S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 514.76

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 53C25

ПОЧТИ КВАЗИ-ПАРА-САСАКИЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ, ОСНАЩЕННЫЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ЧЕТВЕРТЬ-СИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

С.В. ГАЛАЕВ

Abstract. The notion of an almost quasi-para-Sasakian manifold is introduced. An example of an almost quasi-para-Sasakian structure is given, which is naturally defined on the distribution of zero curvature of a sub-Riemannian manifold of contact type. On an almost quasi-para-Sasakian manifold, a connection with torsion of special form is defined, which is called the canonical quarter-symmetric connection in this work. Conditions are found under which an almost quasi-para-Sasakian manifold is an η-Einstein manifold with respect to a canonical quarter-symmetric connection.

Keywords: almost quasi-para-Sasakian manifold, intrinsic connection, canonical quarter-symmetric connection, η-Einstein manifold.

1. Введение

Почти параконтактные метрические структуры являются естественным нечетномерным аналогом для почти пара-эрмитовых структур в той же степени, в которой почти контактные метрические структуры соответствуют почти эрмитовым структурам. Изучение почти параконтактной геометрии начинается с работы Канеуки и Вильямса [15]. Систематическое исследование почти параконтактных метрических многообразий осуществил Замковой [18]. Почти параконтактные метрические многообразия изучались в последние годы многими авторами [10, 18, 19]. Как правило, в указанных работах много внимания уделялось сходствам и различиям параконтактных структур с наиболее изученными к настоящему времени контактными структурами. Понятие квази-сасакиевых

Galaev, S.V., Almost quasi-para-Sasakian manifolds equipped with a canonical quarter-symmetric connection.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

многообразий, введенное Д. Э. Блэром в [7, 8], включает понятия сасакиевых и косимплектических многообразий.

По определению, квази-сасакиевым многообразием является нормальное почти контактное метрическое многообразие, фундаментальная 2-форма которого $\Omega(X,Y) = g(X,\varphi Y)$ замкнута. Квази-сасакиевы многообразия можно рассматривать как нечетномерный аналог кэлеровых многообразий. Квази-сасакиевы структуры изучались в работах [13, 14, 16, 17].

Почти квази-пара-сасакиевы структуры введены автором настоящей статьи. Такие структуры относятся к классу почти нормальных структур [3-5]. Мотивацией для введения понятия почти нормальной структуры послужил тот факт, что именно такие структуры естественным образом возникают на распределениях нулевой кривизны субримановых многообразий контактного типа [1-3]. Класс почти квази-пара-сасакиевых структур расширяет класс квази-пара-сасакиевых структур, изучение которых, по-видимому, начинается с работы [10]. Во многом источником идей здесь являются уже ставшие классическими работы по квази-сасакиевым многообразиям.

Почти параконтактное метрическое многообразие (AQPS-многообразие) названо автором настоящей работы почти нормальным, если оказывается справедливым равенство $\tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2(\varphi^* d\eta) \otimes \vec{\xi} = 0$. Под почти квази-пара-сасакиевым многообразием понимается почти нормальное почти параконтактное многообразие нечетного ранга с замкнутой фундаментальной формой. Для почти (пара)контактных метрических многообразий нечетного ранга справедливо равенство $d\eta(\vec{\xi}, \cdot\,) = 0$. В частности, нормальные почти (пара)контактные метрические многообразия являются многообразиями нечетного ранга. AQPS-многообразие является обобщением квази-пара-сасакиева многообразия и сводится к последнему, если $d\eta = -\varphi^* d\eta$.

Изучению почти контактных метрических многообразий, оснащенных четверть-симметрической и, в частности, полусимметрической связностью посвящено большое количество работ [13, 20, 21]. Э. Картан [9] первым рассмотрел линейную метрическую связность с кручением вместо связности Леви-Чивита. Наибольшим интересом среди метрических связностей с кручением пользуется полусимметрическая связность, систематическое исследование которой проведено К. Яно в работе [21]. Четверть-симметрическая связность определена в 1975 г. С. Голабом [13]. Большое количество работ посвящено как метрическим, так и не метрическим связностям с кручением, заданным на многообразиях с почти контактной метрической структурой.

