

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 0, стр. 0–0 (0)
DOI 0

УДК 519.632.4
MSC 65N12+35J25

**РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО
ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ПОМОЩИ МАШИННОГО
ОБУЧЕНИЯ**

К.С. КУЗНЕЦОВ, Е.В. АМОСОВА

ABSTRACT. An algorithm based on machine learning for solving the problem of boundary control for a complex heat transfer model is considered. The control is a vector function included in the boundary conditions multiplicatively. The system consists of the heat equation and P_1 – approximation of the radiative transfer equation. The solution of the control problem is modeled using the principle «bang-bang».

Based on the numerical-analytical solution of a direct non-stationary nonlinear problem using the FreeFem++ software package, a dataset for machine learning is formed in order to predict the quality functional that characterizes the smoothing of the temperature field to the specified field by the input parameters of the model. A neural network optimization problem is formulated to determine the multidimensional boundary control. The stochastic method is used to solve the optimization problem. A comparative analysis of the solution

KUZNETSOV, K.S., AMOSOVA, E.V., SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF COMPLEX HEAT TRANSFER USING MACHINE LEARNING METHODS.

© 2023 КУЗНЕЦОВ К.С., АМОСОВА Е.В..

Поступила 0 марта 0 г., опубликована 0 декабря 0 г.

of the inverse problem obtained using machine learning with the calculations obtained by solving the optimality system in the case of one boundary control is carried out. The potential of machine learning for the problems of parameters recovery in physical medium is shown.

Keywords: boundary control problem, machine learning, neural networks, complex heat transfer, optimization.

1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальность поиска быстрых и надежных алгоритмов решения обратных задач сложного теплообмена обуславливается практическим приложением, например, при производстве стекла [1] и в камерах сгорания [2]. В силу своей прикладной значимости часто рассматривают задачи восстановления параметров среды, зависящих от внешних условий. Отдельный интерес в этой области представляют задачи оптимального управления взаимодействующими процессами, что приводит к необходимости исследовать задачу управления векторнозначной функцией. Прямая задача основывается на математической модели кондуктивного радиационного теплообмена включающей интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения. Поскольку получить решение уравнения переноса представляется затруднительным, вместо него используется P_1 -приближение [3].

При решении задач оптимальности применяются методы, основанные на решении системы оптимальности, которая является необходимым условием минимума функционала качества, либо используются прямые методы поиска решения вариационных задач. В работе рассматривается альтернативный подход к решению обратных задач – применение методов машинного обучения для вычисления величины критерия качества в задачах оптимального граничного управления со сложным теплообменом. Одним из способов поиска решения задачи оптимальности является метод, основанный на принципе «bang-bang» [4], [5], [6], в котором в качестве множества допустимых управлений выбираются кусочно-постоянные функции с конечным числом разрывов. Целевая функция нейронной сети строится на поиске точек переключений режимов управления. Негладкое множество управлений позволяет ускорить обработку данных и сократить время для обучения сети.

Отметим, что методы, построенные на выводе необходимых условий оптимальности и прямые методы решения вариационных задач обладают рядом недостатков – в частности, сложность поиска

численных решений прямой и сопряженной задач вместе с необходимым условием оптимальности, а также большие затраты временных и вычислительных ресурсов, обусловленные итерационным процессом сходимости, при котором прямая и сопряженная задачи решаются несколько раз.

Целью работы является применение технологии оптимизации, основанной на методах машинного обучения при решении обратных задач с различными параметрами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Нестационарная задача радиационного и кондуктивного теплообмена описывается системой, состоящей из уравнения теплопроводности и P_1 – приближения уравнения переноса излучения в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Вместе с граничными условиями система имеет следующий вид [6, 7]:

$$(1) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + bk_a(|\theta|\theta^3 - \phi) = 0,$$

$$(2) \quad -\alpha\Delta\phi + k_a(\phi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T),$$

$$(3) \quad a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\partial_n\phi + \gamma(\phi - \theta_b^4) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T),$$

$$(4) \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad x \in \Omega,$$

где θ – нормализованная температура, ϕ – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, k_a – коэффициент поглощения, через ∂_n обозначается производная в направлении внешней нормали \mathbf{n} к границе области, $\Gamma = \partial\Omega$.

