma} \left\{ \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} \times \bar{h}_1 \right\}_{k=1}^3 + P_{0,2,\Gamma} \left\{ \frac{d\bar{\omega}_2}{dt} \times \bar{r}_{2k} \right\}_{k=1}^3 + \{\rho_{2k}^{-1} \nabla \psi_{2k}\}_{k=1}^3 = P_{0,2,\Gamma} \{\vec{f}_{2k}\}_{k=1}^3.$$

Здесь снова (как и в уравнениях движения жидкостей в первом маятнике) набор полей $\{\rho_{2k}^{-1} \nabla \psi_{2k}\}_{k=1}^3$ явно находится по другим переменным задачи, и поэтому уравнение (58) далее не рассматривается.

Аналогично (47) уравнение движения второго маятника (5) сводится к уравнению

$$\begin{aligned}
(59) \quad & \vec{J}_2 \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} + \int_{G_2} \left(\vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 \right) \right) dm_2 + \\
& + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} \left(\vec{r}_{2k} \times \frac{d}{dt} (\vec{w}_{2k} + \rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}) \right) d\Omega_{2k} + \\
& + \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} \left(\vec{h}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{30} \right) \right) d\Omega_{30} + \\
& + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} \left(\vec{h}_2 \times P_{G,3} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{31} \right) \right) d\Omega_{31} + \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - \\
& - \alpha_3 (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g(m_2 l_2 + m_3 h_2) P_2 \vec{\delta}_2 - g \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_{2j}) \zeta_{2j} d\Gamma_{2j} = \\
& = \int_{G_2} (\vec{r}_2 \times \vec{f}_2) dm_2 + \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times \vec{f}_{30}) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 \times P_{G,3} \vec{f}_{31}) d\Omega_{31} =: \vec{M}_{2,пр}(t),
\end{aligned}$$

где через $\vec{J}_2 \vec{\omega}_2$ обозначен момент инерции второго маятника:

$$\vec{J}_2 \vec{\omega}_2 := \rho_{20} \int_{\Omega_{20}} (\vec{r}_{20} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{20})) d\Omega_{20} + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} (\vec{r}_{2k} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k})) d\Omega_{2k}.$$

Для дальнейшего использования операторных подходов необходимо преобразовать уравнения (44) и (57) в пространствах $\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$ и $\vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$ с учетом динамических краевых условий (15)–(16).

В силу разложений (41) и (53) краевые условия (15)–(16) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
(60) \quad & p_{11} - p_{12} = \varphi_{11} - \varphi_{12} = \\
& = (\rho_{11} - \rho_{12})g(\zeta_{11} + \theta_{11}(P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3) =: (\rho_{11} - \rho_{12})\xi_{11} \quad (\text{на } \Gamma_{11});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(61) \quad & p_{21} - p_{22} = \varphi_{21} - \varphi_{22} = \\
& = (\rho_{21} - \rho_{22})g(\zeta_{21} + \theta_{21}(P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^3) =: (\rho_{21} - \rho_{22})\xi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(62) \quad & p_{22} - p_{23} = \varphi_{22} - \varphi_{23} = \\
& = (\rho_{22} - \rho_{23})g(\zeta_{22} + \theta_{22}(P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^3) =: (\rho_{22} - \rho_{23})\xi_{22} \quad (\text{на } \Gamma_{22}).
\end{aligned}$$

При этом потенциалы φ_{1k} находятся как решения вспомогательных задач

$$\begin{aligned}
(63) \quad & \Delta \varphi_{1k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{1k}), \quad \int_{\Gamma_{11}} \varphi_{1k} d\Gamma_{11} = 0, \quad k = 1, 2, \\
& \rho_{11}^{-1} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial n} = \rho_{12}^{-1} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial n}, \quad \vec{n} = \vec{e}_1^3 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \quad \varphi_{11} - \varphi_{12} = (\rho_{11} - \rho_{12})\xi_{11} \quad (\text{на } \Gamma_{11}).
\end{aligned}$$

Аналогично потенциалы φ_{2k} находятся как решения вспомогательных задач

$$(64) \quad \begin{aligned} \Delta\varphi_{2k} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_{2k}), \quad \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{2k}), \quad k = 1, 2, 3, \\ \int_{\Gamma_{21}} \varphi_{21} d\Gamma_{21} &= \int_{\Gamma_{22}} \varphi_{23} d\Gamma_{22} = 0, \quad \int_{\Gamma_{21}} \varphi_{22} d\Gamma_{21} = \int_{\Gamma_{22}} \varphi_{23} d\Gamma_{22}, \\ \rho_{21}^{-1} \frac{\partial\varphi_{21}}{\partial n} &= \rho_{22}^{-1} \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial n}, \quad \vec{n} = \vec{e}_2^3, \quad \varphi_{21} - \varphi_{22} = (\rho_{21} - \rho_{22})\xi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \\ \rho_{22}^{-1} \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial n} &= \rho_{23}^{-1} \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial n}, \quad \vec{n} = \vec{e}_2^3, \quad \varphi_{22} - \varphi_{23} = (\rho_{22} - \rho_{23})\xi_{22} \quad (\text{на } \Gamma_{22}). \end{aligned}$$

Основываясь на абстрактных рассмотрениях аналогичных типов смешанных краевых задач сопряжения из [30], [31] (конфигурация “разрезанный банан”), можно доказать, что рассматриваемые вспомогательные задачи имеют единственное слабое решение для произвольных заданных элементов $\xi_{11} \in H_{\Gamma_{11}}^{1/2}$, $\xi_{2k} \in H_{\Gamma_{2k}}^{1/2}$, $k = 1, 2$, где

$$H_{\Gamma_{11}}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma_{11}) \cap L_{2,\Gamma_{11}}, \quad H_{\Gamma_{2k}}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma_{2k}) \cap L_{2,\Gamma_{2k}}$$

это пространства, в которые действуют ограниченным образом операторы следа из областей Ω_{jk} на части границы Γ_{11} и Γ_{2k} .

Отсюда можно ввести разрешающие операторы вспомогательных задач

$$(65) \quad \begin{aligned} Q_1\xi_1 &:= \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\varphi_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \quad Q_1 \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_{11}}^{1/2}; \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1)), \\ Q_2\{\xi_1; \xi_2\} &:= \{\rho_{2k}^{-1}\nabla\varphi_{2k}\}_{k=1}^3 \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2), \quad Q_2 \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2}; \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2)). \end{aligned}$$

Используя их, уравнения (44) и (57) можно переписать в виде следующих соотношений:

$$(66) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 + \frac{d}{dt} P_{h,S_1} \{(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2 + \\ + gQ_1(\zeta_{11} + \theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{1k}) \cdot \vec{e}_1^3)) = P_{h,S_1} \{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2, \end{aligned}$$

$$(67) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \{\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\}_{k=1}^3 + \frac{d}{dt} P_{h,S_2,\Gamma} \{(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^3 + \\ + gQ_2(\{\zeta_{2j} + \theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3)\}_{j=1}^2) = P_{h,S_2,\Gamma} \{\vec{f}_{2k}\}_{k=1}^3. \end{aligned}$$

Таким образом, после проектирования и рассмотрения вспомогательных краевых задач исходная начально-краевая задача сводится к системе обыкновенных дифференциально-операторных уравнений первого порядка (43), (66), (47) (первый маятник), (56), (67), (59) (второй маятник), (29) (третий маятник), к которым следует добавить кинематические условия (13)–(14), условия связи (18), а также начальные условия (19).

3.2. Об операторе кинетической энергии системы и его свойствах.

Сгруппируем основные переменные задачи, выделив совокупность динамических и кинематических переменных, отвечающих каждому маятнику и всей системы в целом. Будем считать, что искомыми динамическими переменными

являются вектор–столбцы

$$(68) \quad \begin{aligned} z_1 &:= (z_{11}; z_{12}; z_{13})^\tau \in \mathcal{H}_1 := \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{13}, \\ z_{11} &:= \left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2; \{\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k}\}_{k=1}^2; \vec{w}_1 \right) \in \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3 = \mathcal{H}_{11}, \\ z_{12} &:= \left(\{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3; \{\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}\}_{k=1}^3; \vec{w}_2 \right) \in \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3 =: \mathcal{H}_{12}, \\ z_{13} &:= \vec{w}_3 \in \mathbb{C}^3 =: \mathcal{H}_{13}. \end{aligned}$$

Соответственно кинематическими переменными будем считать

$$(69) \quad \begin{aligned} z_2 &:= (z_{21}; z_{22}; z_{23})^\tau \in \mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_{21} \oplus \mathcal{H}_{22} \oplus \mathcal{H}_{23}, \\ z_{21} &:= \left(\zeta_{11}; P_2 \vec{\delta}_1 \right) \in L_{2,\Gamma_{11}} \oplus \mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_{21}, \\ z_{22} &:= \left(\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2 \vec{\delta}_2 \right) \in \left(\bigoplus_{j=1}^2 L_{2,\Gamma_{2j}} \right) \oplus \mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_{22}, \\ z_{23} &:= P_2 \vec{\delta}_3 \in \mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_{23}. \end{aligned}$$

Сгруппируем сейчас слагаемые в преобразованных уравнениях, содержащие производные по t от динамических переменных. Они образуют операторную матрицу $C^{(1)}$ (со структурой 3×3), которая отвечает ортогональному разложению $\mathcal{H}_1 = \bigoplus_{k=1}^3 \mathcal{H}_{1k}$. Тогда эти слагаемые будут иметь вид $C^{(1)} dz_1/dt$, причём

$$(70) \quad C^{(1)} z_1 = \begin{pmatrix} C_{11} z_{11} + C_{12} z_{12} + C_{13} z_{13} \\ C_{21} z_{11} + C_{22} z_{12} + C_{23} z_{13} \\ C_{31} z_{11} + C_{32} z_{12} + C_{33} z_{13} \end{pmatrix}.$$

Получаем следующие соотношения:

$$(71) \quad \begin{aligned} C_{11} z_{11} &= \left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{0,1} \{\vec{w}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2; \{\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{h,S_1} \{\vec{w}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2; \right. \\ &\vec{J}_1 \vec{w}_1 + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times (\vec{w}_{1k} + \rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k})) d\Omega_{1k} + \int_{G_2} (\vec{h}_1 \times (\vec{w}_1 \times \vec{h}_2)) dm_2 + \\ &\left. + \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{w}_1 \times \vec{h}_1)) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{w}_1 \times \vec{h}_1)) d\Omega_{31} \right); \end{aligned}$$

$$(72) \quad \begin{aligned} C_{12} z_{12} &= \left(\vec{0}; \vec{0}; \int_{G_2} (\vec{h}_1 \times (\vec{w}_2 \times \vec{r}_2)) dm_2 + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} (\vec{h}_1 \times (\vec{w}_{2k} + \rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k})) d\Omega_{2k} + \right. \\ &\left. + \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{w}_2 \times \vec{h}_2)) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{w}_2 \times \vec{h}_2)) d\Omega_{31} \right); \end{aligned}$$

$$(73) \quad C_{13} z_{13} = \left(\vec{0}; \vec{0}; \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{w}_3 \times \vec{r}_{30})) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{w}_3 \times \vec{r}_{31})) d\Omega_{31} \right);$$

$$(74) \quad C_{21}z_{11} = \left(P_{0,2} \left\{ \vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 \right\}_{k=1}^3 ; P_{h,S_2,\Gamma} \left\{ \vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 \right\}_{k=1}^3 ; \int_{G_2} \left(\vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) \right) dm_2 + \right. \\ \left. + \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) d\Omega_{31} \right);$$

$$(75) \quad C_{22}z_{12} = \left(\{ \vec{w}_{2k} \}_{k=1}^3 + P_{0,2} \{ \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k} \}_{k=1}^3 ; \{ \rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k} \}_{k=1}^3 + P_{h,S_2,\Gamma} \{ \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k} \}_{k=1}^3 ; \right. \\ \left. \vec{J}_2 \vec{\omega}_2 + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} (\vec{r}_{2k} \times (\vec{w}_{2k} + \rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{2k})) d\Omega_{2k} + \right. \\ \left. + \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2)) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2)) d\Omega_{31} \right);$$

$$(76) \quad C_{23}z_{13} = \left(\vec{0}; \vec{0}; \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_2 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30})) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31})) d\Omega_{31} \right);$$

$$(77) \quad C_{31}z_{11} = \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31} \times P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{h}_1)) d\Omega_{31};$$

$$(78) \quad C_{32}z_{12} = \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2)) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31} \times P_{G,3}(\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2)) d\Omega_{31};$$

$$(79) \quad C_{33}z_{13} = \left(\vec{J}_{T,3} + \vec{J}_{np,3} \right) \vec{\omega}_3.$$

Опираясь на связи (71)–(79) можно доказать следующее утверждение (для близкой задачи оно проведено в работе [28]).