В настоящей работе на почти параконтактном метрическом многообразии рассматривается четверть-симметрическая связность D_X, ассоциируемая с тройкой (∇, C, S), где ∇ - внутренняя метрическая связность, а C, S - эндоморфизмы распределения D. Причем, эндоморфизм C задается равенствами $C(X,Y) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(X,Y)$, $g(CX,Y) = C(X,Y)$, а S - произвольный эндоморфизм. Одной из задач настоящей статьи является определение такого эндоморфизма S, для которого D_X - метрическая связность. Если при этом $(L_{\vec{\xi}}g)(X,Y) = 0$, то метрическая четверть-симметрическая связность D_X получает название канонической связности.

Настоящая работа состоит из двух основных частей. В первой части приводятся основные понятия геометрии AQPS-многообразий. Во второй части вводится понятие канонической четверть-симметрической связности. Находятся условия, при которых AQPS-многообразия являются многообразиями η-Эйнштейна относительно канонической связности.

2. Геометрические свойства почти квази-пара-сасакиевых многообразий

Рассмотрим почти параконтактное метрическое многообразие M нечетной размерности $n = 2m+1$. Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ - заданная на многообразии M почти параконтактная метрическая структура, где φ - тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η - вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g – псевдориманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

1) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$,
2) $\eta(\vec{\xi}) = 1$,
3) $g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y)$,

где $X, Y \in \Gamma(TM)$. Здесь $\Gamma(TM)$ - модуль векторных полей, заданных на многообразии M.

Гладкое распределение $D = ker(\eta)$ называется распределением почти параконтактной структуры.

Для параконтактных метрических многообразий выполняются также следующие условия:

4) $\varphi\vec{\xi} = 0$,
5) $\eta \circ \varphi = 0$,
6) $\eta(X) = g(X, \vec{\xi})$, $X \in \Gamma(TM)$.

Кососимметрический тензор $\Omega(X,Y) = g(X, \varphi Y)$ называется фундаментальной формой структуры. Почти параконтактная метрическая структура называется параконтактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^{\perp} = Span(\vec{\xi})$, ортогональное распределению D, называется оснащением распределения D. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$. Иногда, если отпадает необходимость использования эндоморфизма φ, мы говорим не о почти параконтактной метрической структуре, а о субримановой структуре контактного типа.

Карту $k(x^i)$ $(i,j,k = 1,...,n; a,b,c = 1,...,n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$. Пусть $P : TM \to D$ - проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $k(x^i)$ - адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение $D : D = Span(\vec{e}_a)$.

Для адаптированных карт $k(x^i)$ и $k'(x^{i'})$ выполняются следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'}),\ x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Тензорное поле t типа (p,q), заданное на почти (пара)контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D) или трансверсальным, если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид: $t = t^{a_1...a_p}_{b_1...b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes ... \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes ... \otimes dx^{b_q}$.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону: $t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Имеет место равенство $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\vec{\xi}$. Отсюда, в частности, вытекает важное для дальнейшего утверждение: условие $d\eta(\vec{\xi}, X) = 0$ эквивалентно справедливости равенства $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Пусть ∇ - внутренняя линейная связность [3] на многообразии с почти (пара)контактной метрической структурой.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_b.$$

Отсюда, в частности, следует, что производные $\partial_n \Gamma^d_{ac}$ являются компонентами допустимого тензорного поля.

Ранг субримановой структуры полагается равным $2p$, если $(d\eta)^p \neq 0$, $\eta \wedge (d\eta)^p = 0$, и равным $2p+1$, если $\eta \wedge (d\eta)^p \neq 0$, $(d\eta)^{p+1} = 0$. Легко проверяется, что ранг субримановой структуры равен $2p+1$ тогда и только тогда, когда $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ связность Леви-Чивита и $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ – ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений, основанных на применении равенства

$$2\tilde{\Gamma}^m_{ij} = g^{km}(\vec{e}_i g_{jk} + \vec{e}_j g_{ik} - \vec{e}_k g_{ij} + \Omega^l_{kj} g_{li} + \Omega^l_{ki} g_{lj}) + \Omega^m_{ij},$$