Коэффициенты a , b , α , β , γ выражаются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v} \left[\frac{\text{см}^2}{\text{с}} \right], \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{max}^3}{\rho c_v} \left[\frac{\text{см}}{\text{с}} \right], \quad \alpha = \frac{1}{3k - Ak_s} \left[\frac{1}{\text{см}} \right],$$

$$\beta = \frac{h}{\rho c_v} \left[\frac{\text{см}}{\text{с}} \right], \quad \gamma = \frac{\epsilon}{2(2 - \epsilon)},$$

где h – коэффициент теплоотдачи границы области [кг/(с³К)], ϵ – степень черноты поверхности, k – коэффициент теплопроводности [кг · см/(с³К)], ρ – плотность среды [кг/см³], c_v – коэффициент удельной теплоемкости [см²/с²К], σ – постоянная Стефана-Больцмана [кг/(с³К⁴)], n – показатель преломления, T_{max} – максимальная температура в ненормализованной модели [К], κ – коэффициент полного взаимодействия, κ_s – коэффициент рассеяния, A – коэффициент анизотропии рассеяния $\in [-1; 1]$.

Считаем, что Ω – липшицева ограниченная область. Введем следующие пространства: L^p , $1 \leq p \leq \infty$ – пространство Лебега, H^1 – пространство Соболева W_2^1 , $L^p(0, T; X)$ – пространство Лебега функций со значениями в банаховом пространстве X .

Обозначим через $W = \{y \in L^2(0, T; H^1) : y' \in L^2(0, T; (H^1)')\}$, где $(H^1)'$ – пространство, сопряженное с пространством H^1 . Здесь и далее $y' = dy/dt$.

Рассмотрим задачу восстановления температурного поля к заданному полю во всей области с помощью управления коэффициентом излучения границы области γ и коэффициентом β с областью значений из замкнутого множества. Определим множество допустимых управлений

$$U_{ad} = \{\gamma \in L^2(\Gamma), \beta \in L^2(\Gamma) : \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2, \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2\},$$

где $0 < \beta_0 \leq \beta_1$, $0 < \gamma_0 \leq \gamma_1$.

Множество U_{ad} является замкнутым выпуклым множеством в $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$.

Определение. Пара $\{\theta, \varphi\} \in W \times H^1$ называется слабым решением задачи (1)–(4), соответствующим управлению $\{\gamma, \beta\} \in U_{ad}$, если для любых $u \in H^1$, $v \in H^1$ почти всюду на $(0, T)$ выполняются равенства

$$(\theta', u) + \int_{\Omega} a \nabla \theta \nabla u \, dx dy + \int_{\Gamma} \beta (\theta - \theta_b) u \, d\sigma + \int_{\Omega} b k_a (|\theta|^3 - \phi) u \, dx dy = 0,$$

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla \phi \nabla v \, dx dy + \int_{\Gamma} \gamma (\phi - \theta_b^4) v \, d\sigma + \int_{\Omega} k_a (\phi - |\theta|^3) v \, dx dy = 0$$

и при этом $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Точно так же как и в [7] доказываем, что при выполнении следующих условий на исходные данные:

- (i): $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2 \in L^\infty(\Omega)$, $0 < \gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_2$, $0 < \beta_0 \leq \beta \leq \beta_2$, $\gamma_0, \beta_0 = \text{const}$;
- (ii): $\theta_b \in L^\infty(\Gamma \times (0, T))$, $\theta_b \geq 0$, $0 \leq \theta_0 \in L^\infty(\Omega)$, $d\theta_b/dt \in L^2(\Gamma \times (0, T))$

существует единственное слабое решение задачи (1)–(4), обладающее следующими свойствами:

$$0 \leq \theta \leq M, \quad 0 \leq \varphi \leq M^4,$$

где $M = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty}, \|\theta_0\|_{L^\infty}\}$.

Задача минимизации функционала

$$(5) \quad J[\gamma, \beta] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\theta(\gamma, \beta) - \theta_d|^2 dx dy dt$$

формулируется следующим образом: пусть состояние системы $\{\theta(\gamma, \beta), \phi(\gamma, \beta)\}$ определяется как слабое решение задачи (1)–(4), требуется

$$(6) \quad \text{найти } \{\gamma_0, \beta_0\} \in U_{ad} \text{ такие, что } J[\gamma_0, \beta_0] = \inf_{\{\gamma, \beta\} \in U_{ad}} J[\gamma, \beta].$$

Решение $\{\gamma_0, \beta_0\}$ задачи (6) будем называть оптимальным управлением.

Аналогично [7] устанавливается ограниченность снизу и дифференцируемость по Фреше функционала (5).

Теорема 1. Решение задачи (6) существует.