Теорема 1. *Оператор $C^{(1)} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$, построенный по схеме (70)–(79), является оператором кинетической энергии исследуемой гидромеханической системы. Он ограничен, самосопряжён и положительно определён в пространстве \mathcal{H}_1 , причем квадратичная форма этого оператора вычисляется по следующей формуле:*

$$(80) \quad (C^{(1)} z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \left\{ \rho_{10} \int_{\Omega_{10}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{10}|^2 d\Omega_{10} + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k} + \vec{u}_{1k}|^2 d\Omega_{1k} \right\} + \\ + \left\{ \rho_{20} \int_{\Omega_{20}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{20}|^2 d\Omega_{20} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k} + \vec{u}_{2k}|^2 d\Omega_{2k} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30}|^2 d\Omega_{30} + \right. \\
& \left. + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} |P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31})|^2 d\Omega_{31} \right\}.
\end{aligned}$$

Замечание 1. Квадратичный функционал (80) равен удвоенной кинетической энергии приведенной гидромеханической системы, когда движение жидкости в третьем маятнике с полостью Ω_{31} , целиком заполненной идеальной жидкостью, описывается лишь угловой скоростью $\vec{\omega}_3$, а поле скорости в Ω_{31} выражается через потенциалы Жуковского.

3.3. Преобразование кинематических граничных условий. Исходные кинематические условия определяются соотношениями (13)–(14), (18). Перепишем их с использованием операторов взятия нормальной компоненты: для первого маятника

$$\begin{aligned}
(81) \quad & \frac{d\zeta_{11}}{dt} = \gamma_{n,11} \vec{u}_{11} := \vec{u}_{11} \cdot \vec{n}_{11} = \vec{u}_{12} \cdot \vec{n}_{11} =: \gamma_{n,11} \vec{u}_{12} \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\
& \frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_1 = P_2 \vec{\omega}_1, \quad \vec{n}_{11} = \vec{e}_1^3;
\end{aligned}$$

для второго маятника

$$\begin{aligned}
(82) \quad & \frac{d\zeta_{21}}{dt} = \gamma_{n,21} \vec{u}_{21} := \vec{u}_{21} \cdot \vec{n}_{21} = \vec{u}_{22} \cdot \vec{n}_{21} =: \gamma_{n,21} \vec{u}_{22} \quad (\text{на } \Gamma_{12}), \\
& \frac{d\zeta_{22}}{dt} = \gamma_{n,22} \vec{u}_{22} := \vec{u}_{22} \cdot \vec{n}_{22} = \vec{u}_{23} \cdot \vec{n}_{22} =: \gamma_{n,22} \vec{u}_{23} \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \\
& \frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_2 = P_2 \vec{\omega}_2, \quad \vec{n}_{21} = \vec{n}_{22} = \vec{e}_2^3;
\end{aligned}$$

для третьего маятника

$$(83) \quad \frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_3 = P_2 \vec{\omega}_3.$$

С помощью обобщённых формул Грина можно доказать (см. [30]), что операторы взятия нормальной компоненты, являются сопряженными к вспомогательным операторам Q_1 и Q_2 , а именно справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Оператор $\hat{\gamma}_{n,1} \vec{u}_1 := \gamma_{n,11} \vec{u}_{11}$ действует ограниченным образом из $\vec{L}_2(\Omega_1)$ в $\tilde{H}_{\Gamma_{11}}^{-1/2}$, при этом выполнено свойство

$$Q_1^* = (\rho_{11} - \rho_{12}) \hat{\gamma}_{n,1}.$$

Аналогично оператор $\hat{\gamma}_{n,2} \vec{u}_2 := \{\gamma_{n,2j} \vec{u}_{2j}\}_{j=1}^2$ действует ограниченным образом из $\vec{L}_2(\Omega_2)$ в $\tilde{H}_{\Gamma_{21}}^{-1/2} \times \tilde{H}_{\Gamma_{22}}^{-1/2}$, при этом

$$Q_2^* = \text{diag}(\rho_{21} - \rho_{22}; \rho_{22} - \rho_{23}) \hat{\gamma}_{n,2} = \{(\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \gamma_{n,2j} \vec{u}_{2j}\}_{j=1}^2.$$

Несложно убедиться, что при выполнении кинематических условий (81)–(83) выполнены также следующие соотношения:

для первого маятника

$$(84) \quad \begin{aligned} & (\rho_{11} - \rho_{12}) \left[\frac{d}{dt} (\zeta_{11} + \theta_{11} (P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11})) - \right. \\ & \left. - \gamma_{n,11} (\rho_{11}^{-1} \nabla \Phi_{11} + \theta_{11} ((P_2 \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^3)) \right] = 0, \\ & - (\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_{11}) \left(\frac{d\zeta_{11}}{dt} - \gamma_{n,11} (\rho_{11}^{-1} \nabla \Phi_{11}) \right) d\Gamma_{11} + \\ & + (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_1) \left(\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_1 - P_2 \vec{\omega}_1 \right) = 0; \end{aligned}$$

для второго маятника

$$(85) \quad \begin{aligned} & \left\{ (\rho_{2,j} - \rho_{2,j+1}) \left[\left(\frac{d\zeta_{2j}}{dt} - \gamma_{n,2j} (\rho_{2j}^{-1} \nabla \Phi_{2j}) \right) + \frac{d}{dt} \theta_{2j} ((P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \theta_{2j} ((P_2 \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3) \right] \right\}_{j=1}^2 = 0, \\ & - \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_{2j}) \left(\frac{d\zeta_{2j}}{dt} - \gamma_{n,2j} (\rho_{2j}^{-1} \nabla \Phi_{2j}) \right) d\Gamma_{2j} + \\ & + (m_2 l_2 + m_3 h_2) \left(\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_2 - P_2 \vec{\omega}_2 \right) = \vec{0}; \end{aligned}$$

для третьего маятника

$$(86) \quad m_3 l_3 \left(\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_3 - P_2 \vec{\omega}_3 \right) = \vec{0}.$$

Введём осевые моменты инерции, отвечающие границам раздела жидкостей в полостях первого и второго маятников:

$$(87) \quad \begin{aligned} \beta_{jl}^{(11)} & := \int_{\Gamma_{11}} x_1^j (\theta_{11} x_1^l) d\Gamma_{11}, \quad j, l = 1, 2; \\ \beta_{jl}^{(2k)} & := \int_{\Gamma_{2k}} x_2^j (\theta_{2k} x_2^l) d\Gamma_{2k}, \quad j, l = 1, 2, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

В статье [28] доказано следующее утверждение.

Лемма 3. *Введем матрицы*

$$U_1 := \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}, \quad U_2 := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix},$$

где $v_{11} := (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_2) - (\rho_{11} - \rho_{22}) \beta_{11}^{(11)}$, $v_{12} := (\rho_{11} - \rho_{12}) \beta_{12}^{(11)}$, $v_{21} := (\rho_{11} - \rho_{12}) \beta_{21}^{(11)}$, $v_{22} := (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_2) - (\rho_{11} - \rho_{22}) \beta_{22}^{(11)}$;
 $u_{11} := (m_2 l_2 + m_3 h_2) - (\rho_{21} - \rho_{22}) \beta_{11}^{(21)} - (\rho_{22} - \rho_{23}) \beta_{11}^{(22)}$, $u_{12} := (\rho_{21} - \rho_{22}) \beta_{12}^{(21)} +$
 $(\rho_{22} - \rho_{23}) \beta_{12}^{(22)}$, $u_{21} := (\rho_{21} - \rho_{22}) \beta_{21}^{(21)} + (\rho_{22} - \rho_{23}) \beta_{21}^{(22)}$, $u_{22} := (m_2 l_2 + m_3 h_2) -$
 $(\rho_{21} - \rho_{22}) \beta_{22}^{(21)} - (\rho_{22} - \rho_{23}) \beta_{22}^{(22)}$.

Если выполнены свойства

$$(88) \quad \Delta_2^{(11)} := \det U_1 \neq 0, \quad \Delta_2^{(22)} := \det U_2 \neq 0,$$

то условия (81) эквивалентны условиям (84), а условия (82) эквивалентны условиям (85).

Будем считать всюду далее, что условия (88) (случай общего положения) являются выполненными. Введём теперь, опираясь на соотношения (84)–(86), операторную матрицу

$$(89) \quad C^{(2)} := \text{diag} \left(C_{11}^{(2)}; C_{22}^{(2)}; C_{33}^{(2)} \right),$$

действующую на кинематические переменные

$$z_2 = (z_{21}, z_{22}, z_{23})^T, \quad z_{21} = (\zeta_{11}; P_2 \vec{\delta}_1), \quad z_{22} = (\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2 \vec{\delta}_2), \quad z_{23} = P_2 \vec{\delta}_3,$$

согласно следующим формулам:

$$(90) \quad \begin{aligned} C_{11}^{(2)} z_{21} &:= \left((\rho_{11} - \rho_{12}) \left[\zeta_{11} + \theta_{11} ((P_1 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^3) \right]; \right. \\ &\quad \left. - (\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_{11}) \zeta_{11} d\Gamma_{11} + (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_2) P_2 \vec{\delta}_1 \right); \end{aligned}$$

$$(91) \quad \begin{aligned} C_{22}^{(2)} z_{22} &:= \left(\left\{ (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) (\zeta_{2j} + \theta_{2j} ((P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3)) \right\}_{j=1}^2; \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_{2j}) \zeta_{2j} d\Gamma_{2j} + (m_2 l_2 + m_3 h_2) P_2 \vec{\delta}_2 \right); \end{aligned}$$

$$(92) \quad C_{23}^{(2)} z_{23} := m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3.$$

Введём дополнительно к определителям (88) следующие величины:

$$(93) \quad \begin{aligned} \Delta_1^{(11)} &:= (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_2) - (\rho_{11} - \rho_{12}) \beta_{11}^{(11)}, \\ \Delta_1^{(22)} &:= (m_2 l_2 + m_3 h_2) - (\rho_{21} - \rho_{22}) \beta_{11}^{(21)} - (\rho_{22} - \rho_{23}) \beta_{11}^{(22)}. \end{aligned}$$

В [28] доказано, что операторная матрица $C^{(2)} : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ является ограниченным самосопряжённым оператором, причем её квадратичная форма

$$(94) \quad \begin{aligned} (gC^{(2)} z_2, z_2)_{\mathcal{H}_2} &= g \left\{ (\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} [|\zeta_{11} + \theta_{11} ((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^3)|^2 - \right. \\ &\quad \left. - |\theta_{11} ((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^3)|^2] d\Gamma_{11} + (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_2) |P_2 \vec{\delta}_1|^2 \right\} + \\ &\quad + g \left\{ \sum_{j=1}^2 (\rho_{2,j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} [|\zeta_{2j} + \theta_{2j} ((P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3)|^2 - \right. \\ &\quad \left. - |\theta_{2j} ((P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3)|^2] d\Gamma_{2j} + (m_2 l_2 + m_3 h_2) |P_2 \vec{\delta}_2|^2 \right\} + g m_3 l_3 |P_2 \vec{\delta}_3|^2 \end{aligned}$$

определяет потенциальную энергию гидромеханической системы.

При выполнении условия (88) оператор $C^{(2)}$ ограниченно обратим, при этом справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Оператор $C^{(2)} : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ неотрицателен тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$(95) \quad \Delta_1^{(11)} \geq 0, \quad \Delta_2^{(11)} \geq 0, \quad \Delta_1^{(22)} \geq 0, \quad \Delta_2^{(22)} \geq 0,$$

и положительно определён, если и только если

$$(96) \quad \Delta_1^{(11)} > 0, \quad \Delta_2^{(11)} > 0, \quad \Delta_1^{(22)} > 0, \quad \Delta_2^{(22)} > 0.$$

В общем случае квадратичная форма оператора $C^{(2)}$ принимает отрицательные значения на подпространстве размерности не выше $\varkappa = 4$.