$\Omega^n_{ab} = 2\omega_{ba}$, $\Omega^n_{an} = \partial_n \Gamma^n_a$, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. *Коэффициенты $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ связности Леви-Чивита субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид:*
$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}$, $\tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}$, $\tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a + \psi^b_a$, $\tilde{\Gamma}^n_{na} = -\partial_n \Gamma^n_a$, $\tilde{\Gamma}^a_{nn} = g^{ab}\partial_n \Gamma^n_b$, *где* $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\psi^b_a = g^{bc}\omega_{ac}$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^b_a = g^{bc} C_{ac}$.

Здесь эндоморфизм $\psi : TM \longrightarrow TM$ определяется из равенства $\omega(X,Y) = g(\psi X, Y)$. Выполняются также следующие соотношения: $C(X,Y) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}} g)(X,Y)$, $g(CX,Y) = C(X,Y)$. Из условия $d\eta(\vec{\xi}, X) = 0$ следует, что $\tilde{\Gamma}^n_{na} = -\partial_n \Gamma^n_a = 0$ и $\tilde{\Gamma}^n_{nn} = g^{ab}\partial_n \Gamma^n_b = 0$.

Почти параконтактное метрическое многообразие M называется нормальным многообразием, если выполняется условие $N^{(1)}_\varphi = N_\varphi - 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$ - тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Пара-сасакиевым многообразием называется нормальное параконтактное метрическое многообразие.

Назовем почти параконтактное метрическое многообразие почти квази-пара-сасакиевым многообразием (AQPS -многообразием), если выполняются следующие условия: $d\Omega = 0$, $\tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2(\varphi^* d\eta) \otimes \vec{\xi} = 0$, $d\eta(\vec{\xi}, \cdot\,) = 0$. Многообразие, для которого выполняется условие $\tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2(\varphi^* d\eta) \otimes \vec{\xi} = 0$ названо нами почти нормальным многообразием. Таким образом, почти нормальное многообразие является нормальным многообразием тогда и только тогда, когда $d\eta = -\varphi^* d\eta$.

Пусть $P : TM \to D$ - проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 2. *Для любого почти параконтактного метрического многообразия выполняется следующее равенство:* $PN^{(1)}_\varphi = \tilde{N}_\varphi$.

Заметим, что выполняется следующее соотношение:

$$N_\varphi^{(1)}(X,Y) = \tilde{N}_\varphi(X,Y) - 2(d\eta(X,Y) + d\eta(\varphi X, \varphi Y))\vec{\xi}.$$

Приведем два примера почти параконтактных метрических многообразий.

Пример 1. Пусть $M = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 : y \neq 0\}$ - гладкое многообразие размерности 5, оснащенное почти параконтактной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Здесь: 1) $D =< \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 >$, где $\vec{e}_1 = \partial_1 - y\partial_5$, $e_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5)$ - естественный базис пространства $\mathbb{R}^5$, 2) $\vec{\xi} = \partial_5$, 3) $\eta = dv + ydx$, 4) $\varphi\vec{e}_1 = \vec{e}_3$, $\varphi\vec{e}_2 = \vec{e}_4$, $\varphi\vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\varphi\vec{e}_4 = \vec{e}_2$, $\varphi\vec{\xi} = 0$, 5) $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = g_{55} = 1$. Если $i \neq j$, то $g_{ij} = 0$. Непосредственно проверяется, что почти параконтактное многообразие M не является нормальным, но является почти нормальным многообразием. Действительно, $N_\varphi^{(1)}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \varphi^2[\vec{e}_1, \vec{e}_2] + [\vec{e}_3, \vec{e}_4] - \varphi[\vec{e}_3, \vec{e}_2] - \varphi[\vec{e}_1, \vec{e}_4] - 2d\eta(\vec{e}_1, \vec{e}_2)\vec{\xi} = \eta([\vec{e}_1, \vec{e}_2]) = \eta(\vec{\xi})\vec{\xi} = \vec{\xi}$. Таким образом, рассматриваемая структура не является нормальной структурой. С другой стороны - $\tilde{N}_\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2d\eta(\vec{e}_3, \vec{e}_4)\vec{\xi} = 0$. Тем самым, мы имеем дело с почти нормальной структурой. Далее, пусть теперь структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ отличается от рассматриваемой ранее структуры другим заданием эндоморфизма $\varphi : \varphi\vec{e}_1 = \vec{e}_1$, $\varphi\vec{e}_2 = -\vec{e}_2$, $\varphi\vec{e}_3 = \vec{e}_3$, $\varphi\vec{e}_4 = -\vec{e}_4$, $\varphi\vec{\xi} = 0$ и другим заданием метрического тензора: $g_{14} = g_{41} = -g_{23} = -g_{32} = g_{55} = 1$. Для этой структуры $d\eta = -\varphi^* d\eta$. Действительно, $d\eta(\varphi\vec{e}_1, \varphi\vec{e}_2) = -d\eta(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Пример 2. Пусть D – распределение субриманова многообразия контактного типа [3]. Адаптированной карте $k(x^i)$ многообразия M поставим в соответствие адаптированную карту $\tilde{k}(x^I)$, $x^I = (x^i, x^{n+a}.)$ Если $\vec{p} \in D_x$, то $\tilde{k} : \vec{p} \to (x^i, x^{n+a})$, где $\vec{p} = x^{n+a}\vec{e}_a$.

Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_I)$ определяют на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$ – соответствующее поле кобазисов. Пусть ∇ - внутренняя связность с тензором кривизны Схоутена $R(X,Y)Z$.

Определим на многообразии D почти параконтактную структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ полагая $JX^h = X^v$, $JX^v = X^h$. Здесь $\pi : D \to M$ – естественная проекция. Определим, далее, на многообразии M метрику $\tilde{g}$, посредством равенства:

$\tilde{g}(X^h, Y^h) = -\tilde{g}(X^v, Y^v) = g(X,Y)$, $\tilde{g}(X^h, Y^v) = \tilde{g}(X^h, \vec{u}) = \tilde{g}(X^v, \vec{u}) = 0$.

Легко проверяется, что структура $(\tilde{D}, J, \vec{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ является почти параконтактной метрической структурой. Более того, если M - субриманово многообразие с нулевым тензором Схоутена, то продолженная почти параконтактная метрическая структура $(\tilde{D}, J, \vec{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ является почти квази-пара-сасакиевой структурой.

Как известно, для нормальных почти параконтактных многообразий справедливы следующие равенства [18]:

$$N_\varphi^{(1)}(X,Y) = N_\varphi(X,Y) - 2d\eta(X,Y)\vec{\xi} = 0, \tag{1}$$

$$N_\varphi^{(2)}(X,Y) = (L_{\varphi X}\eta)Y - (L_{\varphi Y}\eta)X = 0, \tag{2}$$

$$N_\varphi^{(3)}(X) = (L_{\vec{\xi}}\varphi)X = 0, \tag{3}$$

$$N_\varphi^{(4)}(X) = (L_{\vec{\xi}}\eta)X = 0. \tag{4}$$

При этом, равенство (1) влечет равенства (2) – (4). Следующие два предложения уточняют приведенное выше утверждение в случае почти нормальной структуры.

Предложение 3. *Пусть M - почти нормальное почти параконтактное многообразие, тогда равенство*

$$\tilde{N}_\varphi(X,Y) = N_\varphi(X,Y) + d\eta(\varphi X, \varphi Y)\vec{\xi} = 0 \tag{5}$$

влечет выполнение равенств (3), (4).