Доказательство. Функционал (5) является слабо полунепрерывным снизу в пространстве $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ при фиксированных θ, ϕ , следовательно, любая минимизирующая последовательность $\{\gamma_k, \beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена. В [7] доказано, что $\forall k$ существует слабое решение $\{\theta_k, \phi_k\}$ задачи (1)–(4) для которого имеют место оценки

$$\|\theta_k\|_{L^2(0,T;H^1)} + \|\phi_k\|_{H^1} < C,$$

где постоянная C не зависит от k . Эти оценки гарантируют возможность выбора такой подпоследовательности (обозначим её также θ_k, ϕ_k), что

$$\theta_k \rightarrow \theta \text{ слабо в } L^2(0, T; H^1), \quad \phi_k \rightarrow \phi \text{ слабо в } H^1(\Omega).$$

Аналогично [7] проводится предельный переход в интегральных тождествах определения слабого решения, за исключением одного слагаемого. Обоснование предельного перехода требуется в следующем выражении

$$(7) \quad \int_{\Gamma} \beta_k \theta_k u d\sigma \rightarrow \int_{\Gamma} \beta \theta u d\sigma \quad \forall u \in H^1 \text{ слабо в } (H^1)' \text{ для п.в. } t \in (0, T).$$

Заметим, что имеет место следующее неравенство [8]: для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная C_ε для которой

$$\int_{\Gamma} |\theta_k - \theta|^2 d\sigma \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \theta_k - \nabla \theta|^2 dx dy + C_\varepsilon \int_{\Omega} |\theta_k - \theta|^2 dx dy.$$

В [7] показано, что $\theta_k \rightarrow \theta$ сильно в $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Таким образом,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} |\theta_k - \theta| d\sigma < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Следовательно, существует подпоследовательность (обозначим её также θ_k) такая, что $\theta_k \rightarrow \theta$ сильно в $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$. Из доказанной сильной сходимости вытекает справедливость (7). При этом $\{\theta, \phi\}$ является слабым решением задачи (1)–(4). Следовательно, любая предельная (в смысле слабой сходимости) точка минимизирующей последовательности является решением задачи (6).

В работе [6] рассмотрена задача управления в модели сложного теплообмена (1)–(4) с одним параметром управления. В качестве управления выбирается функция $\gamma \in L^2(\Gamma)$ такая, что $\gamma_1 \leq \gamma(x) \leq \gamma_2$, где γ_1 и γ_2 имеют тот же смысл, что и в условии (i), функция $\beta \in L^\infty(\Gamma)$ считается заданной. Задачей оптимального управления в данном случае является определение функции γ при которой функционал $J[\gamma]$ вида (5) принимает минимальное значение, где β, θ_d – заданные функции. В этой же работе доказана разрешимость задачи управления, получены необходимые условия оптимальности и рассмотрен численный алгоритм нахождения функции управления.

Для решения экстремальной задачи (6) предлагается оптимизационная технология определения параметров управления на основе методов машинного обучения, которая состоит из следующих этапов:

- 1) Нахождение решения прямой задачи численно-аналитическим способом при фиксированных значениях параметров управления;
- 2) Формирование базы данных численных решений прямой задачи для различных значений исходных данных;
- 3) Обучение нейронной сети на прогнозирование осредненного по области определения пространственных переменных функционала качества

$$\tilde{J}[\gamma, \beta] = J[\gamma, \beta] / \text{mes } \Omega$$

по физическим характеристикам процесса, а также параметрам на границе и в начале процесса;

- 4) Минимизация функции нейронной сети при помощи стохастического алгоритма.

Для формирования базы данных выполнены численные эксперименты решений прямой задачи (1)–(4) методом конечных элементов при помощи мультифизического программного обеспечения FreeFem++

[9]. Для моделирования оптимального управления используется свойство релейности, установленное в [7] в случае одного граничного управления. Преимуществом данной технологии является возможность выбора в качестве граничного управления более одного коэффициента: $\gamma = \gamma(x)$ и $\beta = \beta(x)$. Релейность оптимального управления в данном случае доказывается аналогично [7]. На полученной базе данных предполагается обучить классическую модель регрессии XGBoost Regressor [10] и глубокую нейронную сеть, обладающей большей точностью, но требующей значительных вычислительных ресурсов. Для оптимизации нахождения минимума нейронной сети используется обобщенный алгоритм имитации отжига.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Численное решение задачи (1)–(4) находится методом конечных элементов с дискретизацией по времени при помощи обратного метода Эйлера. Для линеаризации нелинейных слагаемых применяется разложение функции в ряд Тейлора. Полученная линеаризованная модель характеризуется тем, что решение на новом временном слое находится из линейной вариационной задачи. Сходимость полученного итерационного процесса обоснована в работе [11].

Далее будем использовать пространство конечных элементов H_h^1 вместо пространства Соболева H^1 . Пусть $\theta_h^n \in H_h^1$, $\phi_h^n \in H_h^1$, где $f_h^n = f(x, y, n\tau)$, $(x, y) \in \Omega_h$, $n = 1, \dots, N$, $\tau = T/N$.