Доказательство. Произвольный элемент $z_2 = (\zeta_{11}; P_2\vec{\delta}_1; \{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2\vec{\delta}_2; P_2\vec{\delta}_3)^\tau \in \mathcal{H}_2$ единственным образом представим в виде $z_2 = v + w$, где

$$v = (\tilde{\zeta}_{11}; \vec{0}; \{\tilde{\zeta}_{2j}\}_{j=1}^2; \vec{0}; P_2\vec{\delta}_3)^\tau \in \mathcal{H}_{21}, \quad \tilde{\zeta}_{kj} := \zeta_{kj} + \theta_{kj}((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_{kj}) \cdot \vec{e}_k^3),$$

$$w = (-\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^3); P_2\vec{\delta}_1; \{-\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3)\}_{j=1}^2; P_2\vec{\delta}_2; \vec{0})^\tau \in \mathcal{H}_{22}.$$

Таким образом $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{21} \dot{+} \mathcal{H}_{22}$, где \mathcal{H}_{22} является четырехмерным подпространством в \mathcal{H}_2 .

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$C^{(2)}v = \left((\rho_{11} - \rho_{12})\tilde{\zeta}_{11}; -(\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_{11})\tilde{\zeta}_{11} d\Gamma_{11}; \right. \\ \left. \{(\rho_{2j} - \rho_{2,j+1})\tilde{\zeta}_{2j}\}_{j=1}^2; -\sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_{2j})\tilde{\zeta}_{2j} d\Gamma_{2j}; m_3 l_3 P_2\vec{\delta}_3 \right),$$

$$C^{(2)}w = \left(0; (m_1 l_1 + (m_2 + m_3)h_2)P_2\vec{\delta}_1 + \right. \\ \left. + (\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} \theta_{11}(\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_{11})((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^3) d\Gamma_{11}; \right. \\ \left. 0; (m_2 l_2 + m_3 h_2)P_2\vec{\delta}_2 + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} \theta_{2j}(\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_{2j})((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3) d\Gamma_{2j}; \vec{0} \right).$$

При этом $(C^{(2)}w, v)_{\mathcal{H}_2} = (C^{(2)}v, w)_{\mathcal{H}_2} = 0$. Отсюда получаем, что

$$(C^{(2)}z_2, z_2)_{\mathcal{H}_2} = (C^{(2)}(v+w), (v+w))_{\mathcal{H}_2} = \\ = (C^{(2)}v, v)_{\mathcal{H}_2} + (C^{(2)}w, w)_{\mathcal{H}_2} = (\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} |\tilde{\zeta}_{11}| d\Gamma_{11} + \\ + \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} |\tilde{\zeta}_{2j}| d\Gamma_{2j} + m_3 l_3 |P_2\vec{\delta}_3|^2 + (C^{(2)}w, w)_{\mathcal{H}_2}.$$

Таким образом квадратичная форма оператора $C^{(2)}$ может принимать отрицательные собственные значения лишь на элементах $z_2 = w \in \mathcal{H}_{22}$. Так как $\dim \mathcal{H}_{22} = 4$, то число отрицательных собственных значений оператора $C^{(2)}$ не превосходит $\varkappa = 4$.

Очевидно, оператор $C^{(2)}$ будет положительно определен только в том случае, когда форма $(C^{(2)}w, w)_{\mathcal{H}_2}$ является положительно определенной. Непосредственный подсчет приводит к соотношению

$$\begin{aligned}
(97) \quad & (C^{(2)}w, w)_{\mathcal{H}_2} = (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_2) |P_2 \vec{\delta}_1|^2 - \\
& - (\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} |\theta_{11}(\delta_{1,2} x_1^1 - \delta_{1,1} x_1^2)|^2 d\Gamma_{11} + \\
& + (m_2 l_2 + m_3 h_2) |P_2 \vec{\delta}_2|^2 - \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} |\theta_{2j}(\delta_{2,2} x_2^1 - \delta_{2,1} x_2^2)|^2 d\Gamma_{2j} = \\
& = [m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_2 - (\rho_{11} - \rho_{12}) \beta_{11}^{(11)}] \delta_{1,1}^2 + 2(\rho_{11} - \rho_{12}) \beta_{12}^{(11)} \delta_{1,1} \delta_{1,2} + \\
& + [m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_2 - (\rho_{11} - \rho_{12}) \beta_{22}^{(11)}] \delta_{1,2}^2 + \\
& + [m_2 l_2 + m_3 h_2 - (\rho_{21} - \rho_{22}) \beta_{11}^{(21)} - (\rho_{22} - \rho_{23}) \beta_{11}^{(22)}] \delta_{2,1}^2 + \\
& + 2[(\rho_{21} - \rho_{22}) \beta_{12}^{(21)} + (\rho_{22} - \rho_{23}) \beta_{12}^{(22)}] \delta_{2,1} \delta_{2,2} + \\
& + [m_2 l_2 + m_3 h_2 - (\rho_{21} - \rho_{22}) \beta_{22}^{(21)} + (\rho_{22} - \rho_{23}) \beta_{22}^{(22)}] \delta_{2,2}^2.
\end{aligned}$$

Правая часть (97) представляет из себя сумму двух квадратичных форм от четырех скалярных переменных $\delta_{1,1}, \delta_{1,2}$ и $\delta_{2,1}, \delta_{2,2}$ соответственно, где $P_2 \vec{\delta}_1 = \sum_{j=1}^2 \delta_{1,j} \vec{e}_1^j$, $P_2 \vec{\delta}_2 = \sum_{j=1}^2 \delta_{2,j} \vec{e}_2^j$. Используя критерий Сельвестра, получаем, что первая квадратичная форма положительно определена при условии $\Delta_1^{(11)} > 0$, $\Delta_2^{(11)} > 0$. Аналогично вторая квадратичная форма положительно определена при условии $\Delta_1^{(22)} > 0$, $\Delta_2^{(22)} > 0$. Таким образом мы приходим к условиям (96). Очевидно неотрицательность данных квадратичных форм при условиях (95) эквивалентна неотрицательности оператора $C^{(2)}$. \square

Определение 1. Будем говорить, что изучаемая гидромеханическая система статически устойчива по линейному приближению, если оператор $C^{(2)}$ потенциальной энергии положительно определен, т.е. выполнены условия (96).

Отметим, что условия статической устойчивости выполнены, если маятники имеют достаточно большую массу и их центр масс расположен достаточно далеко от точки подвеса.

3.4. О свойствах оператора диссипации энергии и оператора обмена энергиями. Действие сил трения в шарнирах (диссипативных сил) описывается оператором

$$(98) \quad A_1 z_1 = \left(\vec{0}, \vec{0}, \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1); \vec{0}, \vec{0}, \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - \alpha_3 (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2); \alpha_3 (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) \right)^\tau,$$

действующим в пространстве $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{13}$ на динамические переменные

$$\begin{aligned}
z_1 &= (z_{11}; z_{12}; z_{13})^\tau, \quad z_{11} = (\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2; \{\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k}\}_{k=1}^2; \vec{\omega}_1), \\
z_{12} &= (\{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3; \{\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}\}_{k=1}^3; \vec{\omega}_2), \quad z_{13} = \vec{\omega}_3.
\end{aligned}$$

Данный оператор является ограниченным неотрицательным самосопряжённым оператором, причем его квадратичная форма имеет вид

$$(99) \quad (A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \sum_{l=2}^3 \alpha_l |\vec{\omega}_l - \vec{\omega}_{l-1}|^2 \geq 0.$$

Введём ещё вспомогательные операторы B_{12} и B_{21} (обмена энергиями). Первый из них действует на кинематические переменные

$$z_2 = (z_{21}; z_{22}; z_{23})^T, \quad z_{21} = (\zeta_{11}; P_2 \vec{\delta}_1), \quad z_{22} = (\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2 \vec{\delta}_2), \quad z_{23} = P_2 \vec{\delta}_3,$$

по закону

$$(100) \quad B_{12} = \text{diag} (B_{12,1}; B_{12,2}; B_{12,3}) : \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{21} \oplus \mathcal{H}_{22} \oplus \mathcal{H}_{23} \rightarrow \mathcal{H}_1,$$

$$(101) \quad \begin{aligned} B_{12,1} z_{21} &= \left(\vec{0}; Q_1 (\zeta_{11} + \theta_{11} ((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^3)); \right. \\ &\left. - (\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_{11}) \zeta_{11} d\Gamma_{11} + (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_1) P_2 \vec{\delta}_1 \right); \end{aligned}$$

$$(102) \quad \begin{aligned} B_{12,2} z_{22} &= \left(\vec{0}; Q_2 \left\{ \zeta_{2j} + \theta_{2j} ((P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3) \right\}_{j=1}^2; \right. \\ &\left. - \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_{2j}) \zeta_{2j} d\Gamma_{2j} + (m_2 l_2 + m_3 h_2) P_2 \vec{\delta}_2 \right); \end{aligned}$$

$$(103) \quad B_{12,3} z_{23} = m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3.$$

Отметим, что здесь Q_1 и Q_2 — операторы краевых задач (63) и (64) соответственно.

Второй оператор B_{21} действует на динамические переменные по закону

$$(104) \quad B_{21} = \text{diag} (B_{21,1}; B_{21,2}; B_{21,3}) : \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{13} \rightarrow \mathcal{H}_2,$$

$$(105) \quad \begin{aligned} B_{21,1} z_{11} &:= (- (\rho_{11} - \rho_{12}) [\gamma_{n,11} (\rho_{11}^{-1} \nabla \Phi_{11}) + \theta_{11} ((P_2 \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^3)]; \\ &(\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_{11}) \gamma_{n,11} (\rho_{11}^{-1} \nabla \Phi_{11}) d\Gamma_{11} - (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_1) P_2 \vec{\omega}_1); \end{aligned}$$

$$(106) \quad \begin{aligned} B_{21,2} z_{12} &:= \left(- \left\{ (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) [\gamma_{n,2j} (\rho_{2j}^{-1} \nabla \Phi_{2j}) + \theta_{2j} ((P_2 \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3)] \right\}_{j=1}^2; \right. \\ &\left. \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_{2j}) \gamma_{n,2j} (\rho_{2j}^{-1} \nabla \Phi_{2j}) d\Gamma_{2j} - (m_2 l_2 + m_3 h_2) P_2 \vec{\omega}_2 \right); \end{aligned}$$

$$(107) \quad B_{21,3} z_{13} = -m_3 l_3 P_2 \vec{\omega}_3.$$

В статье [28] на основе леммы 2 доказано следующее утверждение.

Лемма 5. *Операторы B_{12} и B_{21} , определяемые формулами (100)–(103) и (104)–(107) на своих областях определения, являются кососамосопряжёнными:*

$$(108) \quad (B_{12} z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = - (z_2, B_{21} z_1)_{\mathcal{H}_2},$$

$$(109) \quad \begin{aligned} \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}) &= \mathcal{D}(B_{21,1}) \oplus \mathcal{D}(B_{21,2}) \oplus \mathbb{C}^3, \\ \forall z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}) &= (\mathcal{D}(Q_1) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (\mathcal{D}(Q_2) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}^2, \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}(Q_1) = H_{\Gamma_{11}}^{1/2}$, $\mathcal{D}(Q_2) = H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2}$,

$$(110) \quad \mathcal{D}(B_{21,1}) := \{z_{11} = (\vec{u}_1; \vec{\omega}_1) \in \mathcal{H}_{11} : \hat{\gamma}_{n,1} \vec{u}_1 \in L_{2,\Gamma_{11}}\},$$

$$(111) \quad \mathcal{D}(B_{21,2}) := \{z_{12} = (\vec{u}_2; \vec{\omega}_2) \in \mathcal{H}_{12} : \hat{\gamma}_{n,2} \vec{u}_2 \in L_{2,\Gamma_{21}} \oplus L_{2,\Gamma_{22}}\}.$$

3.5. Итоговая операторная формулировка и теорема о разрешимости финальной задачи. После введения операторных матриц преобразованная система обыкновенных дифференциально-операторных уравнений вместе с начальными условиями записывается в виде задачи Коши в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$

$$(112) \quad \begin{aligned} C^{(1)} \frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + g B_{12} z_2 &= f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \\ g C^{(2)} \frac{dz_2}{dt} + g B_{21} z_1 &= 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{aligned}$$

где $C^{(1)}$ – операторная матрица кинетической энергии, $C^{(2)}$ – операторная матрица потенциальной энергии, A_1 – операторная матрица диссипации энергии. Для полной постановки задачи следует также добавить условия связи

$$(113) \quad \frac{d}{dt} \vec{\delta}_k^3 = \vec{\omega}_k^3, \quad k = 1, 2, 3.$$

Напомним, что z_1 – совокупность динамических переменных исследуемой системы (см. (68)), а z_2 – совокупность ее кинематических переменных исследуемой системы (см. (69)). Наконец заданная функция $f_1(t)$ переменной t со значениями в \mathcal{H}_1 такова:

$$(114) \quad f_1(t) := \left((P_{0,1} \{f_{1k}(t)\}_{k=1}^2; P_{h,S_1} \{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2; \vec{M}_{1,пп}(t)); \right. \\ \left. (P_{0,2} \{f_{2k}(t)\}_{k=1}^3; P_{h,S_2,\Gamma} \{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^3; \vec{M}_{2,пп}(t); \vec{M}_{3,пп}(t))^\tau \right).$$

Здесь функции справа – это заданные функции в уравнениях (43), (44), (47) – первый маятник, (56), (57), (59) – второй маятник, (28) – третий маятник.