Доказательство. Подставляя в равенство (5) $Y = \vec{\xi}$, получаем:

$$0 = N_\varphi(X,\vec{\xi}) = \varphi^2[X,\vec{\xi}] - \varphi[\varphi X,\vec{\xi}] = \varphi((L_{\vec{\xi}}\varphi)X)$$

или, $N^{(3)}_\varphi(X) = (L_{\vec{\xi}}\varphi)X = 0$. Обратимся к равенству (4). Имеем:

$$(L_{\vec{\xi}}\eta)X = d\eta(\vec{\xi},X) + X\eta(\vec{\xi}) = d\eta(\vec{\xi},X) = 0.$$

□

Предложение 4. *Пусть M - почти нормальное почти параконтактное многообразие, тогда равенство $N^{(2)}_\varphi(X,Y) = (L_{\varphi X}\eta)Y - (L_{\varphi Y}\eta)X = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $d\eta = -\varphi^* d\eta$.*

Справедливость предложения 4 подтверждается равенством

$$(L_{\varphi X}\eta)Y = d\eta(\varphi X, Y).$$

3. Почти квази-пара-сасакиевы многообразия с канонической четверть-симметрической связностью

Внутренняя связность обеспечивает параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. В то же время, для решения ряда проблем возникает необходимость расширения внутренней связности до связности с кручением [6, 11] на всем многообразии. Иногда достаточно промежуточной конструкции – связности в векторном расслоении (M,π,D). Существуют разные способы продолжения внутренней связности. В ряде статей [1-5, 12] обсуждается так называемая N-связность ∇^N. На почти субримановом многообразии M N-связность ∇^N определяемую парой (∇, N), где ∇ - внутренняя метрическая связность, $N : TM \to TM$ - эндоморфизм касательного расслоения многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = 0$, $N(D) \subset D$.

Определим четверть-симметрическую связность D_X на почти параконтактном метрическом многообразии с помощью следующего равенства:

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X + C(X,Y)\vec{\xi} - \eta(X)\psi Y - \eta(Y)(C + \psi - S)X.$$

Имеет место

Предложение 5. *Ненулевые коэффициенты G^i_{jk} связности D_X почти параконтактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид:*

$$G^c_{ab} = \tilde{\Gamma}^c_{ab}, G^n_{ab} = \omega_{ba}, G^b_{an} = S^b_a, G^b_{na} = C^b_a.$$

Участвующий в определении четверть-симметрической связности D_X эндоморфизм S определен произвольным образом. Сформулированная ниже теорема утверждает, что эндоморфизм S будет определен однозначно, если потребовать, чтобы связности D_X стала метрической.

Теорема 1. *Заданная на почти параконтактном метрическом многообразии четверть-симметрическая связность D_X будет метрической тогда и только тогда, когда $S = \psi$.*

Доказательство. Используя предложение 5, непосредственно убеждаемся в том, что $D_a g_{bc} = 0$ и $D_n g_{bc} = 0$. Найдем условия, при которых $D_a g_{nb} = 0$. Имеем:

$$D_a g_{nb} = -G^c_{an} g_{bc} - G^n_{ab} = -S^c_a g_{bc} - \omega_{ba} = 0.$$

Отсюда и из равенства $\psi^b_a = g^{bc}\omega_{ac}$ следует справедливость теоремы. □

Из доказанной теоремы следует, что связность, определяемая посредством следующего равенства:

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + C(X,Y)\vec{\xi} - \eta(X)\psi Y - \eta(Y)CX,$$

является метрической четверть-симметрической связностью. К введению четверть-симметрической связность D_X можно подойти следующим образом.

Теорема 2. *Пусть на субримановом многообразии M определена пара (∇, N), где ∇ - внутренняя метрическая связность, $N : TM \to TM$ - эндоморфизм касательного расслоения многообразия M такой, $N\vec{\xi} = 0$, $N(D) \subset D$. Тогда на многообразии M существует, причем, единственная связность D_X такая, что:*

1. $D_X\vec{\xi} = NX$,
2. $(D_X\eta)(Y) = \omega(X,Y)$,
3. $S(X,Y) = \eta(Y)NX - \eta(X)NY$,
4. $P(D_X Y) = \nabla_X Y$.