Конечномерный оператор, порожденный билинейной формой слабого решения задачи (1)–(4), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_h(\theta_h^{n+1}, \phi_h^{n+1}, u, v) = & \\ = \tau^{-1} \int_{\Omega} \theta_h^{n+1} u \, dx dy + a \int_{\Omega} \nabla \theta_h^{n+1} \nabla u \, dx dy + \alpha \int_{\Omega} \nabla \phi_h^{n+1} \nabla v \, dx dy + & \\ + bk_a \int_{\Omega} (4(\theta_h^n)^3 \theta_h^{n+1} - \phi_h^{n+1}) u \, dx dy + k_a \int_{\Omega} (\phi_h^{n+1} - 4(\theta_h^n)^3 \theta_h^{n+1}) v \, dx dy + & \\ + \int_{\Gamma} \beta \theta_h^{n+1} u \, d\sigma + \int_{\Gamma} \gamma \phi_h^{n+1} v \, d\sigma, \quad \forall u, v \in H_h^1. & \end{aligned}$$

Конечномерный оператор линейной формы слабого решения задачи (1)–(4) определен равенством

$$\begin{aligned} \ell_h(u, v) = & -\tau^{-1} \int_{\Omega} \theta_h^n u \, dx dy + \\ & + 3bk_a \int_{\Omega} (\theta_h^n)^4 u \, dx dy - 3k_a \int_{\Omega} (\theta_h^n)^4 v \, dx dy + \\ & + \int_{\Gamma} \beta \theta_b u \, d\sigma + \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 v \, d\sigma \quad \forall u, v \in H_h^1. \end{aligned}$$

Численное исследование системы

$$a_h(\theta_h^{n+1}, \phi_h^{n+1}, u, v) = \ell_h(u, v), \quad \forall u, v \in H_h^1$$

проводится в программном комплексе FreeFem++. Рассчитывается модель сложного теплообмена в двумерной области, геометрической формой выбран квадрат. Так как далее в процессе генерации базы данных линейный размер области варьируются, то максимальный размер конечного элемента, гарантирующий достаточную погрешность численного метода, подстраивается при помощи автоадаптации сетки, выполненной программной функцией FreeFem++.

В силу симметричности квадрата, точку переключения отдельно для каждого граничного коэффициента будем искать на половине стороны квадрата. На рисунке 1 на стороне квадрата длины L указан диапазон поиска точки переключения, симметричной относительно средней линии квадрата, из интервала $[0.05L; 0.495L]$, а также схематично изображено симметричное расположение возможной точки переключения, обозначенной красным цветом, на расстоянии $0.3L$ от края границы.

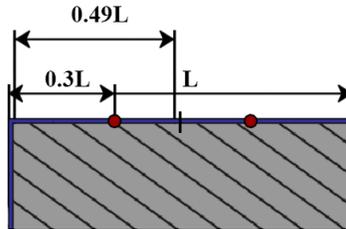


Рис. 1. Схематическое изображение точки переключения

При решении обратной задачи используется принцип «bang-bang», при котором на границе происходит переключение управления на

крайние значения множества управлений. На рисунке 2 изображены примеры возможных графиков функций $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ с точками переключения, расположенными на расстоянии $0.3L$ от начала границы. При этом необходимо отметить, что точки переключения для обеих функций независимы и в общем случае могут не совпадать.

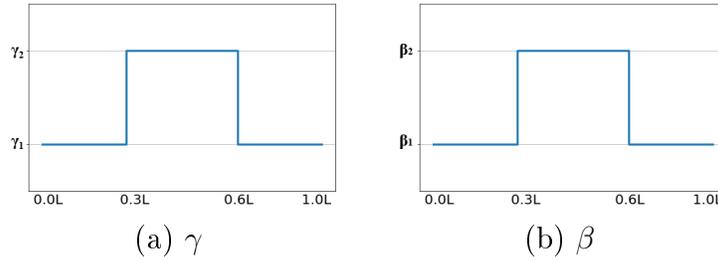


Рис. 2. Графики граничных функций

4. БАЗА ДАННЫХ

Для формирования базы данных необходимо определить параметры процесса, которые будут использованы для машинного обучения, а также пределы их вариации. В данном случае под параметрами понимаются физические характеристики среды, а также граничные и начальные функции. Полный список параметров, а также их единицы измерения представлены в таблице 1. Здесь γ_1, γ_2 – значения функции γ до и после переключения соответственно, h_1, h_2 – граничные параметры, необходимые для расчета функции β до и после переключения соответственно. Описание всех остальных параметров приведено в разделе 2.

Генерация данных осуществлялась случайной выборкой из равномерного распределения в пределах минимального и максимального значения для каждого из параметров, указанных в таблице 1. Пределы вариации параметров были выбраны достаточно широкими для возможности решения поставленной задачи практически для любых физических сред, а также граничных и начальных условий.