Заметим еще, что компоненты начальных данных $z_1(0) = z_1^0 = (z_{11}^0; z_{12}^0; z_{13}^0)^\tau$ и $z_2(0) = z_2^0 = (z_{21}^0; z_{22}^0; z_{23}^0)^\tau$ в (112) обладают свойствами:

$$(115) \quad \begin{aligned} z_{11}^0 &= (\{\vec{w}_{1k}^0\}_{k=1}^2; \{\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k}^0\}_{k=1}^2; \vec{\omega}_1^0) \in \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3, \\ z_{12}^0 &= (\{\vec{w}_{2k}^0\}_{k=1}^3; \{\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}^0\}_{k=1}^3; \vec{\omega}_2) \in \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3, \\ z_{13}^0 &= \vec{\omega}_3^0 \in \mathbb{C}^3, \\ z_{21}^0 &= (\zeta_{11}^0; P_2 \vec{\delta}_1^0) \in L_{2,\Gamma_{11}} \oplus \mathbb{C}^2, \\ z_{22}^0 &= (\{\zeta_{2j}^0\}_{j=1}^2; P_2 \vec{\delta}_2^0) \in (L_{2,\Gamma_{21}} \oplus L_{2,\Gamma_{22}}) \oplus \mathbb{C}^2, \\ z_{23}^0 &= P_2 \vec{\delta}_3^0 \in \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

Задачу (112) кратко можно переписать в виде

$$(116) \quad C \frac{dz}{dt} + Az + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0,$$

$$(117) \quad C := \text{diag}(C^{(1)}; gC^{(2)}), \quad A := \text{diag}(A_1; 0), \quad B := \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

где C — ограниченный и ограниченно обратимый оператор полной энергии системы, A — ограниченный неотрицательный оператор диссипации, а B — кососамосопряжённый оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями.

Определение 2. *Сильным решением задачи Коши (116) на отрезке $[0; T]$ назовем такую функцию $z(t)$ со значениями в \mathcal{H} , для которой выполнены следующие условия.*

1°. *При любом $t \in [0; T]$ элемент $z(t) \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12})$ и функция $Bz(t)$ непрерывна по t , т.е. $Bz(t) \in C([0; T]; \mathcal{H})$.*

2°. *Функция dz/dt непрерывна по t , т.е. $z(t) \in C^1([0; T]; \mathcal{H})$.*

3°. *При любом $t \in [0; T]$ выполнено уравнение (116), а также выполнено начальное условие.*

Задача (116) с теми же свойствами операторных коэффициентов была изучена ранее в статье [23], где рассматривалась проблема малых движений системы двух сочленённых маятников, с полостями частично заполненными идеальными жидкостями. В частности, там доказана теорема существования и единственности сильного решения задачи (112) на заданном отрезке времени $[0; T]$ при выполнении условия

$$(118) \quad z^0 \in \mathcal{D}(B), \quad f(t) \in C^1([0; T]; \mathcal{H})$$

как в случае статической устойчивости по линейному приближению ($C^{(2)} \gg 0$) так и в общем случае при выполнении условия (88).

Возвращаясь к условиям на кинематические и динамические переменные получаем условия разрешимости задачи (112).

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия.*

1°. *Первая группа условий:*

$$z_{11}^0 = (\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2; \{\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k}^0\}_{k=1}^2; \vec{\omega}_1^0) \in \mathcal{D}(B_{21,1});$$

$$z_{12}^0 = (\{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3; \{\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}^0\}_{k=1}^3; \vec{\omega}_2^0) \in \mathcal{D}(B_{21,2}), \quad z_{13}^0 \in \mathbb{C}^3.$$

2°. *Вторая группа условий:*

$$z_{21}^0 = (\zeta_{11}^0; P_2 \vec{\delta}_1^0) \in H_{\Gamma_{11}}^{1/2} \oplus \mathbb{C}^2,$$

$$z_{22}^0 = (\{\zeta_{2j}^0\}_{j=1}^2; P_2 \vec{\delta}_2^0) \in (H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2}) \oplus \mathbb{C}^2, \quad z_{23}^0 = P_2 \vec{\delta}_3^0 \in \mathbb{C}^2.$$

3°. *Третья группа условий:*

$$\vec{f}_{kj} \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega_{kj})), \quad k = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Тогда задача (112) имеет единственное сильное (по переменной t) решение на отрезке $[0, T]$.

4. О СВОЙСТВАХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

4.1. Использование вариационных соотношений и потенциалов Жуковского. Начнем изучение спектральных свойств исследуемой гидромеханической системы со случая консервативной системы, являющейся статически устойчивой по линейному приближению, т.е. когда в задаче (112) оператор диссипации $A_1 = 0$, а оператор потенциальной энергии $C^{(2)}$ положительно определен. Рассмотрим решения однородной задачи (112), зависящие от t по закону

$$(119) \quad z_k(t) = \exp(i\lambda t)z_k, \quad k = 1, 2,$$

где λ — частота собственных колебаний, а z_k — амплитудные элементы.

Отсюда с учётом дополнительных связей (113) приходим к спектральной задаче

$$(120) \quad i\lambda C^{(1)}z_1 + gB_{12}z_2 = 0, \quad i\lambda C^{(2)}z_2 + B_{21}z_1 = 0, \quad i\lambda P^3\vec{\delta}_k - P^3\vec{\omega}_k = \vec{0}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Для $\lambda = 0$ получаем задачу

$$(121) \quad B_{12}z_2 = 0, \quad B_{21}z_1 = 0, \quad P^3\vec{\omega}_k = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

В силу выполнения условий леммы 3 из определений (100)–(103) и (104)–(107) для блоков матриц B_{12} и B_{21} получаем, что справедливые соотношения (81)–(83) для решений вида (119) при $\lambda = 0$ приводят к формулам

$$(122) \quad \begin{aligned} \gamma_{n,11}\vec{u}_{11} = \gamma_{n,11}\vec{u}_{12} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \quad P_2\vec{\omega}_1 = \vec{0}, \quad P_2\vec{\omega}_2 = \vec{0}, \quad P_2\vec{\omega}_3 = \vec{0}, \\ \gamma_{n,21}\vec{u}_{21} = \gamma_{n,21}\vec{u}_{22} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \quad \gamma_{n,22}\vec{u}_{22} = \gamma_{n,22}\vec{u}_{23} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}). \end{aligned}$$

Отсюда приходим к выводу, что $z_2 = 0$,

$$(123) \quad \begin{aligned} z_1 = (z_{11}^0; z_{12}^0; z_{13}^0)^\tau; \quad z_{11}^0 = \left(\{\vec{w}_{1k}^0\}_{k=1}^2; \vec{0}; \vec{0} \right), \quad \forall \vec{w}_{1k}^0 \in \vec{J}_0(\Omega_{1k}), \quad k = 1, 2; \\ z_{12}^0 = \left(\{\vec{w}_{2k}^0\}_{k=1}^3; \vec{0}; \vec{0} \right), \quad \forall \vec{w}_{2k}^0 \in \vec{J}_0(\Omega_{2k}), \quad k = 1, 2, 3, \quad z_{13}^0 = \vec{\omega}_3^0 = \vec{0}. \end{aligned}$$

Лемма 6. *Спектральная задача (120) имеет бесконечнократное нулевое собственное значение. Физически ему отвечает такое стационарное состояние системы, когда движение жидкостей в полостях маятников не зависят от времени и являются чисто вихревыми, причём границы раздела $\Gamma_{11}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}$ между жидкостями не отклоняются, а вся система в целом (каждый маятник) по отношению к исходному состоянию повернута вокруг вертикальной оси на произвольные углы $(\vec{\delta}_1^3)^0, (\vec{\delta}_2^3)^0, (\vec{\delta}_3^3)^0$ соответственно.*

Рассмотрим теперь случай ненулевых частот колебаний, т.е. задачу (120) для $\lambda \neq 0$. Перепишывая операторные соотношения в виде равенств элементов из подпространств \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 , можно исключить кинематические переменные и преобразовать динамические переменные.

В самом деле, для динамических переменных первого маятника из однородного уравнения (43) для решений вида (119) получаем соотношение

$$(124) \quad i\lambda \left(\{\vec{w}_{1k}^0\}_{k=1}^2 + P_{0,1} \{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2 \right) = 0,$$

из которого переменная z_{11} преобразуется в

$$(125) \quad \tilde{z}_{11} := \left(-P_{0,1} \{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2; \{\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k}\}_{k=1}^2; \vec{\omega}_1 \right).$$

Аналогично для переменных второго маятника из однородного уравнения (56) получаем связь

$$(126) \quad i\lambda \left(\{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3 + P_{0,2} \left\{ \vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k} \right\}_{k=1}^3 \right) = \vec{0},$$

из которого переменная z_{12} преобразуется в

$$(127) \quad \tilde{z}_{12} := \left(-P_{0,2} \left\{ \vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k} \right\}_{k=1}^3 ; \left\{ \rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k} \right\}_{k=1}^2 ; \vec{\omega}_2 \right).$$

Соответствующая переменная для третьего маятника остаётся неизменной

$$(128) \quad z_{13} = \tilde{z}_{13} := \vec{\omega}_3.$$

Из условий для кинематических переменных получаем связь для первого маятника:

$$(129) \quad i\lambda \zeta_{11} = \gamma_{n,11} (\rho_{11}^{-1} \nabla \Phi_{11}) = \gamma_{n,11} (\rho_{12}^{-1} \nabla \Phi_{12}), \quad i\lambda P_2 \vec{\delta}_1 = P_2 \vec{\omega}_1.$$

Отсюда

$$(130) \quad z_{21} = (\zeta_{11}; P_2 \vec{\delta}_1) = (i\lambda)^{-1} (\gamma_{n,11} (\rho_{11}^{-1} \nabla \Phi_{11}); P_2 \vec{\omega}_1) =: (i\lambda)^{-1} \tilde{z}_{21}.$$

Для второго маятника соответственно имеем:

$$(131) \quad \begin{aligned} i\lambda \zeta_{21} &= \gamma_{n,21} (\rho_{21}^{-1} \nabla \Phi_{21}) = \gamma_{n,21} (\rho_{22}^{-1} \nabla \Phi_{22}), \\ i\lambda \zeta_{22} &= \gamma_{n,22} (\rho_{22}^{-1} \nabla \Phi_{22}) = \gamma_{n,23} (\rho_{23}^{-1} \nabla \Phi_{23}), \quad i\lambda P_2 \vec{\delta}_2 = P_2 \vec{\omega}_2, \end{aligned}$$

отсюда

$$(132) \quad z_{22} = (\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2 \vec{\delta}_1) = (i\lambda)^{-1} (\{\gamma_{n,2j} (\rho_{2j}^{-1} \nabla \Phi_{2j})\}_{j=1}^2; P_2 \vec{\omega}_2) =: (i\lambda)^{-1} \tilde{z}_{22}.$$

Наконец,

$$(133) \quad z_{23} = P_2 \vec{\delta}_3 = (i\lambda)^{-1} P_2 \vec{\omega}_3 =: (i\lambda)^{-1} \tilde{z}_{23}.$$

Таким образом спектральная задача (120) для $\lambda \neq 0$ сводится к системе

$$(134) \quad i\lambda C^{(1)} \tilde{z}_1 + g B_{12} (i\lambda)^{-1} \tilde{z}_2 = 0, \quad C^{(2)} \tilde{z}_2 + B_{21} \tilde{z}_1 = 0, \quad i\lambda P^3 \vec{\delta}_k - P^3 \vec{\omega}_3 = \vec{0}, \quad k = 1, 2, 3,$$

для модифицированных динамических переменных $\tilde{z}_1 := (\tilde{z}_{11}; \tilde{z}_{12}; \tilde{z}_{13})^T \in \mathcal{H}_1$, а также кинематических переменных $\tilde{z}_2 := (\tilde{z}_{21}; \tilde{z}_{22}; \tilde{z}_{23})^T \in \mathcal{H}_2$.