Здесь $S(X,Y)$ - тензор кручения связности D_X. В последнем равенстве $X, Y \in \Gamma(D)$, во всех остальных случаях: $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Доказательство. Предположим, что связность D_X существует, найдем ее компоненты G^k_{ij} в адаптированных координатах. После некоторых вычислений получаем следующие ненулевые компоненты:

$$G^a_{bc} = \Gamma^a_{bc}, G^n_{bc} = \omega_{cb}, G^a_{bn} = N^a_b.$$

Обратно, можно убедиться в том, что связность с обозначенными выше компонентами удовлетворяет требованиям, предъявляемым к связности D_X. □

Легко убедиться в том, что четверть-симметрическая N-связность выражается через связность Леви-Чивита следующим образом:

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + C(X,Y)\vec{\xi} - \eta(Y)(C + \psi - N)X - \eta(X)(C + \psi)Y.$$

Метрическую четверть-симметрическую N-связность, удовлетворяющую требованиям теоремы 2, будем называть канонической связностью, и предполагать, что до конца статьи выполняется условие $(L_{\vec{\xi}} g)(X,Y) = 0$. Если D_X - каноническая связность, то

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y - \eta(X)\psi Y.$$

Сравним ненулевые компоненты тензоров $\tilde{R}(X,Y)Z$, $K(X,Y)Z$ кривизны связностей $\tilde{\nabla}_X$ и D_X соответственно в адаптированных координатах. Имеем:

$$\tilde{R}^d_{abc} = R^d_{abc} + \omega_{cb}\psi^d_a - \omega_{ca}\psi^d_b + 2\omega_{ab}\psi^d_c,$$

$$K^d_{abc} = R^d_{abc} + \omega_{cb}\psi^d_a - \omega_{ca}\psi^d_b,$$

$$\tilde{R}^n_{nbc} = -\omega_{bd}\psi^d_c,$$

$$\tilde{R}^n_{abc} = K^n_{abc} = \nabla_a\omega_{cb} - \nabla_b\omega_{ca},$$

$$\tilde{R}^a_{ncb} = -\nabla_c\psi^a_b,$$

$$\tilde{R}^a_{cbn} = K^a_{cbn} = \nabla_c\psi^a_b - \nabla_b\psi^a_c.$$

Пусть $\tilde{r}(X,Y)$, $k(X,Y)$ - соответствующие тензорам $\tilde{R}(X,Y)Z$, $K(X,Y)Z$ тензоры Риччи. Назовем почти квази-пара-сасакиево многообразие η-Эйнштейновым многообразием, если выполняется равенство

$$\tilde{r} = \lambda g + \mu\eta\otimes\eta,\ a,b \in \mathbb{R}.$$

Если же выполняется равенство

$$k = \lambda g + \mu\eta\otimes\eta,\ a,b \in \mathbb{R},$$

то почти квази-пара-сасакиево многообразие будем называть η-Эйнштейновым многообразием относительно канонической четверть-симметрической связности.

Пусть $r(Y,Z) = tr(X \to R(X,Y)Z)$, $X,Y,Z \in \Gamma(D)$ - тензор Схоутена-Риччи. Тогда:

$\tilde{r}_{bc} = r_{bc} + 4\omega_{ab}\psi^a_c$, $\tilde{r}_{bn} = \nabla_a\psi^a_b$,
$\tilde{r}_{nn} = -tr(\psi^2)$, $k_{bc} = r_{bc} - \omega_{ca}\psi^a_b$,
$k_{bn} = \nabla_a\psi^a_b$, $k_{nb} = 0$, $k_{nn} = 0$.

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Почти квази-пара-сасакиево многообразие является η-Эйнштейновым многообразием относительно канонической четверть-симметрической связности тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:*

$$\mu = -\lambda, \nabla_a\psi^a_b = 0, r_{ac} - \omega_{ca}\psi^a_b = \lambda g_{ab}.$$