Общее время теплообмена составило $T=300$ с, временной шаг $\tau=0.1$.

Всего было сгенерировано 20000 наборов параметров, для каждого из которых была численно решена прямая задача, а также получено соответствующее значение функционала качества \tilde{J} .

ТАБЛИЦА 1. Варьируемые параметры и их распределение

Название	Минимальное значение	Максимальное значение	Единицы измерения
ρ	$0.15 \cdot 10^{-6}$	$5000 \cdot 10^{-6}$	кг/см ³
c_v	$5 \cdot 10^6$	$52 \cdot 10^6$	см ² /с ² К
T_{max}	273	3000	К
n	1	2	–
k	0	$5 \cdot 10^3$	кг · см/с ³ К
κ	0.01	1	см ⁻¹
κ_s	0	0.01	см ⁻¹
A	-1	1	–
L	10	200	см
θ_b	0.0	1.0	–
θ_0	0.0	1.0	–
θ_d	0.0	1.0	–
γ_1	0.0	0.5	–
γ_2	0.0	0.5	–
h_1	0.1	500	кг/с ³ К
h_2	0.1	500	кг/с ³ К
P_1	$0.005L$	$0.495L$	–
P_2	$0.005L$	$0.495L$	–

5. МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ

На сформированной базе данных были обучены нейронная сеть и основанная на методе градиентного бустинга модель регрессии XGBoost Regressor. Входными параметрами являлись все параметры из таблицы 1, единственным выходным параметром являлось значение функционала качества $\tilde{J}[\gamma, \beta]$, введенного в разделе 2.

Для оценки качества работы моделей использовались метрики R^2 , MAE и SMAPE.

Коэффициент детерминации, R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})}.$$

Средняя абсолютная ошибка, MAE:

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|.$$

Средняя абсолютная ошибка в процентах, MAPE:

$$\text{MAPE} = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - x_i|}{|x_i|}.$$

Здесь y_i – прогнозируемые значения, x_i – значения, полученные при численном моделировании, $\bar{y} = (1/n) \sum_{i=1}^n y_i$.

Так как функционал \tilde{J} принимает в том числе и значения от 0 до 1, то средняя абсолютная ошибка в процентах (MAPE) может иметь непропорционально высокие значения и не является адекватным способом процентной оценки качества прогнозирования модели. Для адекватной процентной оценки предлагается использовать симметричную абсолютную ошибку в процентах, SMAPE:

$$\text{SMAPE} = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - x_i|}{|y_i| + |x_i|},$$

Данная метрика учитывает разницу между прогнозируемыми и данными численных экспериментов и имеет предел от 0 до 100%, где более низкое значение соответствует более высокому качеству прогнозирования.

Для обучения и валидации моделей использовалась десятиблочная кросс-валидация. Были получены результаты, представленные в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2. Результаты работы моделей машинного обучения

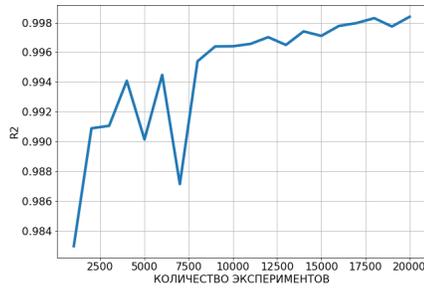
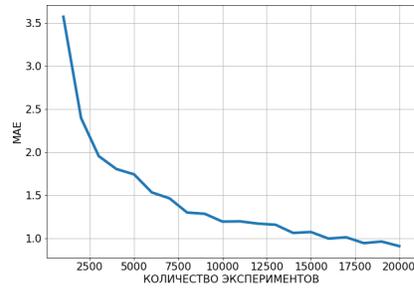
	XGBoost	Нейронная сеть
R2	0.983	0.998
MAE	5.61	0.91
SMAPE	28.42%	7.87%

Нейронная сеть показала лучший результат. Обучающие кривые для неё представлены на рисунке 3.

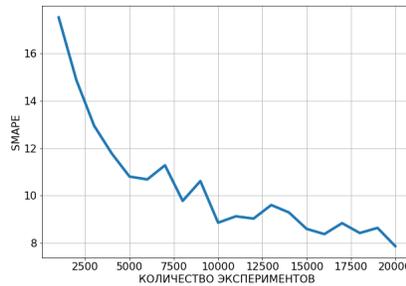
Из полученных данных видно, что модель прогнозирует значение функционала \tilde{J} с достаточно высокой точностью. На это указывает высокое значение R^2 , близкое к единице, а также низкие значения SMAPE=7.87%, которое показывает среднюю процентную ошибку и MAE=0.91, которое показывает среднюю абсолютную ошибку.

6. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Для решения задачи оптимального управления использовалась минимизация обученной нейронной сети при помощи обобщенного

(a) R^2 

(b) MAE



(c) SMAPE

Рис. 3. Обучающие кривые для нейронной сети

алгоритма имитации отжига [12], [13].

$$F(z) \rightarrow \min,$$

где $F(z) = \sigma_o(\sigma_h(Wz))$ – функция нейронной сети с одним скрытым слоем, прогнозирующая значение функционала \tilde{J} по набору входных параметров $z = \{\rho, c_v, T_{max}, \dots, h_2, P_1, P_2\}$, W – матрица весов нейронной сети, полученная в результате обучения, σ_o – функция активации выходного слоя, σ_h – функция активации скрытого слоя,

Используемый алгоритм имитирует физический процесс, происходящий при отжиге металлов. В ходе этого процесса металл достигает своего кристаллического состояния, которое является глобальным минимумом с точки зрения термодинамической энергии. При применении алгоритма целевая функция рассматривается как функция энергии расплавленного металла. Вводится искусственная температура, которая постепенно снижает своё значение. Эта температура добавляет стохастичность методу, что помогает избежать локальных минимумов. В конце процесса целевая функция находит свой глобальный минимум или значение, близкое к нему.

В процессе минимизации функции $F(z)$ при применении метода имитации отжига предлагается варьировать 6 функций из набора параметров z : $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2, P_1, P_2$. Данные параметры в совокупности позволяют найти функции γ и β , отвечающие принципу «bang-bang». Все остальные параметры в процессе оптимизации оставались неизменными.

В силу неточности, возникающей при работе нейронной сети, а также в силу стохастичности метода имитации отжига, для оценки предложенной технологии необходимо произвести как качественный, так и количественный анализ сравнения полученных результатов с результатами классических методов. В силу отсутствия статистического анализа применения классических методов оптимального управления, данная работа была проделана авторами текущей статьи. За основу была взята работа [6], в которой описывается численный метод применения алгоритма классического оптимального управления граничным параметром γ для системы, аналогичной (1)–(4), на примере физических параметров модели, соответствующих стеклу.

Для сравнения было сгенерировано 500 наборов параметров стекла с разными граничными и начальными условиями для решения прямой задачи системы (1) – (4). После решения прямой задачи для каждого из численных экспериментов был проведен анализ в следующих четырех случаях:

I) В первом случае был использован метод простой итерации, описанный в [6], реализующий оптимальное управление коэффициентом γ классическим способом. Поиск решения при этом осуществлялся из выбранных интервалов:

$$\gamma_1 \in [0, 0.25], \gamma_2 \in [0.25, 0.50], P_1 \in [0.025L, 0.475L].$$

II) Во втором случае использовалась предложенная в данной работе оптимизационная технология на основе методов машинного обучения, в ходе которого также в качестве граничного управления использовалась функция γ , поиск которой осуществлялся в аналогичных предыдущему пункту интервалах. Данный этап был проведен для сравнения с предыдущим пунктом. Вариация граничных параметров осуществлялись в следующих пределах:

$$\gamma_1 \in [0, 0.25], \gamma_2 \in [0.25, 0.50], P_1 \in [0.025L, 0.475L].$$

III) В третьем случае также использовалась предложенная авторами технология для управления граничной функцией γ . В данном случае не соблюдается принцип, присущий классическим методам, такой, что $\gamma_1 \leq \gamma_2$. Целью данного этапа было проверить влияние

данного ограничения на конечный результат оптимизации. Пределы варьирования искомым функций следующие:

$$\gamma_1 \in [0, 0.5], \gamma_2 \in [0, 0.50], P_1 \in [0.025L, 0.475L].$$

IV) В четвертом случае также использовалась предложенная в данной работе технология для управления сразу двумя граничными функциями, γ и β . Таким образом, в данном случае исследовалось влияние граничной функции β на оптимальное управление. Граничные функции при оптимизации варьировались в следующих пределах:

$$\gamma_1 \in [0.0, 0.5], \gamma_2 \in [0.0, 0.5], P_1 \in [0.025L, 0.475L],$$

$$\beta_1 \in [6 \cdot 10^{-7}, 0.03], \beta_2 \in [6 \cdot 10^{-7}, 0.03], P_2 \in [0.025L, 0.475L].$$

Для количественной оценки рассчитывался процент успешного применения оптимального управления:

$$V_1 = 100 \cdot \frac{m - m_0}{m},$$

где m – общее число случаев, m_0 – число случаев, для которых оптимальное управление не привело к снижению функционала качества. В случае классических методов данная метрика говорит о сходимости метода, в случае предложенной технологии – о точности прогнозирования значения функционала нейронной сетью.