Отсюда, домножая обе части первого уравнения на $i\lambda$ и скалярно на \tilde{z}_1 , с учетом свойства $B_{12}^* = -B_{21}$, получаем

$$(135) \quad (i\lambda)^2 (C^{(1)} \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1} - g (\tilde{z}_2, B_{21} \tilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} = 0.$$

Используя теперь второе уравнение (134), приходим к соотношению

$$(136) \quad -\lambda^2 (C^{(1)} \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1} + g (C^{(2)} \tilde{z}_2, \tilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2} = 0.$$

Следовательно квадраты частот колебаний $\mu := \lambda^2$ можно найти из вариационного отношения

$$(137) \quad \frac{g (C^{(2)} \tilde{z}_2, \tilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}}{(C^{(1)} \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}},$$

где \tilde{z}_1 и \tilde{z}_2 — соответствующие амплитудные элементы в задаче (120), для которых

$$(138) \quad \{\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \quad \{\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}\}_{k=1}^3 \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2).$$

Отметим, что в силу положительности операторов $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ вариационное отношение принимает лишь положительные значения, откуда следует, что спектр задачи является вещественным.

Преобразуем вариационную задачу с помощью введения потенциалов Жуковского для каждого маятника. Воспользуемся выражением (80) для кинетической энергии гидромеханической системы и преобразуем слагаемые, содержащие поля скоростей в жидкостях. Для третьего маятника учтем, что

$$P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2) = \vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2,$$

где ортопроектор $P_{G,3}$ задан в (24) и переводит элементы из $\vec{L}_2(\Omega_{31})$ в пространство

$$(139) \quad \vec{G}(\Omega_{31}) := \{\vec{u}_{31} = \nabla\psi_{31} : \int_{\partial\Omega_{31}} \psi_{31} dS = 0\}.$$

Положим $P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31}) =: \nabla\psi_{31}$. Тогда

$$(140) \quad \Delta\psi_{31} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{31}), \quad \frac{\partial\psi_{31}}{\partial n} = (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{n} \quad (\text{на } S_{31}), \quad \int_{S_{31}} \psi_{31} dS_{31} = 0.$$

Решение задачи (140) можно представить в виде $\psi_{31} = \sum_{l=1}^3 \omega_3^l \psi_{31,l}$, где функции $\psi_{31,l}$ (потенциалы Н.Е. Жуковского) зависят лишь от формы полости Ω_{31} и являются решениями вспомогательных задач

$$(141) \quad \Delta\psi_{31,l} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{31}), \quad \frac{\partial\psi_{31,l}}{\partial n} = (\vec{e}_1^l \times \vec{r}_1) \cdot \vec{n}_{11} \quad (\text{на } S_{31}), \quad \int_{S_{31}} \psi_{31,l} dS_{31} = 0, \quad l = \overline{1,3}.$$

Таким образом в формуле (80) имеем

$$(142) \quad \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} |P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31})|^2 d\Omega_{31} = \\ = \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \sum_{l=1}^3 \omega_3^l \nabla\psi_{31,l}|^2 d\Omega_{31}.$$

Квадратичная форма кинетической энергии первого маятника согласно (80) имеет вид

$$(143) \quad \rho_{10} \int_{\Omega_{10}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{10}|^2 d\Omega_{10} + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k} + \vec{w}_{1k} + \rho_{1k}^{-1} \nabla\Phi_{1k}|^2 d\Omega_{1k}.$$

В силу соотношения (124) (выполненного для $\lambda \neq 0$) получаем

$$(144) \quad \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k} + \vec{w}_{1k} + \rho_{1k}^{-1} \nabla\Phi_{1k}|^2 d\Omega_{1k} = \\ = \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} |\rho_{1k}^{-1} \nabla\Phi_{1k} + P_{G,1k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})|^2 d\Omega_{1k},$$

где $P_{G,1k} : \vec{L}_2(\Omega_{1k}) \rightarrow \vec{G}(\Omega_{1k})$, $k = 1, 2$ — соответствующие ортопроекторы.

Вновь используя потенциалы Жуковского, будем считать, что

$$(145) \quad P_{G,1k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}) = \nabla \psi_{1k}, \quad k = 1, 2,$$

где

$$(146) \quad \begin{aligned} \psi_{1k} &= \sum_{l=1}^3 \omega_1^l \psi_{1k,l}, \quad \Delta \psi_{1k,l} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \\ \frac{\partial \psi_{1k,l}}{\partial n} &= (\vec{e}_1^l \times \vec{r}_{1k}) \cdot \vec{n}_{1k} \quad (\text{на } \partial\Omega_{1k}), \quad \int_{\partial\Omega_{1k}} \psi_{1k,l} dS = 0. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к равенству

$$(147) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} |\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k} + P_{G,1k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})|^2 d\Omega_{1k} = \\ = \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} |\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k} + \sum_{l=1}^3 \omega_1^l \nabla \psi_{1k,l}|^2 d\Omega_{1k}. \end{aligned}$$

Аналогично для второго маятника из (80) имеем квадратичную форму

$$(148) \quad \begin{aligned} \rho_{20} \int_{\Omega_{20}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{20}|^2 d\Omega_{20} + \\ + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k} + \vec{w}_{2k} + \rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}|^2 d\Omega_{2k}, \end{aligned}$$

где согласно (126) для $\lambda \neq 0$ имеем

$$(149) \quad \vec{w}_{2k} = -P_{0,2k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k}), \quad k = 1, 2, 3.$$

Используя потенциалы Жуковского

$$\nabla \psi_{2k} := P_{G,2k}(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k}) = \sum_{l=1}^3 \omega_2^l \nabla \psi_{2k,l}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где

$$(150) \quad \begin{aligned} \Delta \psi_{2k,l} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_{2k}), \\ \frac{\partial \psi_{2k,l}}{\partial n} &= (\vec{e}_2^l \times \vec{r}_{2k}) \cdot \vec{n}_{2k} \quad (\text{на } \partial\Omega_{2k}), \quad \int_{\Omega_{2k}} \psi_{2k,l} dS = 0, \end{aligned}$$

приходим к равенству

$$(151) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k} + \vec{w}_{2k} + \rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}|^2 d\Omega_{2k} = \\ = \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k} + \sum_{l=1}^3 \omega_2^l \nabla \psi_{2k,l}|^2 d\Omega_{2k}. \end{aligned}$$

Используя полученные соотношения (142), (147), (151), получаем, что квадратичный функционал кинетической энергии гидромеханической системы (80)

имеет вид

$$\begin{aligned}
(152) \quad (C^{(1)}\tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1} &= \left[\rho_{10} \int_{\Omega_{10}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{10}|^2 d\Omega_{10} + \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} |\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k} + \sum_{l=1}^3 \omega_1^l \nabla \psi_{1k,l}|^2 d\Omega_{1k} \right] + \\
&+ \left[\rho_{20} \int_{\Omega_{20}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{20}|^2 d\Omega_{20} + \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k} + \sum_{l=1}^3 \omega_2^l \nabla \psi_{2k,l}|^2 d\Omega_{2k} \right] + \\
&+ \left[\rho_{30} \int_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30}|^2 d\Omega_{30} + \right. \\
&+ \left. \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \sum_{l=1}^3 \omega_3^l \nabla \psi_{3k,l}|^2 d\Omega_{31} \right].
\end{aligned}$$

Также функционал потенциальной энергии гидромеханической системы (94) преобразуется в следующую формулу:

$$\begin{aligned}
(153) \quad (C^{(2)}\tilde{z}_2, \tilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2} &= \left\{ (\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} [|\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1} \nabla \Phi_n) + \theta_{11}((P_2 \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^3)|^2 - \right. \\
&- \left. |\theta_{11}((P_2 \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^3)|^2] d\Gamma_{11} + (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_2) |P_2 \vec{\omega}_1|^2 \right\} + \\
&+ \left\{ \sum_{j=1}^2 (\rho_{2,j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} [|\gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1} \nabla \Phi_{2j}) + \theta_{2j}((P_2 \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3)|^2 - \right. \\
&- \left. |\theta_{2j}((P_2 \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^3)|^2] d\Gamma_{2j} + (m_2 l_2 + m_3 h_2) |P_2 \vec{\omega}_2|^2 \right\} + m_3 l_3 |P_2 \vec{\omega}_3|^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, вариационное отношение (137) с квадратичными функционалами (152), (153) для заданных потенциалов Жуковского в областях Ω_{1k} , $k = 1, 2$ (первый маятник, см. (146)), Ω_{2k} , $k = 1, 2, 3$ (второй маятник, см. (150)), Ω_{31} (третий маятник, см. (141)), следует рассматривать (в силу (138)) в классе функций, удовлетворяющих связям

$$\begin{aligned}
(154) \quad \Delta \Phi_{1k} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{1k}), \quad \rho_{11}^{-1} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial n_{11}} = \rho_{12}^{-1} \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial n_{11}} \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\
(155) \quad \Delta \Phi_{2k} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{2k}), \\
\rho_{21}^{-1} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_{21}} &= \rho_{22}^{-1} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n_{21}} \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \quad \rho_{22}^{-1} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_{21}} = \rho_{23}^{-2} \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial n_{22}} \quad (\text{на } \Gamma_{22}).
\end{aligned}$$

Основываясь на полученном вариационном отношении в [28] доказана дискретность спектра данной задачи, свойство ортогональной базисности, а также асимптотические формулы для ветвей собственных значений. А именно, можно доказать (см., например, [32]), что при $j \rightarrow \infty$ собственные значения μ_j можно разбить на ветвь, отвечающую пограничным волнам в окрестности поверхности раздела Γ_{11} (первый маятник), и волнам в окрестности Γ_{21} и Γ_{22} (второй

маятник), где

$$(156) \quad \mu_{j,1} = g(j/c_1)^{1/2}[1 + o(1)] \quad (j \rightarrow \infty), \quad c_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{(\rho_{11} + \rho_{12})^2}{(\rho_{11} - \rho_{12})^2} |\Gamma_{11}| > 0;$$

(157)

$$\mu_{j,2} = g(j/c_2)^{1/2}[1 + o(1)] \quad (j \rightarrow \infty), \quad c_2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{(\rho_{2k} + \rho_{2,k+1})^2}{(\rho_{2k} - \rho_{2,k+1})^2} |\Gamma_{2k}| > 0.$$

4.2. Использование теории операторов в спектральной задаче без учёта трения в шарнирах. Для дальнейших построений преобразуем спектральную задачу (134), исключив переменную \tilde{z}_2 . Для этого введём два класса вспомогательных операторов. Первый класс обобщает операторы взятия нормальной компоненты:

$$(158) \quad \tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1 := (\tilde{\gamma}_{n1} \tilde{z}_{11}; \tilde{\gamma}_{n2} \tilde{z}_{12}; P_2 \tilde{z}_{13}), \quad \tilde{z}_1 = (\tilde{z}_{11}; \tilde{z}_{12}; \tilde{z}_{13}) \in \mathcal{H}_1,$$

$$(159) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_{n1} \tilde{z}_{11} &:= (\hat{\gamma}_{n1} \vec{u}_1; P_2 \vec{\omega}_1) \in \tilde{H}_{\Gamma_{11}}^{-1/2} \oplus \mathbb{C}^2, \\ \tilde{z}_{11} &:= (\vec{u}_1; \vec{\omega}_1) \in (\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)) \oplus \mathbb{C}^3, \end{aligned}$$

$$(160) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_{n2} \tilde{z}_{12} &:= (\hat{\gamma}_{n2} \vec{u}_1; P_2 \vec{\omega}_2) \in (\tilde{H}_{\Gamma_{21}}^{-1/2} \times \tilde{H}_{\Gamma_{22}}^{-1/2}) \oplus \mathbb{C}^2, \\ \tilde{z}_{12} &:= (\vec{u}_2; \vec{\omega}_2) \in (\vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)) \oplus \mathbb{C}^3. \end{aligned}$$

Отметим, что если $\tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1 \in \mathcal{H}_2$, то $\tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1 = \tilde{z}_2$.