Пример η-эйнштейнова почти квази-пара-сасакиева многообразия. Пусть $M = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 : y \neq 0\}$ - гладкое многообразие размерности 5, оснащенное почти параконтактной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Здесь: 1) $D = <\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4>$, где $\vec{e}_1 = \partial_1$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3 - x\partial_5$, $\vec{e}_4 = \partial_4 - y\partial_5$, $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5)$ - естественный базис пространства $\mathbb{R}^5$, 2) $\vec{\xi} = \partial_5 = \frac{\partial}{\partial v}$, 3) $\eta = dv + xdz + ydu$, 4) $\varphi\vec{e}_1 = \vec{e}_3$, $\varphi\vec{e}_2 = \vec{e}_4$, $\varphi\vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\varphi\vec{e}_4 = \vec{e}_2$, $\varphi\vec{\xi} = 0$, 5) $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = \frac{1}{2}$, $g_{55} = 1$. Если $i \neq j$, то $g_{ij} = 0$. Непосредственно проверяется, что $N^{(1)}_\varphi = N_\varphi - 2d\eta\otimes\vec{\xi} = 0$, $\nabla_a\psi^a_b = 0$, $\psi = -\varphi$ и $r_{ac} = 0$. В этом случае $k_{bc} = r_{bc} - \omega_{ca}\psi^a_b = \omega_{ca}\varphi^a_b = g_{bc}$.

Таким образом, многообразие M является частным случаем почти квази-пара-сасакиева многообразия – пара-сасакиевым многообразием. В рассматриваемом случае $\mu = -\lambda = -1$.

References

[1] A.V. Bukusheva, *Nonlinear connections and intrisic semispdray on distribution with generalized Lagrangian metric*, Differential geometry of manifolds of figures, **46** (2015), 58–62.

[2] A.V. Bukusheva, *Kenmotsu manifolds with a zero curvature distribution*, Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics, **64** (2020), 5–14. DOI 10.17223/19988621/64/1

[3] S.V. Galaev, *Almost contact metric spaces with N-connection*, Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, **15**:3 (2015), 258–263. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264

[4] S.V. Galaev, *Geometric interpretation of the Wagner curvature tensor in the case of a manifold with contact metric structure*, Siberian mathematical journal, **57**:3 (2016), 498–504. DOI 10.1134/S0037446616030101

[5] S.V. Galaev, *Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-hermitian structure*, Bulletin of Bashkir University, **21**:3 (2016), 551–555.

[6] I. Agricola, A.C. Ferreira, *Einstein manifolds with skew torsion*, Q. J. Math., **65**:3 (2014), 717–741.

[7] D.E. Blair, *The theory of quasi-Sasakian structures*, J. Differential Geom., **1** (1967), 331–345.

[8] D.E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progress in Mathematics, Birkhauser. Boston **203** (2002).

[9] E. Cartan, *Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relative generalisee.* Part I, Ann. Ec. Norm., **41** (1924), 1–25.

[10] I. Kupeli Erken, *Curvature Properties of Quasi-Para-Sasakian Manifolds*,International electronic journal of geometry, **12**:2 (2019), 210–217.

[11] T. Friedrich, S. Ivanov, *Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory*, Asian J. Math, **6** (2002), 303–336.

[12] S.V. Galaev, *Intrinsic geometry of almost contact kahlerian manifolds*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, **31**:1 (2015), 35–46.

[13] S. Golab, *On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections*, Tensor N.S. , **29** (1975), 249–254.

[14] S. Kanemaki, *Quasi-Sasakian manifolds*, Tohoku Math. J. , **29** (1977), 227–233.

[15] S. Kaneyuki, F.L. Williams, *Almost paracontact and parahodge structures on manifolds*, Nagoya Math. J., **99** (1985), 173–187.

[16] Z. Olszak, *Curvature properties of quasi-Sasakian manifolds*, Tensor, **38** (1982), 19–28.

[17] S. Tanno, *Quasi-Sasakian structures of rank* $2p+1$, J. Differential Geom., **5** (1971), 317–324.

[18] S. Zamkovoy, *Canonical connections on paracontact manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom., **36** (2009), 37–60.

[19] J. Welyczko, *On Legendre Curves in 3-Dimensional Normal Almost Paracontact Metric Manifolds*, Result. Math., **54** (2009), 377–387.

[20] K.. Yano , *On semi-symmetric metric connection*, Rev. Roum. Math. Pure Appl. , **15** (1970), 1579–1586.

[21] K. Yano, T. Imai, *Quarter-symmetric metric connections and their curvature tensors*, Tensor, N.S. , **38** (1982), 13–18.

Sergei Vasil'evich Galaev
Saratov State University,
Astrakhanskaya St., 83,
410012, Saratov, Russia
Email address: `sgalaev@mail.ru`