Для качественной оценки использовалось среднее значение снижения функционала качества от первоначального значения в процентах:

$$V_2 = 100 \cdot \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{n=500} \frac{\tilde{J}_i^{init} - \tilde{J}_i^{opt}}{\tilde{J}_i^{init}},$$

Полученные результаты для каждого из четырех этапов представлены в таблице 3.

ТАБЛИЦА 3. Результаты оптимизации

	I	II	III	IV
V_1	45.8%	49.4%	50%	71.2%
V_2	2.45%	7.74%	8.8%	12.82%

Из результатов для этапов I и II, представленных в таблице, видно, что оптимальное управление, выполненное классическими методами, незначительно проигрывает предложенной авторами технологии как в количественной, так и в качественной оценке.

Из сравнения результатов для этапов II и III видно, что отсутствие ограничения $\gamma_1 \leq \gamma_2$ не играет существенной роли и привело к улучшению результата лишь в пределах статистической погрешности.

При сравнении результатов III и IV этапа становится понятно, что возможность управлять двумя граничными параметрами, что является эксклюзивной особенностью предложенной авторами технологии, приводит к значительному улучшению как качественной, так и количественной оценок качества оптимизации. Таким образом, можно утверждать о большой роли коэффициента β в задачах оптимального управления граничными коэффициентами в модели сложного теплообмена.

Для демонстрации возможностей работы предложенной технологии был рассчитан численный эксперимент с физическими характеристиками стекла и следующими граничными и начальными условиями:

$$a = 0.006, b = 0.025, \alpha = 0.435, T_{max} = 1057, L = 23.86, \\ \theta_0 = 0.639, \theta_b = 0.141, \theta_d = 0.65.$$

Для данного эксперимента были реализованы II, III и IV этапы оптимизации. Значения граничных функций после различных этапов оптимизации показаны ниже:

$$\text{II) } \gamma_1 = 9.33 \cdot 10^{-2}, \gamma_2 = 0.472, P_1 = 0.4625L.$$

$$\text{III) } \gamma_1 = 5.6 \cdot 10^{-2}, \gamma_2 = 0.275, P_1 = 0.178L.$$

$$\text{IV) } \gamma_1 = 8 \cdot 10^{-4}, \gamma_2 = 0.5, P_1 = 0.46L, \beta_1 = 3 \cdot 10^{-3}, \beta_2 = 2.68 \cdot 10^{-3}, P_1 = 0.232L.$$

Результаты оптимизации являются репрезентативными для всей выборки численных экспериментов. На рисунке 4 представлено поле температур до и после каждого из упомянутых выше этапов оптимизации вместе со значениями функционала качества \tilde{J} .

Стоит также отметить, что основная вычислительная нагрузка происходит на этапе обучения нейронной сети. Применение оптимизационного метода на уже обученную сеть позволяет получить решение обратной задачи при любых параметрах в течение нескольких минут практически на любом устройстве, в то время как для классических методов необходимо заново циклично решать прямую и обратную задачу. Вышеизложенные факты говорят о том, что применение машинного обучения для решения данных задач не является избыточно сложным с вычислительной точки зрения, особенно при решении практических задач, когда необходимо рассчитать целый ряд вычислительных экспериментов с отличающимися параметрами.

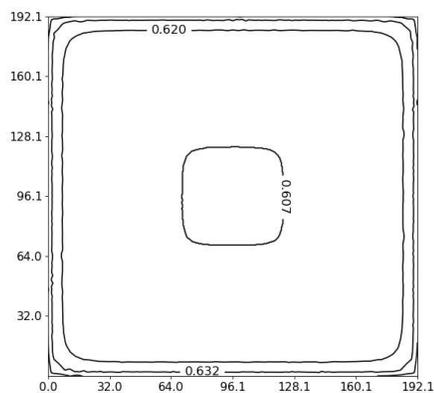
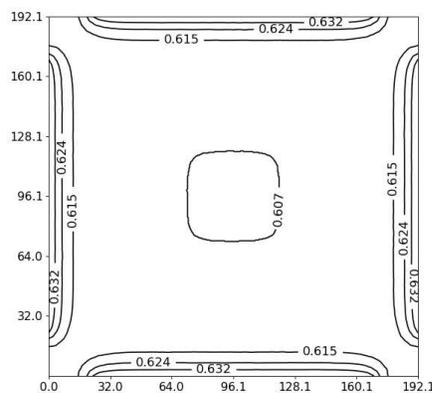
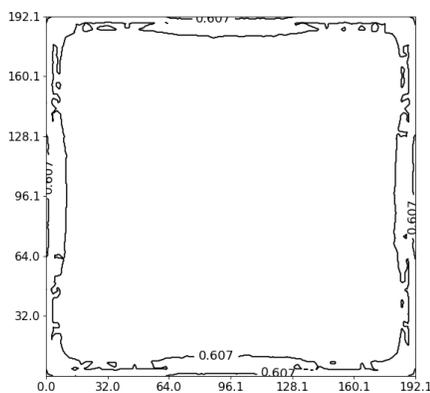
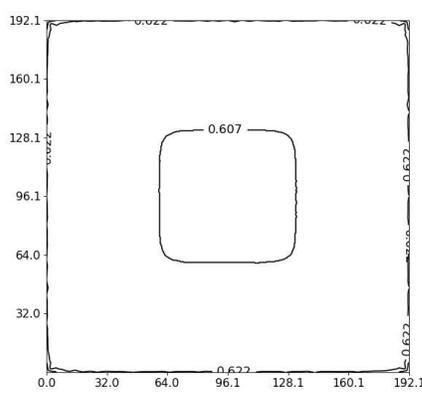
(a) Без оптимизации, $J = 0.336$ (b) II этап, $J = 0.25$ (c) III этап, $J = 0.258$ (d) IV этап, $J = 0.0597$