Второй связан с операторами вспомогательных задач Q_1 и Q_2 . Положим

$$(161) \quad \tilde{Q} \tilde{z}_2 := (\tilde{Q}_1 \tilde{z}_{21}; \tilde{Q}_2 \tilde{z}_{21}; P_2 \tilde{z}_{23}), \quad \tilde{z}_2 = (\tilde{z}_{21}; \tilde{z}_{22}; \tilde{z}_{23}),$$

(162)

$$\tilde{Q}_1 \tilde{z}_{21} := ((\rho_{11} - \rho_{12})^{-1} Q_1 \zeta_{11}; P_2 \vec{\omega}_1), \quad \tilde{z}_{21} := (\zeta_{11}; P_2 \vec{\omega}_1) \in H_{\Gamma_{11}}^{1/2} \oplus \mathbb{C}^2 \subset \mathcal{H}_{21},$$

$$(163) \quad \begin{aligned} \tilde{Q}_2 \tilde{z}_{22} &:= (Q_2 \{(\rho_{2j} - \rho_{2,j+1})^{-1} \zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2 \vec{\omega}_2), \\ \tilde{z}_{22} &:= (\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2 \vec{\omega}_2) \in (H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2}) \oplus \mathbb{C}^2 \subset \mathcal{H}_{22}. \end{aligned}$$

Операторы \tilde{Q} и $\tilde{\gamma}_n$ в силу леммы 2 являются взаимно сопряжёнными неограниченными операторами на указанных областях определения. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$(164) \quad B_{12} \tilde{z}_2 = \tilde{Q} C^{(2)} \tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1$$

для таких $\tilde{z}_1 \in \mathcal{H}_1$, что $\tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1 = \tilde{z}_2 \in \mathcal{D}(B_{12})$. Отсюда и из первого соотношения (134) следует, что спектральная задача для ненулевых λ сводится к проблеме

$$(165) \quad g \tilde{Q} C^{(2)} \tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1 = \mu C^{(1)} \tilde{z}_1 \quad (\text{в } \mathcal{H}_1), \quad \mu = \lambda^2 \neq 0.$$

Лемма 7. *Задача (165) имеет бесконечнократное собственное значение $\mu = 0$, которому отвечают собственные функции, вида*

$$\tilde{z}_1^0 = ((\vec{w}_1; \vec{0}; P^3 \vec{\omega}_1); (\vec{w}_2; \vec{0}; P^3 \vec{\omega}_2); P^3 \vec{\omega}_3)^\tau \in \mathcal{H}_{1,0},$$

$$\mathcal{H}_{1,0} := (\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}) \oplus (\vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}.$$

Доказательство. Так как согласно предположению (88) оператор $C^{(2)}$ обратим, а оператор $\tilde{Q} : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ имеет нулевое ядро, то при $\mu = 0$ справедливо соотношение $\tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1 = \vec{0}$. Отсюда получаем, что $\tilde{\gamma}_{n1} \vec{u}_1 = \vec{0}$, $P_2 \vec{\omega}_1 = \vec{0}$, $\tilde{\gamma}_{n2} \vec{u}_2 = \vec{0}$, $P_2 \vec{\omega}_2 = \vec{0}$, $P_2 \vec{\omega}_3 = \vec{0}$. Согласно определению операторов $\tilde{\gamma}_{nj}$ ($j = 1, 2$) (см. лемму 2) эти соотношения выполнены для произвольных элементов $\vec{u}_j \in \vec{J}_0(\Omega_j)$, также могут быть произвольными компоненты $P_2 \vec{\omega}_k \in \mathbb{C}$ ($k = 1, 2, 3$). \square

Поскольку задачу (165) корректно рассматривать для ненулевых μ , то в силу очевидного ортогонального разложения

$$(166) \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{1,0} \oplus \mathcal{H}_{1,1}, \quad \mathcal{H}_{1,1} := (\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (\vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}^2,$$

будем считать, что элемент $\tilde{z}_1 \in \mathcal{H}_{1,1}$.

Введём ортопроекторы

$$(167) \quad P_{1,0} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{1,0}, \quad P_{1,1} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{1,1}.$$

Согласно определению операторов \tilde{Q}_j , в силу выполнения свойств (65), т.е. $Q_1 \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_{11}}^{1/2}; \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1))$, $Q_2 \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2}; \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2))$, оператор $\tilde{Q} : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}_{1,1} \subset \mathcal{H}_1$ является неограниченным, при этом

$$(168) \quad \mathcal{D}(Q) = (H_{\Gamma_{11}}^{1/2} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus ((H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2}) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}^2$$

компактно вложено в пространство \mathcal{H}_2 . Отсюда задача (165) для $\mu \neq 0$ сводится к равносильной системе

$$(169) \quad g\tilde{Q}C^{(2)}\tilde{\gamma}_n P_{1,1}\tilde{z}_1 = \mu P_{1,1}C^{(1)}P_{1,1}\tilde{z}_1 \quad (\text{в } \mathcal{H}_{1,1}),$$

$$(170) \quad 0 = \mu P_{1,0}C^{(1)}\tilde{z}_1 \quad (\text{в } \mathcal{H}_{1,0}).$$

Второе уравнение вновь приводит к соотношениям (124), (126), из которых однозначно определяются поля скоростей \vec{w}_{1k} , \vec{w}_{2k} по известным угловым скоростям $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$. Также из него следуют три скалярных уравнения, с помощью которых можно однозначно восстановить третьи компоненты угловых скоростей $P^3 \vec{\omega}_k$ по известным компонентам $P^2 \vec{\omega}_k$ ($k = 1, 2, 3$).

В уравнении (169) осуществим замену

$$(171) \quad \tilde{\gamma}_n P_{1,1}\tilde{z}_1 =: \tilde{z}_2 \in \mathcal{H}_2.$$

Так как $\text{Ker } \tilde{\gamma}_n = \mathcal{H}_{1,0}$ и $\mathcal{H}_2 \subset R(\tilde{\gamma}_n)$, то можно задать ограниченный (и даже компактный) оператор

$$\tilde{\gamma}_n^{-1} : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_{1,1}.$$

Отсюда, действуя на обе части (169) ограниченным оператором

$$\tilde{Q}^{-1} : \mathcal{H}_{1,1} \rightarrow \mathcal{D}(Q) \subset \mathcal{H}_2,$$

приходим к уравнению

$$(172) \quad gC^{(2)}\tilde{z}_2 = \mu\tilde{Q}^{-1}P_{1,1}C^{(1)}P_{1,1}\tilde{\gamma}_n^{-1}\tilde{z}_2 =: \mu K\tilde{z}_2 \quad (\text{в } \mathcal{H}_2).$$

В силу положительности оператора $C^{(1)}$, а также взаимной сопряжённости операторов \tilde{Q} и $\tilde{\gamma}_n$ оператор K является самосопряжённым положительным. Он ограничен как произведение ограниченных операторов, действующих между указанными гильбертовыми пространствами. При этом из компактности вложения $\mathcal{D}(Q)$ в \mathcal{H}_2 следует компактность оператора K .

Так как оператор $C^{(2)}$ является ограниченным и положительно определённым, то задача (172) сводится к нахождению характеристических чисел компактного положительного оператора. Отсюда из теоремы Гильберта-Шмидта получаем следующее итоговое утверждение.

Теорема 3. *Спектр задачи (172) (а также задач (169) и (165)) в случае статической устойчивости по линейному приближению ($C^{(2)} \gg 0$) является дискретным и положительным с асимптотическим поведением (см. формулы (156), (157))*

$$(173) \quad \mu_k = \lambda_k^2 = ck^{1/2}[1 + o(1)] \quad (k \rightarrow +\infty), \quad c = \text{const} > 0.$$

При этом система соответствующих собственных элементов $\{\tilde{z}_{2,k}\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в \mathcal{H}_2 , ортогональный по формам операторов K и $C^{(2)}$:

$$(174) \quad (K\tilde{z}_{2,k}, \tilde{z}_{2,l})_{\mathcal{H}_2} = \delta_{kl}, \quad (gC^{(2)}\tilde{z}_{2,k}, \tilde{z}_{2,l})_{\mathcal{H}_2} = \mu_k \delta_{kl},$$

а собственные значения μ_k являются последовательными минимумами одного из вариационных отношений

$$(175) \quad \frac{g(C^{(2)}\tilde{z}_2, \tilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}}{(K\tilde{z}_2, \tilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}} = \frac{g(C^{(2)}\tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1, \tilde{\gamma}_n \tilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2}}{(C^{(1)}\tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}},$$

где квадратичные формы операторов $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ определяются по формулам (152), (153), а последовательные минимумы второго отношения находятся на элементах $\tilde{z}_1 \in \mathcal{H}_{1,1} \subset \mathcal{H}_1$, при этом элемент \tilde{z}_1 можно однозначно образом доопределить в пространстве \mathcal{H}_1 , используя соотношение (170).

4.3. Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости. До сих пор предполагалось, что исследуемая гидродинамическая система статически устойчива по линейному приближению, то есть оператор потенциальной энергии системы положительно определен. Рассмотрим теперь случай, когда оператор $C^{(2)}$ имеет конечное число $\varkappa \leq 4$ отрицательных собственных значений, то есть система не является статически устойчивой.

Аналогично предыдущим построениям исходная спектральная задача сводится к уравнению (172). При этом $C^{(2)}$ представим в виде

$$(176) \quad C^{(2)} = |C^{(2)}|^{1/2} J_{\varkappa} |C^{(2)}|^{1/2},$$

где оператор $|C^{(2)}|^{1/2} \gg 0$ в \mathcal{H}_2 , а J_{\varkappa} — оператор канонической симметрии, обладающий свойством $J_{\varkappa} = J_{\varkappa}^{-1} = J_{\varkappa}^*$. Отсюда, осуществляя замену по формуле

$$(177) \quad |C^{(2)}|^{1/2} \tilde{z}_2 =: v_2 \in \mathcal{H}_2,$$

приходим к задаче

$$(178) \quad gv_2 = \mu J_{\varkappa} C v_2, \quad C := |C^{(2)}|^{-1/2} K |C^{(2)}|^{-1/2},$$

где оператор C положительный и компактный. Так как оператор $J_{\varkappa} C$ является компактным положительным оператором, действующим в пространстве с индефинитной метрикой

$$[v, w] := (J_{\varkappa} v, w)_{\mathcal{H}_2},$$

то по теореме Понтрягина Л.С. (см. [33], а также [34]) получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Задача (172) в случае не знакоопределённого оператора $C^{(2)}$ имеет дискретный спектр $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, состоящий из конечнократных собственных значений $\mu_j \in \mathbb{R}$ с предельной точкой $\mu = +\infty$. При этом первые κ собственных значений отрицательные, а остальные положительные. Собственные элементы $\{z_{2,j}\}_{j=1}^{\infty}$ задачи (172) образуют базис Рисса в \mathcal{H}_2 , при этом выполнены формулы ортогональности (174), где теперь $\mu_j < 0$ ($j \leq \kappa$), $\mu_j > 0$ ($j \geq \kappa + 1$).*

Асимптотическое поведение собственных значений μ_j ($j \rightarrow \infty$) по-прежнему имеет вид (173).

Следствием установленных фактов является утверждение, которое называют обращением теоремы Лагранжа об устойчивости.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (88) и не выполнены условия (96), т.е. изучаемая гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению. Тогда она является и динамически неустойчивой, т.е. имеются решения однородной начально-краевой задачи (85) экспоненциально возрастающие по t при $t \rightarrow +\infty$.*

Доказательство. В самом деле, при $\mu = \lambda^2 < 0$ задача имеет решения, зависящие от t по закону $\exp((|\mu|)^{1/2}t)$. \square

4.4. Свойства спектральной задачи при учёте трения в шарнирах.

Вновь рассмотрим решения однородной задачи (112) для $A_1 \neq 0$, зависящие от времени по закону

$$(179) \quad z_k(t) = \exp(i\lambda t)z_k, \quad k = 1, 2,$$

где λ — частота собственных колебаний, а z_k — амплитудные элементы. Несложно убедиться, что получаемая задача имеет бесконечнократное нулевое собственное значение, при этом вновь справедлива лемма 6.

Для ненулевых λ , используя модифицированные динамические и кинематические переменные \tilde{z}_1 и \tilde{z}_2 (см. (126)–(128), (130)–(133)), аналогично (134) приходим к задаче

$$(180) \quad \begin{aligned} i\lambda C^{(1)}\tilde{z}_1 + A_1\tilde{z}_1 + gB_{12}(i\lambda)^{-1}\tilde{z}_2 &= 0, & C^{(2)}\tilde{z}_2 + B_{21}\tilde{z}_1 &= 0, \\ i\lambda P^3\vec{\delta}_k - P^3\vec{\omega}_3 &= \vec{0}, & k &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Используя соотношение (164), т.е. связь $B_{12}\tilde{z}_2 = \tilde{Q}C^{(2)}\tilde{\gamma}_n\tilde{z}_1$, получаем задачу в пространстве \mathcal{H}_1

$$(181) \quad -\lambda^2 C^{(1)}\tilde{z}_1 + i\lambda A_1\tilde{z}_1 + g\tilde{Q}C^{(2)}\tilde{\gamma}_n\tilde{z}_1 = 0.$$

Аналогично построениям предыдущих пунктов, получаем, что подпространство $\mathcal{H}_{1,0}$ соответствует случаю $\lambda = 0$. Проектируя уравнение (181) на подпространство $\mathcal{H}_{1,0}$, получаем соотношение

$$(182) \quad -\lambda^2 P_{1,0}C^{(1)}\tilde{z}_1 + i\lambda P_{1,0}A_1\tilde{z}_1 = 0,$$

из которого для данных $\lambda \neq 0$ можно однозначно найти компоненты $P_{1,0}\tilde{z}_1$ по известным компонентам $P_{1,1}\tilde{z}_1$. Отсюда следует, что задачу (181) необходимо рассматривать на подпространстве $\mathcal{H}_{1,1}$.

Осуществляя замену спектрального параметра $\tilde{\lambda} := -i\lambda$, приходим к задаче на собственные значения самосопряжённого операторного пучка в пространстве $\mathcal{H}_{1,1}$:

$$(183) \quad \begin{aligned} L(\tilde{\lambda})\tilde{z}_1 &:= (\tilde{\lambda}^2\tilde{C}_1 - \tilde{\lambda}\tilde{A} + \tilde{C}_2)\tilde{z}_1 = 0, \\ \tilde{C}_1 &:= P_{1,1}C^{(1)}P_{1,1}, \quad \tilde{A} := P_{1,1}A_1P_{1,1}, \quad \tilde{C}_2 := g\tilde{Q}C^{(2)}\tilde{\gamma}_n, \end{aligned}$$

с неограниченным операторным коэффициентом \tilde{C}_2 . Отметим, что в пространстве $\mathcal{H}_{1,1}$ оператор \tilde{C}_2 обратим в силу обратимости операторов \tilde{Q} и $\tilde{\gamma}_n$. Так как эти операторы взаимно сопряжены, то \tilde{C}_2 имеет столько же отрицательных собственных значений, сколько и оператор $C^{(2)}$. В частности, при выполнении условия статической устойчивости ($C^{(2)} \gg 0$) выполнено свойство $\tilde{C}_2 \gg 0$. В общем случае оператор \tilde{C}_2 имеет $\varkappa \leq 4$ отрицательных собственных значений, а значит ограничен снизу, т.е. $\tilde{C}_2 \gg -hI$, $h \geq 0$. Отметим также, что оператор \tilde{C}_1 является ограниченным и положительным, а оператор \tilde{A} неотрицателен и ограничен.

Определение 3. Будем, следуя терминологии А.Г. Костюченко и А.А. Шкаликова, называть пучок

$$L(\lambda) = \lambda^2 F + \lambda G + H - V$$

эллиптическим, если выполнены следующие условия: $H \gg 0$ имеет дискретный спектр; V симметричен и H -компактен; $F \gg 0$ ограничен; G симметричен и $\mathcal{D}(H^{1/2}) \subset \mathcal{D}(G)$, $L(\lambda) > 0$ для достаточно больших $|\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 8. Пучок (183) при $\tilde{A} \geq 0$ имеет ненулевой дискретный спектр, состоящий из изолированных конечнократных собственных значений, расположенных симметрично относительно вещественной оси, с единственной предельной точкой на бесконечности.

Доказательство. В работах А.Г. Костюченко и А.А. Шкаликова (см. [35], [36]) доказана дискретность спектра эллиптического квадратичного пучка.

Пучок (183) является самосопряжённым и эллиптическим. Действительно, $\tilde{C}_2 = H - V$, где $H = \tilde{C}_2 + hI \gg 0$ имеет дискретный спектр (он соответствует собственным значениям задачи (165) при $\tilde{C}_1 = I$). Оператор $V = hI$ очевидно ограничен, а потому H -компактен; $F = \tilde{C}_1 \gg 0$ ограничен; $G = \tilde{A}$ ограничен, а потому $\mathcal{D}(H^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{H}_{1,1}$. Наконец, в силу положительной определённости оператора \tilde{C}_1 для достаточно больших по модулю вещественных λ свойство $L_\alpha(\lambda) > 0$ выполнено. \square

Лемма 9. При выполнении условия $\tilde{C}_2 \geq 0$ спектр пучка (183) лежит в полосе

$$0 \leq \operatorname{Re} \tilde{\lambda} \leq \frac{\|\tilde{A}\|}{c_1}, \quad 0 < c_1 \leq \frac{(\tilde{C}_1 \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)_{\tilde{H}_{1,1}}}{\|\tilde{z}_1\|_{\tilde{H}_{1,1}}^2} \leq c_2.$$

Если оператор \tilde{C}_2 имеет $\varkappa \leq 4$ отрицательных собственных значений (лемма 4), то пучок имеет не более \varkappa собственных значений в левой комплексной полуплоскости.

Доказательство. Осуществим в пучке (183) замену $\tilde{C}_2 \tilde{z}_1 = -\tilde{\lambda} w_2$, тогда с учётом обратимости оператора \tilde{C}_2 спектральную задачу можно записать в виде

$$(184) \quad -\tilde{\lambda} \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда в силу кососамосопряжённости операторной матрицы, стоящей в правой части (184), для собственных значений получаем соотношение

$$-\operatorname{Re} \tilde{\lambda} [(\tilde{C}_1 \tilde{z}_1, \tilde{z}_1) + (\tilde{C}_2^{-1} w_2, w_2)] + (\tilde{A} \tilde{z}, \tilde{z}_1) = 0.$$

Если $\tilde{C}_2 \geq 0$, то отсюда в силу положительной определённости оператора \tilde{C}_1 получаем неравенство

$$0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \frac{(\tilde{A} \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)}{(\tilde{C}_1 \tilde{z}_1, \tilde{z}_1)} \leq \frac{\|\tilde{A}\|}{c_1}.$$

Собственные значения в левой комплексной полуплоскости возможны лишь на элементах, для которых $(\tilde{C}_2^{-1} w_2, w_2) < 0$. Такие элементы согласно лемме 4 образуют не более чем \varkappa -мерное подпространство, следовательно таких собственных значений может быть с учетом кратности не более чем \varkappa штук. \square

Так как справедливы свойства $\tilde{C}_1 \geq c_1 I$, $\tilde{C}_2 \gg -hI$, то существует константа $s \geq 0$ такая, что $s^2 \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \gg s^2 c_1 - h \geq 0$, т.е. оператор, стоящий в левой части, является положительно определённым. В частности, если $\tilde{C}_2 \gg 0$, будем считать, что $s = 0$.

Осуществим в пучке (183) замену спектрального параметра $\nu := \tilde{\lambda} + s$, тогда

$$[(s^2 \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + s\tilde{A}) - \nu(\tilde{A} + 2s\tilde{C}_1) + \nu^2 \tilde{C}_1] \tilde{z}_1 = 0.$$

Введем теперь новую переменную $\eta := \tilde{C}_1^{1/2} \tilde{z}_1 \in \tilde{H}_1$, отсюда действуя на обе части оператором $\tilde{C}_1^{-1/2}$, приходим к задаче

$$(185) \quad M_\alpha(\nu) \eta := [\tilde{B}_0 - \nu \tilde{B}_1 + \nu^2 I] \eta = 0,$$

где

$$(186) \quad \tilde{B}_0 := s^2 I + \tilde{C}_1^{-1/2} (\tilde{C}_2 + s\tilde{A}) \tilde{C}_1^{-1/2}, \quad \tilde{B}_1 = \tilde{C}_1^{-1/2} \tilde{A} \tilde{C}_1^{-1/2} + 2sI.$$

Так как $s^2 \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \gg 0$, то оператор \tilde{B}_0 является неограниченным положительно определённым в $\mathcal{H}_{1,1}$, при этом оператор \tilde{B}_1 ограничен и неотрицателен.

Осуществим в задаче (185) замены переменных и линейризацию по параметру:

$$\tilde{\nu} := i\nu = \lambda + is, \quad \tilde{\nu} \eta =: \psi, \quad \tilde{B}_0^{1/2} \eta =: \varphi.$$

Получаем равносильную задачу на собственные значения

$$(187) \quad \begin{pmatrix} 0 & \tilde{B}_0^{1/2} \\ \tilde{B}_0^{1/2} & i\tilde{B}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \tilde{\nu} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Коротко ее можно переписать в виде

$$(188) \quad (A + B)y = \tilde{\nu} y, \quad y := (\varphi; \psi)^\tau \in \mathcal{H}_{1,1}^2 := \mathcal{H}_{1,1} \oplus \mathcal{H}_{1,1},$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \tilde{B}_0^{1/2} \\ \tilde{B}_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i\tilde{B}_1 \end{pmatrix}.$$

Несложно заметить, что неограниченный самосопряжённый оператор A имеет те же собственные значения $\pm\tilde{\nu}_k$, что невозмущенная задача $\tilde{B}_0\eta = -\nu^2\eta = \tilde{\nu}^2\eta$. При этом оператор B вслед за оператором \tilde{B}_1 является ограниченным.

Лемма 10. *Собственные значения $\tilde{\nu}_k = \lambda_k + is$ задачи (188) находятся в замыкании объединения равных кругов радиуса $r = \|\tilde{B}_1\| \leq \|\tilde{A}\|c_1^{-1} + 2s$ с центрами в точках $\pm\tilde{\nu}_k$, отвечающих собственным значениям невозмущенной задачи (183) при $\tilde{A} = 0$. В частности, если $\tilde{C}_2 \gg 0$ ($s = 0$), то все собственные значения локализованы вдоль вещественной оси и равномерно сходятся к собственным значениям невозмущенной задачи при $\|\tilde{A}\| \rightarrow 0$.*

Доказательство. Действительно, пусть $\nu \in \rho(A)$, тогда

$$(A + B) - \nu I = (I + BR_A(\nu))(A - \nu I).$$

Так как оператор A — самосопряжён и имеет дискретный спектр, то

$$\|R_A(\nu)\| = \sup_{\nu_j \in \sigma(A)} |\nu_j - \nu|^{-1}.$$

Следовательно, оператор $I + BR_A(\nu)$ обратим (обратный строится в виде ряда Неймана), если при всех j выполнена оценка

$$\|B\| \cdot \sup_{\nu_j \in \sigma(A)} |\nu_j - \nu|^{-1} < 1,$$

т.е. любое число $\nu \in \mathbb{C}$, удовлетворяющее неравенствам $|\nu - \nu_j| > r$ ($\nu_j \in \sigma(A)$), лежит в $\rho(A + B)$, если $r := \|B\| = \|\tilde{B}_1\| \leq \|\tilde{C}_1^{-1/2}\tilde{A}\tilde{C}_1^{-1/2}\| + 2s \leq \|\tilde{A}\|c_1^{-1} + 2s$.

Таким образом доказано, что спектр оператора $A + B$ лежит в замыкании объединения равных кругов, радиуса r с центрами в собственных значениях $\pm\tilde{\nu}_k$ оператора A . \square

Возвращаясь к исходному спектральному параметру λ , на основе лемм 8–10 получаем следующее утверждение о свойствах пучка (181).

Теорема 6. *Ненулевой спектр пучка (181) является дискретным, симметричным относительно мнимой оси. Все собственные значения при этом лежат в полосе*

$$-s \leq \operatorname{Im} \lambda \leq \frac{\|\tilde{A}\|}{c_1} + s,$$

где s — такое положительное число, что $s^2\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \gg 0$, с сохранением асимптотического поведения (173)

$$\lambda_k = \pm\sqrt{\mu_k}(1 + o(1)) = \pm\sqrt{ck^{1/4}}(1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty.$$

При этом, если оператор потенциальной энергии $C^{(2)}$ (и вместе с ним \tilde{C}_2) не знакоопределён, то в нижней комплексной полуплоскости располагается не более $\kappa \leq 4$ собственных значений. Если $\tilde{C}_2 \gg 0$, то все собственные значения располагаются в верхней комплексной полуплоскости и равномерно сходятся к вещественным собственным значениям, возникающим в задаче без трения, когда $\|\tilde{A}\| \rightarrow 0$.

Перейдём теперь к проблеме базисности системы корневых элементов спектральной задачи.