Рис. 4. Репрезентативный пример оптимизации поля температур

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена оптимизационная технология на базе машинного обучения для управления параметрами на границе в модели сложного теплообмена, использующая принцип «bang-bang» в своей основе. Авторами проведен количественный и

качественный сравнительный анализ с методом классического оптимального управления, который показал, что предложенная технология решает задачу оптимального управления более эффективно. Основное преимущество данной технологии состоит в возможности управления сразу двумя граничными функциями, чего не позволяют классические методы на текущий момент.

REFERENCES

- [1] R. Pinnau, G. Thömmes, *Optimal boundary control of glass cooling processes*, Math. Methods Appl. Sci., (2004), 1261-1281.
- [2] E. Schneider, M. Seaid, J. Janicka, A. Klar, *Validation of simplified PN models for radiative transfer in combustion systems*, Commun. Numer. Meth. Engng., **24**:2, (2008), 85–96.
- [3] M.F. Modest, *Radiative heat transfer*, New York: Academic Press, (2003).
- [4] G. V. Grenkin, A. Yu. Chebotarev, *Control of complex heat transfer on producing extremal fields*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **56**:10, (2016), 1708—1715.
- [5] G.V. Grenkin, *Optimal control in a non-stationary problem of complex heat transfer*, Far Eastern Mathematical Journal, 2016, **14**:2, 160–172.
- [6] G.V. Grenkin, *Algorithm for Solving the Boundary Optimal Control Problem in a Complex Heat Transfer Model*, Far Eastern Mathematical Journal, **16**:1, (2016), 24-38.
- [7] G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Boundary optimal control problem of complex heat transfer model*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **433**:2, (2016), 1243–1260.
- [8] P.-L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Incompressible Models*, Clarendon Press, Oxford Science Publ., **1**, (1996).
- [9] F. Hecht, *New development in freefem++*, Journal of numerical mathematics, **20**:3-4, (2012), 251-256, <https://freefem.org/>.
- [10] T. Chen, C. Guestrin, *XGBoost: A Scalable Tree Boosting System*, Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, (2016), 785–794, <https://xgboost.ai/>.
- [11] E. M. Mukhamadiev, V. Y. Stetsenko, *Sufficient conditions for convergence of the newtonkantorovich method in solving boundary value problems for quasilinear equations of elliptic type*, Siberian Mathematical Journal, **12**, (1971), 408–412. T. 12, № 3. С. 576-582.
- [12] Y. Xiang, S. Gubian, B. Suomela, J. Hoeng, *Generalized Simulated Annealing for Global Optimization: The GenSA Package*, The R Journal, **5**:1, (2013), 13–29.
- [13] Y. Xiang, X. Gong, *Efficiency of Generalized Simulated Annealing*, Physical Review E, **62**:3, (2000), 4473.
- [14] G.V. Grenkin, *Convergence of Newton's Method for Complex Heat Transfer Equations*, Far Eastern Mathematical Journal, **17**:1, (2017), 3–10.

KIRILL SERGEYEVICH KUZNETSOV
FAR EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
AJAX BAY 10, RUSSKY ISLAND,
690922, VLADIVOSTOK, RUSSIA,
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS FEB RAS,
RADIO STR., 7,
690041, VLADIVOSTOK, RUSSIA

ELENA VLADIMIROVNA AMOSOVA
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS FEB RAS,
RADIO STR., 7,
690041, VLADIVOSTOK, RUSSIA