Определение 4. Говорят, что оператор B сильно q -подчинен оператору A , если он A^q -подчинен при $q \in [0; 1)$, т.е. если

$$\|BA^{-q}x\| \leq r\|x\|, \quad \forall x \in H.$$

Определение 5. Будем говорить, следуя В.Б. Лидскому (см., например, [37], а также [38]), что система корневых элементов f_k несамосопряжённого оператора A образует в гильбертовом пространстве H базис Абеля-Лидского со скобками порядка α , если весь спектр оператора A , кроме возможно конечного числа собственных значений, лежит в объединении конечного числа открытых лучей с растворами не превосходящими θ , где $\alpha\theta < \pi$. При этом формальный ряд из корневых элементов $f(t) := \sum_k c_k(t)f_k$, где

$$c_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_k} e^{-t\lambda^\alpha} (\lambda I - A)^{-1} f d\lambda$$

(контур γ_k окружает одно изолированное собственное значение оператора A), сходится к данному элементу $f \in H$ после некоторой расстановки скобок (не зависящей от выбора элемента f) при $t \rightarrow +0$. Отметим, что ветвь функции λ^α в каждом из углов, содержащих спектр, выбирается так, чтобы функция $e^{-\lambda^\alpha t}$ при $t > 0$ экспоненциально убывала в этом угле, когда $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Теорема 7. После линеаризации система корневых элементов пучка (183) образует базис Абеля-Лидского со скобками порядка $\alpha > 3$ в пространстве $\mathcal{H}_{1,1} \oplus \mathcal{H}_{1,1}$.

Доказательство. Собственные значения оператора A имеют асимптотику $\tilde{\nu}_k^\pm \sim \pm\sqrt{\mu_k} \sim \pm\sqrt{ck}^{1/4}$, т.е. выполнена оценка $|\tilde{\nu}_k| \leq \tilde{c}k^p$ для $p = 1/4$. При этом оператор B вслед за \tilde{B}_1 ограничен и потому является сильно q -подчиненным оператору A при $q = 0$.

Отсюда утверждение теоремы для $\alpha > p^{-1} - (1 - q) = 3$ следует из теорем А.С. Маркуса и В.Э. Кацнельсона (см. [39], [40], а также [37]) в силу выполнения условия $p(1 - q) = 1/4 < 1$. \square

REFERENCES

- [1] N.E. Zhukovsky, *O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoy kapel'noy zhidkost'yu*, Selected works, **1**, Gostekhizdat, Moscow, Leningrad, 1948, 31–52. (In Russian)
- [2] N.N. Moiseev *Dvizhenie tverdogo tela, imeyushchego polost, chastichno zapolnennuju ideal'noy kapel'noy zhidkost'yu*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **85**:4 (1952), 719–722. Zbl 0049.40607 (In Russian)
- [3] L.N. Sretenskiy *Kolebanie zhidkosti v podvizhnom sosude*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **10** (1951), 1483–1494. (In Russian)
- [4] N.N. Moiseev *Zadacha o dvizhenii tverdogo tela, sodержashie zhidkie massy, imeyushie svobodnuju poverhnist'*, Mat. Sb., N. Ser., **32**:1 (1953), 61–96. Zbl 0051.17103 (In Russian)
- [5] D.E. Ohotsimskiy *K teorii dvizheniya tela s polost'ami, chastichno zapolnennymi zhidkost'yu*, Applied Mathematics and Mechanics **20**:1 (1956), 3–20. (In Russian)
- [6] G.S. Narimanov *On the motion of a rigid body of which a cavity is partly filled with a fluid*, Prikl. Mat. Mekh., **20**:1 (1956), 21–38. Zbl 0075.32602 (In Russian)
- [7] N.N. Moiseev, V.V. Rum'antsev, *Dynamics of bodies with fluid-filled cavities*, Moscow, Nauka, 1965. Zbl 0145.22205 (In Russian)
- [8] N.N. Moiseev, A.A. Petrov *Numerical methods for calculating eigen frequencies and oscillations modes of bounded fluid volume*, Moscow, Vych. centr. AS USSR, 1966. Zbl 0158.22604 (In Russian)

- [9] I.M. Rapoport *Oscillations of the elastic shell partially filled with liquid*, Masinostroenie, Moscow, 1967. Zbl 0176.25303 (In Russian)
- [10] G.N. Mikishev, B.I. Rabinovich *Dynamics of a solid body with cavities partially filled with liquids*, Moscow, Masinostroenie, 1968. (In Russian)
- [11] S.G. Krein, N.N. Moiseev, *On oscillations of a vessel containing a liquid with a free surface*, Prikl. Mat. Meh., **21**: 2 (1957), 169–174. MR0089572 (In Russian)
- [12] N.D. Kopachevsky, S.G. Krein, Ngo Zuy Kan, *Operator methods in linear hydrodynamics: Evolution and spectral problems*, Nauka, Moscow, 1989. Zbl 0681.76001 (In Russian)
- [13] N.D. Kopachevsky, S.G. Krein *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid.*, Operator Theory: Advances and Applications, **128**, Birkhauser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 2001. Zbl 0979.76002 (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 128.)
- [14] N.D. Kopachevsky, S.G. Krein *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids*, Operator Theory: Advances and Applications, **146**, Birkhauser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 2003. Zbl 1048.76001
- [15] P.V. Harlamov *Ob uravnenijah sistemy tverdyh tel*, Mechanics of Solid Body, **4** (1972), 52–73. (In Russian)
- [16] P.V. Harlamov *Sostavnoj prostranstvennyi majatnik*, Mekh. Tverd. Tela, **4** (1972), 73–82. (In Russian)
- [17] Yu. N. Kononov *On the motion of a system of coupled rigid bodies with cavities filled by fluid* Mekh. Tverd. Tela, **30** (2000), 207–216. Zbl 1013.70008 (In Russian)
- [18] Yu. N. Kononov *Ob ustoychivosti dvizheniya sistemy svazannyh tverdyh tel s polostjami, sodержashimi zhidkost'* Mekh. Tverd. Tela, **36** (2006), 75–82. (In Russian)
- [19] E.I. Batyr *Malye dvizheniya sistemy posledovatelno sochlenennyh tel s polostyami, sodержashimi ideal'nyyu neszhimaemuyu zhidkost'*, Uchenye Zapiski Tavricheskogo Nacional'nogo Universiteta imeni V.I. Vernadskogo, **15(54)**: 2 (2002), 5–10. (In Russian)
- [20] E.I. Batyr, N.D. Kopachevsky *Small motions and normal oscillations in systems of connected gyrostats*, J. Math. Sci., **211**:4 (2015), 441–530. Zbl 1334.70014
- [21] N.D. Kopachevsky *On oscillations of a body with a cavity partially filled by heavy ideal liquid: theorems of existence, uniqueness and stability of strong solutions*, Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., **2**:1 (2005), 158–194. Zbl 1189.70127 (In Russian)
- [22] N.D. Kopachevsky, V.I. Voytitsky, Z.Z. Sitshaeva *O kolebaniyah dvuh sochlenennyh majatnikov sodержashih polost'i chastichno zapolnennye neszhimayemoy zhidkost'yu*, Contemporary Mathematics Fundamental Directions, **63**:4 (2017), 627–677. (In Russian)
- [23] V.I. Voytitsky, N.D. Kopachevsky *O malyh kolebaniyah sistemy iz treh sochlenennyh majatnikov s polost'ami zapolnennymi nesmeshivajushimisya neszhimayemyimi zhidkost'ami*, Proceedings of the International Conference "Modern methods and problems of mathematical hydrodynamics" (Voronezh, 3–8 May 2018), 84–91. (In Russian)
- [24] V.I. Voytitsky, N.D. Kopachevsky *O malyh dvizheniyah fizicheskogo mayatnika sodержashego polost' zapolnennuyu sistemoy odnorodnyh nesmeshivajushihisya zhidkost'ej*, Proceedings of the International Conference "Crimea Autumn Mathematical School–2018, sections 1–3" (Laspi, 17–29 September 2018), 58–62. (In Russian)
- [25] V.I. Voytitsky *To the small motion problem of three joined pendulums with cavities filled with homogeneous incompressible fluids*, Dyn. Syst., **8(36)**:4 (2018), 337–356. Zbl 07104520 (In Russian)
- [26] V.I. Voytitsky, N.D. Kopachevsky *Problema normal'nyh dvizheniy mayatnika s treniem v sharnire i polost'yu zapolnennoy ideal'noy zhidkost'yu*, Proceedings of the International Conference "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" (Moscow, 13–15 May 2019), 252–255. (In Russian)
- [27] N.D. Kopachevsky, V.I. Voytitsky, Z.Z. Sitshayeva *On two hydromechanical problems inspired by works of S. Krein*, in Differential Equations, Mathematical Physics, and Applications: Selim Grigorievich Krein Centennial, AMS, Contemp. Math., **734** (2019), 219–238. Zbl 1425.35155
- [28] N.D. Kopachevsky, V.I. Voytitsky, Z.Z. Sitshaeva *O kolebaniyah sochlenennyh majatnikov s polost'ami zapolnennymi odnorodnymi zhidkost'ami*, Contemporary Mathematics Fundamental Directions, **65**:3 (2019), 434–512. (In Russian)
- [29] V.I. Voytitsky, N.D. Kopachevsky *Problema malyh dvizheniy sochlenennyh mayatnikov s polost'ami sodержashimi odnorodnyyu neszhimaemuyu ideal'nyyu zhidkost'*, Proceedings of

- the International Conference "Crimea Autumn Mathematical School-2019, sections 1-3" (Laspi, 17-29 September 2019), 57–59. (In Russian)
- [30] N.D. Kopachevsky *Abstract Green's formula*, Forma, Simferopol, 2016. (In Russian)
- [31] N.D. Kopachevsky, K.A. Radomirskaya *Abstract mixed boundary-value and spectral conjugation problems and their applications*, J. Math. Sci., **239**:5 (2019), 608–643. Zbl 07083653
- [32] M.Sh. Birman, M.Z. Solom'ak *Spectral asymptotics of differential equations*, Itogi Nauki Tekh., Ser. Mat. Anal., **14**, (1977), 5–52. Zbl 0417.35061 (In Russian)
- [33] L.S. Pontryagin *Hermitian operators in spaces with indefinite metric*, Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **8**:6 (1944), 243–280. Zbl 0061.26004 (In Russian)
- [34] T. Ya. Azizov, I.S. Iohvidov, *Foundations of the theory of linear operators in spaces with indefinite metric*, Nauka, Moscow, 1986. Zbl 0607.47031 (In Russian)
- [35] A.G. Kost'uchenko, A.A. Shkalikov *Self-adjoint quadratic operator pencils and elliptic problems*, Funct. Anal. Appl., **17**:2 (1983), 109–128. Zbl 0531.47017
- [36] A.G. Kost'uchenko, A.A. Shkalikov *Zadachi difraktsii dlya periodicheskoy poverhnosti dlya uravneniya Gelmgoltsa*, Selected Issues of Mathematics, Mechanics and Applications, MSU (1999), 240–258. (In Russian)
- [37] M.S. Agranovich *Summability of series in root vectors of non-self-adjoint elliptic operators*, Funct. Anal. Appl., **10**:3 (1976), 1–12. Zbl 0355.35068
- [38] V.B. Lidskii *Summability of series in the principal vectors of non-selfadjoint operators*, Am. Math. Soc., Transl., II. Ser., **40** (1962), 193–228. Zbl 0158.14607
- [39] A.S. Markus *Expansion in root vectors of a slightly perturbed self-adjoint operator*, Sov. Math., Dokl., **3** (1962), 104–108. Zbl 0122.11602
- [40] V.E. Katsnelson *Conditions under which systems of eigenvectors of some classes of operators form a basis*, Funkts. Anal. Prilozh., **1**:2 (1967), 39–51. Zbl 0172.17404

VICTOR IVANOVICH VOYTITSKY

TAURIDA ACADEMY OF CRIMEA FEDERAL V.I. VERNADSKY UNIVERSITY,
4, PR. VERNADSKOGO AVE.,
SIMFEROPOL, 295013, RUSSIA
E-mail address: victor.voytitsky@gmail.com

NIKOLAY DMITRIEVICH KOPACHEVSKY

TAURIDA ACADEMY OF CRIMEA FEDERAL V.I. VERNADSKY UNIVERSITY,
4, PR. VERNADSKOGO AVE.,
SIMFEROPOL, 295013, RUSSIA
E-mail address: kopachevsky@list.ru